Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. О. Банах, И. В. Протасов, Асимметричные разбиения абелевых групп, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 10–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 06:35:45

УДК 519.4

АСИММЕТРИЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Т. О. Банах, И. В. Протасов

Подмножество A абелевой группы G называется асимметричным, если $g + S \not\subset A$ для любого элемента $g \in G$ и любого бесконечного симметричного подмножества $S \subset G$, $S = -S$. Минимальная мощность разбиения группы G на асимметричные подмножества обозначается через $\nu(G)$. Для каждой абелевой группы G кардинальное число $\nu(G)$ выражено через следующие кардинальные инварианты: свободный ранг, 2-ранг и мощность группы. В частности, $\nu(\mathbb{Z}^n) = n + 1$, $\nu(\mathbb{Q}^n) = n + 2$, $\nu(\mathbb{R}) = \aleph_0$.

Библиография: 5 названий.

Подмножество A абелевой группы G будем называть *асимметричным*, если $g + S \not\subset A$ для любого элемента $g \in G$ и любого бесконечного симметричного подмножества $S \subset G$, $S = -S$ (другими словами, A не содержит бесконечного подмножества, симметричного относительно некоторой точки).

Для каждой абелевой группы G определим $\nu(G)$ как минимальную мощность разбиения группы G асимметричными подмножествами. В хроматической терминологии $\nu(G)$ это минимальное количество цветов, необходимых для асимметричной раскраски группы G . Очевидно, что $\nu(G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа G конечна. Число $\nu(G)$ было введено И. В. Протасовым в [1]. Там же охарактеризованы группы G с $\nu(G) = 2$ и поставлен вопрос вычисления кардинала $\nu(G)$ для конкретных групп $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}$.

В данной заметке мы вычислим инварианты $\nu(G)$ для всех абелевых групп G через следующие известные кардинальные инварианты: свободный ранг $r_0(G)$, 2-ранг $r_2(G)$ и мощность $|G|$ группы G (определения рангов $r_0(G)$, $r_p(G)$ для простых чисел p см. [2, с. 103]). Предполагая все рассматриваемые группы абелевыми, изложим вначале основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. Если G – конечнопорожденная группа, то $\nu(G) = r_0(G) + 1$.

ТЕОРЕМА 2. Если G – счетная бесконечнопорожденная группа и числа $r_0(G)$, $r_2(G)$ конечны, то $\nu(G) = r_0(G) + 2$.

ТЕОРЕМА 3. Если G – счетная группа и по крайней мере одно из чисел $r_0(G)$, $r_2(G)$ бесконечно, то $\nu(G) = \aleph_0$.

ТЕОРЕМА 4. Если G – несчетная группа, то $\nu(G) = \max\{r_2(G), \log|G|\}$, где $\log|G| = \min\{\gamma : 2^\gamma \geq |G|\}$.

Из теорем 1, 2 следует, что $\nu(\mathbb{Z}^n) = n + 1$, $\nu(\mathbb{Q}^n) = n + 2$ для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$. По теореме 4 $\nu(\mathbb{R}) = \aleph_0$.

Для доказательства теорем 1, 2 привлекаются некоторые нетривиальные результаты алгебраической топологии, теорема 3 – простое следствие теоремы 1, а теорема 4 доказывается техникой комбинаторной теории множеств. Структура данной заметки такова, что доказательства основных результатов извлекаются из цепочки, состоящей из 16 лемм.

Начнем с того, что несколько модифицируем определение инварианта $\nu(G)$ и введем новый инвариант $\tilde{\nu}(G)$. Заметим, что подмножество A группы G асимметрично тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ пересечение $A \cap (2g - A)$ конечно. Мы будем говорить, что подмножество $A \subset G$ абсолютно асимметрично, если пересечение $A \cap (g - A)$ конечно для каждого $g \in G$. Определим кардинал $\tilde{\nu}(G)$ как минимальную мощность разбиения группы G абсолютно асимметричными подмножествами. Поскольку каждое абсолютно асимметричное множество асимметрично, то $\nu(G) \leq \tilde{\nu}(G) \leq |G|$.

Непосредственно из определений инвариантов ν и $\tilde{\nu}$ вытекает

ЛЕММА 1. Если H – подгруппа группы G , то $\nu(H) \leq \nu(G)$ и $\tilde{\nu}(H) \leq \tilde{\nu}(G)$.

ЛЕММА 2. Если H – подгруппа группы G , то $\tilde{\nu}(G) \leq \tilde{\nu}(H) \times \tilde{\nu}(G/H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем разбиения $H = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\nu}(H)} H_\alpha$ и $G/H = \bigcup_{\beta \in \tilde{\nu}(G/H)} F_\beta$ групп H и G/H абсолютно асимметричными подмножествами. Пусть $s: G/H \rightarrow G$ – любое сечение фактор-отображения $\pi: G \rightarrow G/H$ (т.е. $\pi \circ s(g) = g$ для любого $g \in G/H$).

Для любой пары $(\alpha, \beta) \in \tilde{\nu}(H) \times \tilde{\nu}(G/H)$ положим

$$G_{\alpha, \beta} = H_\alpha + s(F_\beta).$$

Легко видеть, что

$$G = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in \tilde{\nu}(H) \times \tilde{\nu}(G/H)} G_{\alpha, \beta}.$$

Покажем, что каждое подмножество $G_{\alpha, \beta}$ абсолютно асимметрично. Для этого зафиксируем $g \in G$. Поскольку подмножество $F_\beta \subset G/H$ абсолютно асимметрично, пересечение $F_\beta \cap (\pi(g) - F_\beta)$ конечно. Отметим, что для любого $f \in G/H$ $g - s(\pi(g) - f) - s(f) \in H$. Тогда в силу абсолютной асимметричности подмножества $H_\alpha \subset H$ подмножество

$$B = \bigcup_{f \in F_\beta \cap (\pi(g) - F_\beta)} H_\alpha \cap (g - s(\pi(g) - f) - s(f) - H_\alpha) \quad (1)$$

конечно.

Мы утверждаем, что

$$G_{\alpha, \beta} \cap (g - G_{\alpha, \beta}) \subset B + s(F_\beta \cap (\pi(g) - F_\beta)). \quad (2)$$

Действительно, для любого $a \in G_{\alpha,\beta} \cap (g - G_{\alpha,\beta})$ существует элемент $b \in G_{\alpha,\beta}$ с $a = g - b$. По определению подмножества $G_{\alpha,\beta}$ $a = h_a + s(f_a)$ и $b = h_b + s(f_b)$ для некоторых $h_a, h_b \in H_\alpha$ и $f_a, f_b \in F_\beta$. Тогда $h_a + s(f_a) = g - h_b - s(f_b)$. Применяя к этому равенству фактор-отображение π , получим $f_a = \pi(g) - f_b$, т.е. $f_a \in F_\beta \cap (\pi(g) - F_\beta)$. Покажем, что $h_a \in B$, откуда будет следовать (2). Действительно, $a = h_a + s(f_a) = g - b = g - h_b - s(f_b)$. Поскольку $f_b = \pi(g) - f_a$, то $h_a = g - s(\pi(g) - f_a) - s(f_a) - h_b$; следовательно, $h_a \in B$.

Из вложения (2) следует конечность множества $G_{\alpha,\beta} \cap (g - G_{\alpha,\beta})$. Таким образом, $\tilde{\nu}(G) \leq \tilde{\nu}(H) \times \tilde{\nu}(G/H)$.

ЛЕММА 3. Если H – подгруппа счетной группы G , то $\tilde{\nu}(G) \leq \tilde{\nu}(H) + \tilde{\nu}(G/H) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности числа $\tilde{\nu}(H)$ и $\tilde{\nu}(G/H)$ считаем конечными. Более того, мы можем предполагать, что фактор-группа G/H бесконечна (в противном случае $\tilde{\nu}(G/H) = 1$, и по лемме 2 $\tilde{\nu}(G) \leq \tilde{\nu}(H) = \tilde{\nu}(H) + \tilde{\nu}(G/H) - 1$).

Пусть $G = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{n(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – такая последовательность чисел, что $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} g_{n(k)} + H$ и $g_{n(i)} + H \neq g_{n(j)} + H$, если $i \neq j$. Положим $p = \tilde{\nu}(H)$, $q = \tilde{\nu}(G/H)$ и зафиксируем разбиения $H = \bigcup_{\alpha=1}^p H_\alpha$, $G/H = \bigcup_{\beta=1}^q F_\beta$ групп H и G/H абсолютно асимметричными подмножествами.

Для каждого $\alpha \in \{1, \dots, p-1\}$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$A_\alpha(n) = \bigcup_{i,j,k \leq n} (g_{n(i)} + H_\alpha) \cap (g_k - g_{n(j)} - H_\alpha). \quad (3)$$

В силу абсолютной асимметричности H_α множество $A_\alpha(n)$ конечно.

Теперь мы построим разбиение $G = \bigcup_{\gamma=1}^{p+q-1} G_\gamma$ группы G абсолютно асимметричными подмножествами. Для каждого $\gamma \in \{1, \dots, p-1\}$ положим

$$G_\gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} (g_{n(k)} + H_\gamma) \setminus A_\gamma(k).$$

Для каждого $\gamma \in \{p, \dots, p+q-1\}$ положим

$$G_\gamma = \pi^{-1}(F_{\gamma-p+1}) \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{p-1} G_\alpha,$$

где $\pi: G \rightarrow G/H$ – фактор-отображение.

Легко видеть, что $G = \bigcup_{\gamma=1}^{p+q-1} G_\gamma$. Покажем, что множества G_γ абсолютно асимметричны. Зафиксируем любой элемент $g \in G$.

Предположим сначала, что $1 \leq \gamma \leq p-1$. Найдем $n \in \mathbb{N}$ с $g = g_n$. Из определения множества G_γ и из абсолютной асимметричности H_γ следует, что для доказательства конечности пересечения $G_\gamma \cap (g - G_\gamma)$ достаточно доказать, что для любых $i, j > n$

$$((g_{n(i)} + H_\gamma) \setminus A_\gamma(i)) \cap ((g_n - g_{n(j)} - H_\gamma) \setminus (g_n - A_\gamma(j))) = \emptyset. \quad (4)$$

Если $i \geq j > n$, то по (3)

$$(g_{n(i)} + H_\gamma) \cap (g_n - g_{n(j)} - H_\gamma) \subset A_\gamma(i),$$

откуда вытекает (4). Если же $j \geq i > n$, то из (3) следует, что $(g_{n(j)} + H_\gamma) \cap (g_n - g_{n(i)} - H_\gamma) \subset A_\gamma(j)$. Тогда $(g_{n(i)} + H_\gamma) \cap (g_n - g_{n(j)} - H_\gamma) \subset g_n - A_\gamma(j)$. Следовательно, условие (4) выполняется.

Таким образом, для $1 \leq \gamma \leq p-1$ множества G_γ абсолютно асимметричны.

Предположим теперь, что $p-1 \leq \gamma \leq p+q-1$. В силу абсолютной асимметричности $F_{\gamma-p+1}$ множество

$$B = \{g_{n(i)} \mid \pi(g_{n(i)}) \in F_{\gamma-p+1} \cap (\pi(g) - F_{\gamma-p+1})\} \subset G$$

конечно. Тогда множество

$$C = \bigcup_{\gamma=1}^{p-1} \bigcup_{g_{n(i)} \in B} A_\gamma(i)$$

тоже конечно. Мы утверждаем, что

$$G_\gamma \cap (g - G_\gamma) \subset C \cup (g - C) \cup \bigcup_{g', g'' \in B} (g' + H_p) \cap (g - g'' - H_p), \quad (5)$$

откуда, очевидно, вытекает конечность пересечения $G_\gamma \cap (g - G_\gamma)$.

Для доказательства вложения (5) зафиксируем любой элемент $a \in G_\gamma \cap (g - G_\gamma)$. Тогда существует такой элемент $b \in G_\gamma$, что $a = g - b$. Отметим, что $\pi(a) = \pi(g) - \pi(b) \in F_{\gamma-p+1} \cap (\pi(g) - F_{\gamma-p+1})$. Отсюда следует, что для любого $g_{n(i)} \notin B$ $a, b \notin g_{n(i)} + H$. Из определения множества G_γ вытекает, что $a, b \notin \bigcup_{\gamma=1}^{p-1} \bigcup_{g_{n(i)} \in B} (g_{n(i)} + H_\gamma) \setminus A_\gamma(i)$ и, следовательно,

$$a, b \in \bigcup_{\gamma=1}^{p-1} \bigcup_{g_{n(i)} \in B} A_\gamma(i) \cup \left(\bigcup_{g_{n(i)} \in B} g_{n(i)} + H \setminus \bigcup_{\gamma=1}^{p-1} H_\gamma \right) \subset C \cup \left(\bigcup_{g' \in B} g' + H_p \right).$$

Если предположить, что $a \notin C \cup (g - C)$, то из равенства $a = g - b$ следует, что $b \notin C$, и, следовательно, $b \in \bigcup_{g' \in B} g' + H_p$. Отсюда

$$a \in \bigcup_{g' \in B} (g' + H_p) \cap \left(g - \bigcup_{g'' \in B} (g'' + H_p) \right) \subset \bigcup_{g', g'' \in B} (g' + H_p) \cap (g - g'' - H_p).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если G – счетная периодическая группа и число $r_2(G)$ конечно, то $\bar{\nu}(G) \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [1] представим группу G в виде объединения возрастающей последовательности конечных подгрупп

$$G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$$

так, чтобы группа G_{n+1}/G_n содержала все элементы порядка 2 группы G_{n+2}/G_n . Тогда для подходящего подмножества $K_n \subset G_{n+2} \setminus G_{n+1}$ существует следующее разбиение подмножества $G_{n+2} \setminus G_{n+1}$ на смежные классы по подгруппе G_n :

$$G_{n+2} \setminus G_{n+1} = (K_n + G_n) \cup (-K_n + G_n).$$

Положим $A_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n + G_n$ и $A_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} -K_n + G_n$. Нетрудно убедиться, что $A_1 \cup A_2 = G$ и для любого $g \in G_m$

$$A_1 \cap (g - A_1) \subset G_m \quad \text{и} \quad A_2 \cap (g - A_2) \subset G_m,$$

т.е. множества A_1 и A_2 абсолютно асимметричны. Следовательно, $\bar{\nu}(G) \leq 2$.

Поскольку группа целых чисел $\mathbb{Z}$ допускает разбиение $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ на два абсолютно асимметричных подмножества, справедлива

ЛЕММА 5. *Имеем $\bar{\nu}(\mathbb{Z}) = 2$.*

Поскольку $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$, из леммы 3 следует, что $\bar{\nu}(\mathbb{Z}^n) \leq \bar{\nu}(\mathbb{Z}) + \bar{\nu}(\mathbb{Z}^{n-1}) - 1 = \bar{\nu}(\mathbb{Z}^{n-1}) + 1$. Отсюда индукцией по n выводится

ЛЕММА 6. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\bar{\nu}(\mathbb{Z}^n) \leq n + 1$.*

ЛЕММА 7. *Если G – конечнопорожденная группа, то $\bar{\nu}(G) \leq r_0(G) + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По основной теореме для конечнопорожденных абелевых групп [2, 15.2] группа G разлагается в прямую сумму $G = \mathbb{Z}^{r_0(G)} \oplus K$, где K – конечная группа. Тогда по лемме 2 $\bar{\nu}(G) \leq \bar{\nu}(\mathbb{Z}^{r_0(G)}) + \bar{\nu}(K) = \bar{\nu}(\mathbb{Z}^{r_0(G)}) = r_0(G) + 1$.

ЛЕММА 8. *Если G – счетная группа и число $r_2(G)$ конечно, то $\bar{\nu}(G) \leq r_0(G) + 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $r_0(G) = \aleph_0$, то доказывать нечего. Предположим, что $r_0(G) < \aleph_0$. Из определения числа $r_0(G)$ следует, что существует вложение $\mathbb{Z}^{r_0(G)} \subset G$, для которого фактор-группа $G/\mathbb{Z}^{r_0(G)}$ – периодическая. Поскольку группа G конечного свободного ранга содержит конечное число элементов порядка 2, то же верно для фактор-группы $G/\mathbb{Z}^{r_0(G)}$. Тогда согласно лемме 3 $\bar{\nu}(G) \leq \bar{\nu}(\mathbb{Z}^{r_0(G)}) + \bar{\nu}(G/\mathbb{Z}^{r_0(G)}) - 1 \leq (r_0(G) + 1) + 2 - 1 = r_0(G) + 2$.

Далее для доказательства обратных неравенств в леммах 7, 8 мы привлекаем технику алгебраической топологии и следуем терминологии из [3].

На группе $\mathbb{Z}^n$ мы рассматриваем метрику d , порожденную нормой

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

на $\mathbb{R}^n$.

Для точки $x \in (2\mathbb{Z})^n$ положим

$$\mathcal{S}t(x) = \{y \in (2\mathbb{Z})^n : \|x - y\| \leq 2\} \quad \text{и} \quad \mathcal{S}t^2(x) = \{y \in (2\mathbb{Z})^n : \|x - y\| \leq 4\}.$$

ЛЕММА 9. Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\nu(\mathbb{Z}^n) > n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует разбиение $\mathbb{Z}^n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ группы $\mathbb{Z}^n$ асимметричными подмножествами.

Поскольку подмножества A_i асимметричны, существует такое четное число $R \in 2\mathbb{N}$, что

$$\bigcup_{\substack{g \in \mathbb{Z}^n, \|g\| \leq 2 \\ 1 \leq k \leq n}} A_k \cap (2g - A_k) \subset]-R + 4, R - 4[^n. \quad (6)$$

Через I^n обозначим куб $[-R, R]^n$ и через ∂I^n – его границу. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ положим $B_k = \partial I^n \cap (2\mathbb{Z})^n \cap A_k$. Из (6) следует, что

$$St^2(-x) \cap B_k = \emptyset \quad \text{для любой точки} \quad x \in B_k. \quad (7)$$

Пусть N – такая триангуляция границы ∂I^n , что $N^{(0)} = (2\mathbb{Z})^n \cap \partial I^n$ и $\text{diam } \sigma \leq 2$ для каждого симплекса σ из N (через $N^{(0)}$ обозначается 0-мерный скелет триангуляции N).

Через Δ обозначим стандартный $(n-1)$ -мерный симплекс и через $v_1, \dots, v_n$ – его вершины. Зададим кусочно-линейное отображение $f: \partial I^n \rightarrow \Delta$, определив его в вершинах триангуляции формулой $f(u) = v_k$, если $u \in B_k$.

Отметим, что из (7) следует, что для любой точки $x \in \partial I^n \cap (2\mathbb{Z})^n$ $f(\partial I^n \cap St(x)) \cap f(\partial I^n \cap St(-x)) = \emptyset$. Значит, $\text{conv}(f(\partial I^n \cap St(x))) \cap \text{conv}(f(\partial I^n \cap St(-x))) = \emptyset$ (здесь через $\text{conv}(A)$ обозначается выпуклая оболочка множества $A \subset \Delta$). Для произвольной точки $y \in \partial I^n$ выберем ближайшую вершину x триангуляции N . Так как $f(y) \in \text{conv}(f(\partial I^n \cap St(x)))$ и $f(-y) \in \text{conv}(f(\partial I^n \cap St(-x)))$, по доказанному выше $f(y) \neq f(-y)$. Но это противоречит теореме Борсука–Улама об антиподах [3, гл. V, § 8.9].

ЛЕММА 10. Пусть $\mathbb{Z}^n = A_0 \cup \dots \cup A_n$ – разбиение группы $\mathbb{Z}^n$ асимметричными множествами. Тогда существует такая точка $x \in (2\mathbb{Z})^n$, что $St(x) \cap A_k \neq \emptyset$ для каждого $k \in \{0, \dots, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такой точки x не существует. Аналогично лемме 9 найдем такое число $R \in 2\mathbb{N}$, что

$$\bigcup_{\substack{g \in \mathbb{Z}^n, \|g\| \leq 2 \\ 1 \leq k \leq n}} A_k \cap (2g - A_k) \subset]-R + 4, R - 4[^n. \quad (8)$$

Через I^n обозначим куб $[-R, R]^n$ и через ∂I^n – его границу.

Из (8) следует, что

$$St^2(-x) \cap A_k = \emptyset \quad \text{для любой точки} \quad x \in A_k \cap \partial I^n. \quad (9)$$

Пусть N – такая триангуляция куба I^n , что $N^{(0)} = (2\mathbb{Z})^n \cap I^n$ и $\text{diam } \sigma \leq 2$ для каждого симплекса σ из N .

Через Δ обозначим стандартный n -мерный симплекс и через $v_0, \dots, v_n$ – его вершины. Зададим кусочно-линейное отображение $f: I^n \rightarrow \Delta$, определив его в вершинах триангуляции формулой $f(u) = v_k$, если $u \in A_k$.

Аналогично лемме 9 доказывается, что $f(x) \neq f(-x)$ для любого $x \in \partial I^n$. Согласно предположению для любой точки $x \in (2\mathbb{Z})^n$ существует $k \in \{0, \dots, n\}$ с $St(x) \cap A_k = \emptyset$. Отсюда, а также из определения отображения f вытекает, что $f(I^n) \subset \partial \Delta$, где $\partial \Delta$ обозначает границу симплекса Δ . Таким образом, $g = f|_{\partial I^n}: \partial I^n \rightarrow \partial \Delta$ — гомотопически тривиальное отображение со свойством: $g(x) \neq g(-x)$, $x \in \partial I^n$. Посредством любого гомеоморфизма отождествим $\partial \Delta$ с единичной сферой S^{n-1} евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\|g(x)\| = \|g(-x)\|$ и $g(x) \neq g(-x)$, $x \in \partial I^n$, то $g(x) - tg(-x) \neq 0$ для любых $x \in \partial I^n$ и $t \in [0, 1]$. Тогда формула

$$h(x, t) = \frac{g(x) - tg(-x)}{\|g(x) - tg(-x)\|}$$

определяет гомотопию $h: \partial I^n \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$, связывающую отображение $g = h_0$ с отображением $h_1: \partial I^n \rightarrow S^{n-1}$,

$$h_1(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}, \quad x \in \partial I^n.$$

Легко видеть, что отображение h_1 антиподально, т.е. $h_1(-x) = -h_1(x)$, $x \in \partial I^n$, а значит, h_1 не гомотопически тривиально [3, гл. IV, § 7.10]. Но это противоречит гомотопической тривиальности отображения $h_0 = g = f|_{\partial I^n}$.

ЛЕММА 11. *Если G — счетная бесконечнопорожденная группа, то $\nu(G) \geq r_0(G) + 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $r_0(G) = \aleph_0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вложение $\mathbb{Z}^n \subset G$. По леммам 1 и 9 $\nu(G) \geq \nu(\mathbb{Z}^n) \geq n + 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, откуда $\nu(G) \geq \aleph_0$.

Предположим теперь, что $n = r_0(G)$ конечно. Значит, существует вложение $\mathbb{Z}^n \subset G$. Поскольку G — бесконечнопорожденная группа, то фактор-группа $G/\mathbb{Z}^n$ бесконечна.

Предположим, что $\nu(G) < r_0(G) + 2 = n + 2$, т.е. существует разбиение $G = A_0 \cup \dots \cup A_n$ группы G асимметричными подмножествами. В силу асимметричности подмножеств $A_0, \dots, A_n$ множество

$$C = \bigcup_{\substack{g \in \mathbb{Z}^n, \|g\| \leq 1 \\ 0 \leq k \leq n}} A_k \cap (2g - A_k) \quad (10)$$

конечно. Поскольку фактор-группа $G/\mathbb{Z}^n$ бесконечна, существует такое $g \in G$, что

$$(g + \mathbb{Z}^n) \cap C = \emptyset. \quad (11)$$

По лемме 10 найдется такое $x \in \mathbb{Z}^n$, что $St(x) \cap (A_k - g) \neq \emptyset$ для каждого $k \in \{0, \dots, n\}$. Отсюда следует, что

$$(g + St(x)) \cap A_k \neq \emptyset, \quad k \in \{0, \dots, n\}. \quad (12)$$

Найдем такое $k \in \{0, \dots, n\}$, что $-g - x \in A_k$. Из (10) и (11) следует, что $g + St(x) \cap A_k = \emptyset$. Но это противоречит условию (12).

Следующие далее леммы будут использованы лишь для доказательства теоремы 4.

Семейство подмножеств $\mathcal{U}$ множества X называется *разделительным*, если для любого конечного числа различных элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ найдутся такие попарно непересекающиеся подмножества $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, что $x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$. Пусть τ – бесконечный кардинал и $|X| = 2^\tau$. Отождествим множество X с канторовым кубом $\{0, 1\}^\tau$ и возьмем в качестве $\mathcal{U}$ базу топологии пространства $\{0, 1\}^\tau$ мощности τ . Таким образом, на множестве X существует разделительное семейство мощности τ .

ЛЕММА 12. *Если G – группа, τ – бесконечный кардинал и $|G| \leq 2^\tau$, то $\bar{\nu}(G) \leq \max\{\tau, r_2(G)\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – делимая оболочка группы G . Так как $|G| = |D|$ и $r_2(G) = r_2(D)$, в силу леммы 1 достаточно доказать теорему для делимой группы G . Из теории о строении делимых групп [2, с. 124] вытекает, что группу G можно представить в виде прямой суммы счетных групп. Не умаляя общности, считаем $|G| = 2^\tau$.

Предположим вначале, что группа G не содержит элементов порядка 2 и разложим ее в прямую сумму $\bigoplus_{\alpha \in 2^\tau} G_\alpha$ счетных групп. Для каждого ординала $\alpha \in 2^\tau$ занумеруем элементы подмножества $G_\alpha \setminus \{0\} = \{g_\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Фиксируем разделительную систему $\mathcal{U}$ мощности τ на множестве индексов 2^τ . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $\mathcal{U}_n = \{(U_1, \dots, U_n) \in \mathcal{U}^n \mid U_i \cap U_j = \emptyset \text{ при } i \neq j\}$. Очевидно, что дизъюнктивное объединение $P = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n \times \mathbb{N}^n$ имеет мощность τ . Для каждого $\beta = ((U_1, \dots, U_n), (p_1, \dots, p_n)) \in P$ положим

$$G_\beta = \bigcup_{\alpha_i \in U_i, 1 \leq i \leq n} g_{\alpha_1}^{p_1} + \dots + g_{\alpha_n}^{p_n}.$$

Поскольку семейство $\mathcal{U}$ разделительно, то $\bigcup_{\beta \in P} G_\beta = G \setminus \{0\}$. Абсолютная асимметричность подмножества G_β вытекает из следующего наблюдения. Пусть $g = g_{\alpha_1}^{p_1} + \dots + g_{\alpha_k}^{p_k} + \dots + g_{\alpha_n}^{p_n} \in G_\beta$, $h \in G$ и $\alpha_k \notin \text{supp } h$, где $\text{supp } h$ – множество номеров ненулевых координат элемента h прямой суммы $\bigoplus_{\alpha \in 2^\tau} G_\alpha$. Так как группа G_{α_k} не имеет элементов порядка 2, то $h - g \notin G_\beta$.

Теперь рассмотрим общий случай. Разложим группу G в прямую сумму $G = S_1 \oplus S_2$, где S_2 – максимальная 2-подгруппа группы G . Так как подгруппа S_1 не имеет элементов порядка 2, по доказанному выше $\bar{\nu}(S_1) \leq \tau$. Поскольку $|S_2| = r_2(G) \times \aleph_0$, по лемме 2 $\bar{\nu}(G) \leq \tau \times r_2(G) \times \aleph_0$.

ЛЕММА 13. *Пусть $G = \bigoplus_{\alpha \leq \omega+1} \mathbb{Z}_\alpha$ – прямая сумма групп, изоморфных группе целых чисел $\mathbb{Z}$, ω – первый бесконечный ординал. Для каждого ординала $\alpha \leq \omega + 1$ зафиксируем изоморфизм $f_\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_\alpha$ и каждой паре индексов (α, β) , $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega + 1$, сопоставим элемент $g(\alpha, \beta) = f_\alpha(-2) + f_\beta(2)$ группы G . Подмножество $X = \{g(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha < \beta \leq \omega + 1\}$ содержит бесконечное подмножество, симметричное относительно некоторой точки $g \in G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g = f_0(-1) + f_{\omega+1}(1)$ и рассмотрим подмножество $Y = \{g(n, \omega + 1) \mid 0 < n < \omega\} \subset X$. Заметим, что $2g - g(n, \omega + 1) = f_0(-2) + f_n(2)$. Следовательно, $2g - Y \subset X$ и $Y \cup (2g - Y)$ – искомое подмножество.

ЛЕММА 14. Пусть $G = \bigoplus_{\alpha \leq \omega+1} \mathbb{Z}_\alpha(n)$ – прямая сумма групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}(n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ вычетов по модулю n , n – нечетное число > 1 . Для каждого ординала $\alpha \leq \omega+1$ зафиксируем изоморфизм $f_\alpha: \mathbb{Z}(n) \rightarrow \mathbb{Z}_\alpha(n)$ и каждой паре индексов (α, β) , $0 \leq \alpha < \beta \leq \omega+1$, сопоставим элемент $g(\alpha, \beta) = f_\alpha(1) + f_\beta(n-1)$ группы G . Подмножество $X = \{g(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha < \beta \leq \omega+1\}$ содержит бесконечное подмножество, симметричное относительно некоторой точки $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g = f_0\left(\frac{n+1}{2}\right) + f_{\omega+1}\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

и рассмотрим подмножество $Y = \{g(m, \omega+1) \mid 0 < m < \omega\} \subset X$. Заметим, что $2g - g(m, \omega+1) = f_0(1) + f_m(n-1)$. Значит, $2g - Y \subset X$ и $Y \cup 7(2g - Y)$ – искомое подмножество.

ЛЕММА 15. Если G – группа, τ – бесконечный кардинал и $|G| > 2^\tau$, то $\nu(G) > \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого кардинала $\gamma \leq \tau$ существует асимметрическая раскраска группы G в $\gamma \leq \tau$ цветов. Так как $|G| > 2^\tau$, то $r_0(G) > 2^\tau$ либо $r_p(G) > 2^\tau$ для некоторого простого числа p .

Предположим вначале, что $r_0(G) > 2^\tau$ и рассмотрим подгруппу $\bigoplus_{\alpha < r_0(G)} \mathbb{Z}_\alpha$ группы G . Фиксируем изоморфизмы $f_\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_\alpha$ и каждую пару индексов (α, β) , $0 \leq \alpha < \beta < r_0(G)$, окрасим в цвет элемента $g(\alpha, \beta) = f_\alpha(-1) + f_\beta(1)$. По теореме Эрдеша–Радó [4, гл. IV, § 4] найдется такое подмножество P множества индексов, что $|P| > \tau$ и все двухэлементные подмножества из P одноцветны. Индуцируем на P полное упорядочение из множества индексов. Так как $|P| > \aleph_0$, в P можно выделить подмножество J порядкового типа $\omega+1$. Применяя лемму 13, заключаем, что подгруппа $\bigoplus_{\alpha \in J} \mathbb{Z}_\alpha$ группы G содержит бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно некоторой точки группы.

Допустим, что $r_p(G) > 2^\tau$ для некоторого простого числа p . Так как существует асимметричная раскраска группы G в $\gamma \leq \tau$ цветов, то $p \neq 2$. Выделим подгруппу $\bigoplus_{\alpha < r_p(G)} \mathbb{Z}_\alpha(p)$ группы G , фиксируем изоморфизмы $f_\alpha: \mathbb{Z}(p) \rightarrow \mathbb{Z}_\alpha(p)$ и каждую пару индексов (α, β) , $0 \leq \alpha < \beta < r_p(G)$, окрасим в цвет элемента $g(\alpha, \beta) = f_\alpha(1) + f_\beta(n-1)$. По теореме Эрдеша–Радó найдется такое подмножество P множества индексов, что $|P| > \tau$ и все двухэлементные подмножества из P одноцветны. Индуцируем на P полное упорядочение из множества индексов. Так как $|P| > \aleph_0$, в P найдется подмножество J порядкового типа $\omega+1$. Применяя лемму 14, заключаем, что подгруппа $\bigoplus_{\alpha \in J} \mathbb{Z}_\alpha(p)$ группы G содержит бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно некоторой точки группы.

Итак, как в первом, так и во втором случае существование асимметричной раскраски группы G в $\gamma \leq \tau$ цветов приводит к противоречию.

ЛЕММА 16. Если группа G несчетна, то $\nu(G) \geq \aleph_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное и определим конечное асимметричное раскрашивание группы G . Заметим, что $r_0(G) > \aleph_0$ либо $r_p(G) > \aleph_0$ для некоторого простого числа $p \neq 2$. Поэтому группа G содержит подгруппу, изоморфную $\bigoplus_{\alpha < \omega_1} \mathbb{Z}_\alpha$ либо

$\bigoplus_{\alpha < \omega_1} \mathbb{Z}_\alpha(p)$, где ω_1 – первый несчетный ординал. Далее приходим к противоречию, применяя рассуждения из доказательства леммы 15, с использованием вместо теоремы Эрдеша–Радо следующей теоремы из [5]. Если семейство всех двухэлементных подмножеств вполне упорядоченного множества X типа ω_1 окрашено в конечное число цветов, то найдется подмножество $P \subset X$ порядкового типа $\omega + 1$, все двухэлементные подмножества которого одноцветны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По лемме 7 $\bar{\nu}(G) \leq r_0(G) + 1$. Из леммы 9 и леммы 1 следует, что $\nu(G) \geq r_0(G) + 1$. Так как $\nu(G) \leq \bar{\nu}(G)$, то $\nu(G) = \bar{\nu}(G) = r_0(G) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По лемме 8 $\bar{\nu}(G) \leq r_0(G) + 2$, а по лемме 11 $\nu(G) \geq r_0(G) + 2$. Так как $\nu(G) \leq \bar{\nu}(G)$, то $\nu(G) = \bar{\nu}(G) = r_0(G) + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если $r_0(G) = \aleph_0$, то из теоремы 1 и леммы 1 вытекает, что $\nu(G) \geq \aleph_0$. Если $r_2(G) = \aleph_0$, то, очевидно, $\nu(G) \geq \aleph_0$. Так как $\nu(G) \leq \bar{\nu}(G) \leq |G|$, то $\nu(G) = \bar{\nu}(G) = \aleph_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Неравенство $\bar{\nu}(G) \leq \max\{r_2(G), \log |G|\}$ следует из леммы 12. Неравенство $\nu(G) \geq r_2(G)$ очевидно. Если $\log |G| = \aleph_0$, то по лемме 16 $\nu(G) \geq \log |G|$. Пусть $\log |G| > \aleph_0$, τ – бесконечный кардинал и $2^\tau < |G|$. По лемме 15 $\nu(G) > \tau$; следовательно, $\nu(G) \geq \log |G|$. Значит, $\nu(G) \geq \max\{r_2(G), \log |G|\}$. Так как $\nu(G) \leq \bar{\nu}(G)$, то $\nu(G) = \bar{\nu}(G) = \max\{r_2(G), \log |G|\}$.

Как следует из доказательств теорем 1–4, $\nu(G) = \bar{\nu}(G)$ для любой группы G . Интересно было бы найти прямое доказательство этого равенства.

Отметим также один открытый вопрос в связи с леммой 9. Верно ли, что для любых точек $a_0, \dots, a_n$ из $\mathbb{Z}^n$ в общем положении и любого раскрашивания $\mathbb{Z}^n$ в n цветов найдется бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно одной из точек $a_0, \dots, a_n$? Для $n = 2$ это так.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Протасов И. В. Асимметрично разложимые абелевы группы // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 468–471.
- [2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. I. М.: Мир, 1970.
- [3] Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
- [4] Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [5] Hajnal A., Juhász I., Weiss W. Partitioning the pairs and triples of topological spaces // Topology Appl. 1990. V. 35. P. 177–184.

Львовский государственный университет им. И. Франко
Киевский государственный университет им. Т. Шевченко

Поступило
06.08.96