Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Быковский, Теорема Валена для двумерных подходящих дробей, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 30–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:13:54

УДК 511.36+511.9

ТЕОРЕМА ВАЛЕНА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПОДХОДЯЩИХ ДРОБЕЙ

В. А. Быковский

В статье изучаются некоторые свойства относительных минимумов трехмерных решеток и совместные диофантовы приближения для двух вещественных чисел.

Библиография: 3 названия.

Введение. Пусть $\alpha = [d_0, \dots, d_i, \dots]$ – разложение вещественного α в цепную дробь и

$$\frac{a^{(i)}}{q^{(i)}} = [d_0, \dots, d_{i-1}] \quad (0.1)$$

– подходящая дробь с $\text{НОД}(a^{(i)}, q^{(i)}) = 1$. Существует несколько многомерных обобщений понятия “подходящая дробь”. В работе мы будем изучать одно из самых удачных, предложенное независимо Вороным и Минковским (см. [1]).

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}^t$, q – натуральное число и $a_1, \dots, a_t$ – ближайшие целые к $\alpha_1 q, \dots, \alpha_t q$ соответственно. Назовем выражение $(a_1, \dots, a_t : q)$ *подходящей дробью первого типа* к $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$, если для всех других натуральных $q' < q$ не выполняются одновременно t неравенств

$$\|q'\alpha_1\| \leq \|q\alpha_1\|, \dots, \|q'\alpha_t\| \leq \|q\alpha_t\|,$$

где $\|\alpha\|$ – расстояние от α до ближайшего целого. Целочисленный вектор $(a_1, \dots, a_t)$ назовем *числителем*, а натуральное q *знаменателем*. Обозначим через $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ множество всех знаменателей q , которые однозначно определяют подходящие дроби. Это множество конечно тогда и только тогда, когда $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ – одновременно рациональные числа. При $t = 1$ согласно хорошо известной теореме Лагранжа (см. [2] или [3]) получаем подходящие дроби из (0.1). По теореме Минковского о линейных формах для любого знаменателя $q \in \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ выполняется оценка (см. [3])

$$q\|\alpha_1 q\| \dots \|\alpha_t q\| < 1. \quad (0.2)$$

Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in \mathbb{R}^t$, $(q_1, \dots, q_t) \neq (0, \dots, 0)$ – набор целых чисел и a – ближайшее целое к $\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_t q_t$. Назовем выражение $(a : q_1, \dots, q_t)$ *подходящей дробью второго типа* к $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$, если для всех других целочисленных наборов $(q'_1, \dots, q'_t) \neq (0, \dots, 0)$ с $|q'_i| \leq |q_i|$ ($i = 1, \dots, t$) выполняются неравенства

а) при $(|q_1|, \dots, |q_t|) \neq (|q'_1|, \dots, |q'_t|)$

$$\|q_1 \alpha_1 + \dots + q_t \alpha_t\| < \|q'_1 \alpha_1 + \dots + q'_t \alpha_t\|;$$

б) при $(|q_1|, \dots, |q_t|) = (|q'_1|, \dots, |q'_t|)$

$$\|q_1\alpha_1 + \dots + q_t\alpha_t\| \leq \|q'_1\alpha_1 + \dots + q'_t\alpha_t\|.$$

Число a назовем *числителем*, а вектор $(q_1, \dots, q_t)$ – *знаменателем*. Обозначим через $\Delta^*(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ множество знаменателей для подходящих дробей второго типа. Очевидно, что $\pm(q_1, \dots, q_t)$ входят в $\Delta^*(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ только одновременно и их можно не различать. С этой точки зрения при $t = 1$ $\Delta(\alpha_1) = \Delta^*(\alpha_1)$.

Множество $\Delta^*(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ конечно тогда и только тогда, когда $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ – одновременно рациональные числа. По теореме Минковского о линейных формах для любого знаменателя $(q_1, \dots, q_t) \in \Delta^*(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ выполняется неравенство

$$|q_1 \dots q_t| \|\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_t q_t\| < 1. \quad (0.3)$$

Согласно классической теореме Валена для двух соседних подходящих дробей вида (0.1) справедлива оценка (см. [2] или [3])

$$\min\{q^{(i)}|a^{(i)} - \alpha q^{(i)}|, q^{(i+1)}|a^{(i+1)} - \alpha q^{(i+1)}|\} < \frac{1}{2},$$

которую можно записать в виде

$$\min\{q^{(i)}\|\alpha q^{(i)}\|, q^{(i+1)}\|\alpha q^{(i+1)}\|\} < \frac{1}{2}. \quad (0.4)$$

Главная цель работы – обобщить (0.4) на случай $t = 2$. Мы докажем следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q \in \Delta(\alpha_1, \alpha_2)$ и q' – наименьший знаменатель из $\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$, для которого выполняются неравенства

$$q < q', \quad \|q'\alpha_1\| \leq \|q\alpha_1\|, \quad \|q'\alpha_2\| \leq \|q\alpha_2\|.$$

Тогда

$$\min(q\|\alpha_1 q\| \|\alpha_2 q\|, q'\|\alpha_1 q'\| \|\alpha_2 q'\|) < \frac{1}{2}. \quad (0.5)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(q_1, q_2) \in \Delta^*(\alpha_1, \alpha_2)$. Выберем из всех знаменателей $(q'_1, q'_2) \in \Delta^*(\alpha_1, \alpha_2)$ с

$$|q'_1| \leq |q_1|, \quad |q'_2| \leq |q_2|, \quad \|q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2\| < \|q'_1\alpha_1 + q'_2\alpha_2\|$$

тот, для которого величина $\|q'_1\alpha_1 + q'_2\alpha_2\|$ минимальна. Тогда

$$\min(|q_1 q_2| \|q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2\|, |q'_1 q'_2| \|q'_1\alpha_1 + q'_2\alpha_2\|) < \frac{1}{2}. \quad (0.6)$$

По понятным причинам неравенства (0.5) и (0.6) мы называем теоремой Валена для двумерных подходящих дробей. Как и в каком виде распространяется этот результат на большие размерности – пока открытый вопрос.

На самом деле мы сформулируем и докажем более общее утверждение – теорему Валена для трехмерных полных решеток. Теоремы 1 и 2 получаются из нее как следствия.

1. Относительные минимумы решеток. Пусть $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ – произвольный набор линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^3$ и

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + m_2\gamma^{(2)} + m_3\gamma^{(3)} \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}$$

– полная трехмерная решетка. Согласно [1] узел

$$\gamma \in \Gamma' = \Gamma \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

называют *относительным минимумом* решетки, если параллелепипед

$$\Pi(\gamma) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| \leq |\gamma_1|, |x_2| \leq |\gamma_2|, |x_3| \leq |\gamma_3|\}$$

не содержит узлов $\gamma \in \Gamma'$, отличных от вершин $\Pi(\gamma)$. Множество всех относительных минимумов решетки Γ обозначим через $\mathfrak{M}_\Gamma$. Очевидно, что γ и $-\gamma$ только одновременно входят в $\mathfrak{M}_\Gamma$.

Пусть $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{M}_\Gamma$. Назовем γ' *смежным* с γ по координате j , если выполняются условия:

а) $|\gamma_j| < |\gamma'_j|$ и $|\gamma'_i| \leq |\gamma_i|$ для всех $i \neq j$;

б) не существует $\gamma'' \in \mathfrak{M}_\Gamma$, для которого $|\gamma_j| < |\gamma''_j| < |\gamma'_j|$ и $|\gamma''_i| \leq |\gamma_i|$ для всех $i \neq j$. Множество всех таких γ' обозначим через $\mathfrak{M}_\Gamma^{(j)}(\gamma)$. Вороной в [1] открыл фундаментальную роль понятия “смежности” для построения алгоритма последовательного вычисления относительных минимумов трехмерных полных решеток, отвечающих числовым вещественным кубическим расширениям поля рациональных чисел.

ЛЕММА 1. Пусть γ и γ' – относительные минимумы полной решетки Γ в $\mathbb{R}^3$ и γ' смежен с γ по некоторой координате. Тогда γ и γ' можно дополнить некоторым третьим узлом γ'' до базиса Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть случай $\gamma' \in \mathfrak{M}_\Gamma^{(1)}(\gamma)$. Выберем некоторый базис $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}$ решетки Γ и положим

$$\gamma = m_1\zeta^{(1)} + m_2\zeta^{(2)} + m_3\zeta^{(3)}, \quad \gamma' = n_1\zeta^{(1)} + n_2\zeta^{(2)} + n_3\zeta^{(3)}.$$

Пусть

$$D_{ij} = \det \begin{pmatrix} m_i & m_j \\ n_i & n_j \end{pmatrix} = m_i n_j - m_j n_i.$$

Если мы докажем, что $\text{НОД}(D_{23}, D_{31}, D_{12}) = 1$, то найдутся целые l_1, l_2, l_3 , удовлетворяющие соотношению

$$l_1 D_{23} + l_2 D_{31} + l_3 D_{12} = 1,$$

для которых $\gamma, \gamma', \gamma''$ – базис Γ с

$$\gamma'' = l_1\zeta^{(1)} + l_2\zeta^{(2)} + l_3\zeta^{(3)}.$$

Предположим, что это не так. То есть для некоторого натурального $q \neq 1$

$$D_{23} \equiv D_{31} \equiv D_{12} \equiv 0 \pmod{q}$$

или $m_i n_j - m_j n_i \equiv 0 \pmod{q}$ для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Так как $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{M}_\Gamma$, то

$$\text{НОД}(m_1, m_2, m_3) = \text{НОД}(n_1, n_2, n_3) = 1.$$

Следовательно, найдется номер $i \in \{1, 2, 3\}$, а также целые a и b , одновременно не равные нулю, для которых

$$a \equiv n_i \pmod{q}, \quad b \equiv -m_i \pmod{q}$$

и $-q/2 < a, b \leq q/2$. Поскольку

$$a\gamma + b\gamma' = (am_1 + bn_1)\zeta^{(1)} + (am_2 + bn_2)\zeta^{(2)} + (am_3 + bn_3)\zeta^{(3)}$$

и для $j = 1, 2, 3$

$$am_j + bn_j \equiv n_i m_j - m_i n_j \equiv 0 \pmod{q},$$

то вектор $\tilde{\gamma} = (a\gamma + b\gamma')/q$ – узел из Γ' . При этом для $j = 1, 2, 3$

$$|\tilde{\gamma}_j| \leq \frac{1}{2}|\gamma_j| + \frac{1}{2}|\gamma'_j|. \quad (1.1)$$

Отсюда следует, что $|\tilde{\gamma}_1| < |\gamma'_1|$ и

$$|\tilde{\gamma}_2| \leq |\gamma_2|, \quad |\tilde{\gamma}_3| \leq |\gamma_3|. \quad (1.2)$$

Так как $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{M}_\Gamma$ с $\Pi(\gamma) \neq \Pi(\gamma')$ и $|\gamma_1| < |\gamma'_1|$, выполняется хотя бы одно из неравенств: $|\gamma'_2| < |\gamma_2|$, $|\gamma'_3| < |\gamma_3|$. Поэтому из (1.1) следует, что, по крайней мере, одно из неравенств (1.2) можно заменить строгим. Но тогда любой относительный минимум решетки Γ из $\Pi(\tilde{\gamma})$ нарушает условие б) в определении смежности γ' с γ , и мы пришли к противоречию. Лемма 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта лемма сформулирована в работе [1], и ее доказательство опущено. При этом Вороной отметил, что ситуация аналогична подробно разобранным им двумерному случаю. Поэтому для удобства читателя мы привели здесь доказательство леммы 1.

Пусть $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ – любая перестановка чисел $(1, 2, 3)$ и $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – произвольный набор вещественных чисел, отличных от нуля. Определим отображение $F_\Lambda^{(\sigma)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ по правилу

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\lambda_1 x_{\sigma(1)}, \lambda_2 x_{\sigma(2)}, \lambda_3 x_{\sigma(3)}),$$

которое преобразует решетку Γ в решетку $\tilde{\Gamma} = F_\Lambda^{(\sigma)}(\Gamma)$. Из определения непосредственно вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть Γ – произвольная решетка в $\mathbb{R}^3$. Тогда:

- 1) $F_\Lambda^{(\sigma)}(\mathfrak{M}_\Gamma) = \mathfrak{M}_{\tilde{\Gamma}}$;
- 2) $F_\Lambda^{(\sigma)}(\mathfrak{M}_\Gamma^{(j)}(\gamma)) = \mathfrak{M}_{\tilde{\Gamma}}^{(\sigma(j))}(\tilde{\gamma})$, $\tilde{\gamma} = F_\Lambda^{(\sigma)}(\gamma)$;
- 3) $|\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3| = |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3| |\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3|$.

2. Теорема Валена для полных трехмерных решеток. Главная цель этого раздела – доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – полная трехмерная решетка в $\mathbb{R}^3$ и γ' – смежный по некоторой координате относительный минимум с $\gamma \in \mathfrak{M}_\Gamma$. Тогда

$$\min\{|\gamma_1\gamma_2\gamma_3|, |\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3|\} < \frac{1}{2}d(\Gamma), \quad (2.1)$$

где $d(\Gamma) > 0$ – определитель Γ .

Если хотя бы одна из координат γ или γ' равна нулю, то оценка (2.1) тривиальным образом верна. Поэтому мы будем считать далее, что $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3 \neq 0$. В силу леммы 2 достаточно рассмотреть случай, когда

$$\gamma = (1, 1, 1), \quad \gamma' = (\lambda, \mu, \sigma) \quad (2.2)$$

с $1 < \lambda < \infty$, $0 < |\mu|$, $|\sigma| \leq 1$, $|\mu| + |\sigma| \neq 2$.

ЛЕММА 3. Пусть $(\lambda, \mu, \sigma) \in \mathfrak{M}_\Gamma^{(1)}(1, 1, 1)$. Тогда хотя бы одно из чисел μ , σ отрицательно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq \mu$, $\sigma \leq 1$. Рассмотрим узел

$$\gamma'' = (\lambda, \mu, \sigma) - (1, 1, 1) = (\lambda - 1, \mu - 1, \sigma - 1).$$

Так как $(1, 1, 1) \in \mathfrak{M}_\Gamma$, то $1 < \lambda - 1$. Но тогда любой относительный минимум из $\Pi(\gamma'')$ нарушает условие б) смежности (λ, μ, σ) с $(1, 1, 1)$, и мы пришли к противоречию. Лемма 3 доказана.

С учетом этого результата мы далее можем считать, что $(\lambda, -\mu, \sigma) \in \mathfrak{M}_\Gamma^{(1)}(1, 1, 1)$, где

$$1 < \lambda < \infty, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad 0 < |\sigma| \leq 1, \mu + |\sigma| \neq 2. \quad (2.3)$$

Из леммы 1 следует, что γ и γ' всегда можно дополнить до базиса Γ третьим узлом $\gamma'' = (\theta, \xi, \eta)$. При этом для любых целых m и n

$$\gamma, \gamma', \pm(\gamma'' + m\gamma + n\gamma')$$

– также базис Γ . Поскольку сдвиги множества

$$\left\{ \alpha(1, 1) + \beta(\lambda, -\mu) \mid -\frac{1}{2} < \alpha, \beta \leq \frac{1}{2} \right\}$$

на узлы двумерной решетки

$$\{m(1, 1) + n(\lambda, -\mu) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

покрывают всю плоскость $\mathbb{R}^2$, мы всегда можем выбрать узел $\gamma'' = (\theta, \xi, \eta)$ таким, что $|\theta| < \lambda$, $|\xi| \leq 1$.

Можно предполагать, что η – неотрицательное и наименьшее из возможных. В этом случае назовем тройку

$$\gamma = (1, 1, 1), \quad \gamma' = (\lambda, -\mu, \sigma), \quad \gamma'' = (\theta, \xi, \eta) \quad (2.4)$$

приведенным базисом Γ . Заметим, что

$$d(\Gamma) = \pm \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \theta \\ 1 & -\mu & \xi \\ 1 & \sigma & \eta \end{pmatrix} = |\eta(\lambda + \mu) - \theta(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma)|. \quad (2.5)$$

Поскольку неравенство $0 \leq \eta < 1$ нарушает условия

$$(1, 1, 1) \in \mathfrak{M}_{\Gamma}^{(1)}, \quad (\lambda, -\mu, \sigma) \in \mathfrak{M}_{\Gamma}(1, 1, 1),$$

то всегда

$$1 \leq \eta < \infty, \quad |\theta| < \lambda, \quad |\xi| \leq 1. \quad (2.6)$$

Так как η выбирается минимальным, то по причине наличия узлов

$$(\theta, \xi, \eta) - (1, 1, 1) = (\theta - 1, \xi - 1, \eta - 1), \quad (2.7)$$

$$(\theta, \xi, \eta) + (\lambda, -\mu, \sigma) = (\lambda + \theta, -\mu + \xi, \sigma + \eta), \quad (2.8)$$

$$(\theta, \xi, \eta) - (\lambda, -\mu, \sigma) = (-\lambda + \theta, \mu + \xi, -\sigma + \eta), \quad (2.9)$$

$$(\theta, \xi, \eta) - (1, 1, 1) - (\lambda, -\mu, \sigma) = (-1 - \lambda + \theta, -1 + \mu + \xi, -1 - \sigma + \eta), \quad (2.10)$$

$$(\theta, \xi, \eta) - (1, 1, 1) + (\lambda, -\mu, \sigma) = (-1 + \lambda + \theta, -1 - \mu + \xi, -1 + \sigma + \eta), \quad (2.11)$$

и получаем дополнительную к (2.6) серию ограничений: в соответствии с (2.7) и (2.8) для $-1 \leq \sigma < 0$

$$-1 \leq \xi < 0; \quad (2.12)$$

в соответствии с (2.7) и (2.9) для $0 < \sigma \leq 1$

$$-\lambda < \theta < 0; \quad (2.13)$$

в соответствии с (2.8) для $-1 \leq \sigma < 0$ и $-\lambda < \theta < 0$

$$1 < \mu - \xi; \quad (2.14)$$

в соответствии с (2.7) для $0 < \sigma \leq 1$ и $0 \leq \xi \leq 1$

$$-\lambda < \theta \leq 1 - \lambda; \quad (2.15)$$

в соответствии с (2.10) для $-1 < \sigma < 0$

$$\mu + \xi < 0 \quad \text{или} \quad \theta \leq 1; \quad (2.16)$$

в соответствии с (2.11) для $0 < \sigma < 1$

$$\xi < \mu. \quad (2.17)$$

Мы докажем для приведенных базисов вида (2.4) решетки Γ оценку

$$\min(1, |\lambda\mu\sigma|) < \frac{1}{2}d(\Gamma). \quad (2.18)$$

Теорема, сформулированная в начале раздела, непосредственно следует отсюда с помощью леммы 2. Для $2 < d(\Gamma) < \infty$ оценка (2.18) выполняется автоматически. Поэтому мы будем рассматривать только случай $0 < d(\Gamma) \leq 2$ и докажем неравенство (см. (2.5))

$$2|\lambda\mu\sigma| < \eta(\lambda + \mu) - \theta(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma) = d(\Gamma). \quad (2.19)$$

(I) Пусть $-1 \leq \sigma < 0$. В соответствии с (2.12) всегда $-1 \leq \xi < 0$.

1. Случай $-\lambda < \theta \leq 0$ и $\sigma + \mu \geq 0$. Тогда

$$\eta(\lambda + \mu) - \theta(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma) > \lambda + \mu > 2\sqrt{\lambda\mu} \geq 2\lambda\mu \geq 2|\lambda\mu\sigma|.$$

2. Случай $-\lambda < \theta \leq 0$ и $\sigma + \mu < 0$. С помощью (2.14) находим

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu) - \theta(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma) &> \lambda + \mu + \lambda(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma) \\ &= \lambda + \mu + \lambda\sigma + \lambda(\mu - \xi) + \xi\sigma \geq \lambda + \mu - \lambda + \lambda = \lambda + \mu \geq 2|\lambda\mu\sigma|. \end{aligned}$$

3. Случай $0 < \theta < \lambda$ и $\sigma + \mu \leq 0$ очевиден.

4. Случай $0 < \theta < \lambda$ и $\sigma + \mu > 0$. Если $\theta \leq \eta$, то

$$\eta(\lambda + \mu) - \theta(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma) \geq \eta(\lambda + \mu) - \eta(\sigma + \mu) = \eta(\lambda - \sigma) > 2|\lambda\mu\sigma|.$$

Для $1 \leq \eta < \theta < \lambda$ с помощью (2.16) находим

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu) - \theta(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma) &> \lambda + \mu - \lambda(\sigma + \mu) + \mu(\lambda - \sigma) \\ &= \lambda + \mu - \sigma(\lambda + \mu) > \lambda + \mu > 2|\lambda\mu\sigma|. \end{aligned}$$

5. Случай $0 < \theta < \lambda$ и $\sigma + \mu < 0$ очевиден.

(II) Пусть $0 < \sigma \leq 1$. В соответствии с (2.13) всегда $-\lambda < \theta < 0$.

1. Случай $\xi \leq 0$ очевиден.

2. Случай $\xi > 0$.

В соответствии с (2.15) $\lambda + \theta \leq 1$. Для $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu) - \theta(1 + \mu) - \xi(\lambda - 1) &= \eta(\lambda + \mu) - (-1 + \lambda + \theta)(1 + \mu) \\ &\quad - (-1 + \mu - \xi)(\lambda - 1) \geq \lambda + \mu > 2\lambda\mu\sigma. \end{aligned}$$

Для $0 < \sigma < 1$ воспользуемся еще и оценкой $\xi < \mu$ из (2.17). Тогда

$$\begin{aligned} \eta(\lambda + \mu) - \theta(\sigma + \mu) - \xi(\lambda - \sigma) &> \lambda + \mu - \theta\sigma - \theta\mu - \mu\lambda + \mu\sigma \\ &\geq \lambda + \mu - \mu(\theta + \lambda) + \mu\sigma \geq \lambda + \mu\sigma > 2\lambda\mu\sigma. \end{aligned}$$

Итак, оценка (2.19), а вместе с ней и теорема доказаны.

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Нетрудно проверить, что для

$$\Gamma = \{m_1(1, 1, 1) + m_2(1 + \varepsilon, -1 + \varepsilon, 1) + m_3(-\varepsilon, 0, 1 + \varepsilon) \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}$$

$(1, 1, 1)$ — относительный минимум и $(1 + \varepsilon, -1 + \varepsilon, 1) \in \mathfrak{M}_\Gamma^{(1)}(1, 1, 1)$. Кроме того, $d(\Gamma) = 2 + \varepsilon(4 - \varepsilon)$. Отсюда следует, что коэффициент $1/2$ в правой части (2.1) нельзя заменить меньшим числом.

Отметим, что двумерный аналог теоремы с оценкой

$$\min\{|\gamma'_1\gamma'_2|, |\gamma_1\gamma_2|\} < \frac{1}{2}d(\Gamma)$$

для смежных относительных минимумов (γ_1, γ_2) и (γ'_1, γ'_2) двумерной полной решетки Γ непосредственно следует из результатов работы [1].

3. Теорема Валена для подходящих дробей. Пусть (α_1, α_2) – пара вещественных чисел. Определим решетку

$$\Gamma = \{m(1, 0, 0) + n(0, 1, 0) + q(-\alpha_1, -\alpha_2, 1) \mid m, n, q \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.1)$$

Рассмотрев смежные относительные минимумы Γ по третьей координате, из (2.1) получим теорему 1, поскольку $d(\Gamma) = 1$ и элементы (3.1) имеют вид

$$(m - q\alpha_1, n - q\alpha_2, q).$$

Определим еще одну решетку

$$\Gamma^* = \{q_1(1, 0, -\alpha_1) + q_2(0, 1, -\alpha_2) + m(0, 0, 1) \mid q_1, q_2, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.2)$$

Теорема 2 получается из (2.1) для смежных относительных минимумов по третьей координате, поскольку и в этом случае $d(\Gamma^*) = 1$.

Следует отметить, что можно доказать еще один вариант теорем 1 и 2, если для (3.1) и (3.2) рассматривать смежные относительные минимумы по координатам, отличным от третьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // Собрание сочинений. Т. 1. Киев, 1952. С. 197–391.
- [2] Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.: ОНТИ, 1937.
- [3] Кассельс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.

Хабаровское отделение
Института прикладной математики ДВО РАН
E-mail: vab@iam.khabarovsk.su

Поступило
10.08.98