Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Клепцын, Б. А. Рабинович, Аналитическая классификация фуксовых особых точек, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 372–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:39:35

УДК 517.925.71

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ФУКСОВЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

В. А. Клепцын, Б. А. Рабинович

В работе исследуется задача локальной аналитической классификации фуксовых особых точек. Хорошо известны вид резонансной формальной нормальной формы (ФНФ) системы с фуксовой особой точкой и утверждение о локальной аналитической эквивалентности системы своей резонансной ФНФ. Однако некоторые различные резонансные ФНФ могут быть локально аналитически эквивалентны друг другу. Основной результат работы – теорема, сводящая вопрос о локальной аналитической эквивалентности резонансных ФНФ к вопросу о сопряженности некоторых построенных по этим ФНФ матриц (оказывающихся нильтреугольными) блочноверхнетреугольной матрицей. Как следствие, проблема локальной аналитической классификации фуксовых особых точек сводится к исследованию орбит действия группы блочноверхнетреугольных матриц на нильтреугольных сопряжениях.

Библиография: 13 названий.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим систему с фуксовой особой точкой (здесь и далее мы считаем особой точкой точку $t = 0$)

$$\dot{z} = \frac{A(t)}{t} z, \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad t \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где матрица $A(t)$ голоморфна в некоторой окрестности нуля.

По определению (см. работу В.И. Арнольда и Ю.С. Ильяшенко [1]) две линейных системы локально аналитически (или голоморфно) эквивалентны, если одна из них переводится в другую линейной по неизвестному заменой $z = H(t)w$, где матрица $H(t)$ голоморфна вместе со своей обратной в некоторой окрестности особой точки.

Задача, исследованию которой посвящена статья – получение аналитической классификации фуксовых особых точек и исследование связанного с этим вопроса: проблемы локальной аналитической эквивалентности фуксовых систем.

В работах А.Х.М. Левеля [2], Ф.Р. Гантмахера [3], Ю.С. Ильяшенко [4] описана резонансная формальная нормальная форма фуксовой системы и доказана аналитическая

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00482, № 02-01-22002, фонда CRDF, грант RM1-2358-MO-02, и программы PICS “Singularities of differential equations, integrable systems and quantum groups” (CNRS).

эквивалентность системы ее резонансной формальной нормальной форме (ФНФ). Тем самым достаточно исследовать вопрос о сопряженности и задачу классификации для систем, приведенных к резонансным ФНФ.

Основной результат статьи, сформулированный ниже (теорема 1), сводит рассматриваемые задачи к чисто алгебраическим, а именно, к вопросу о сопряженности некоторых матриц, построенных по системе, матрицей специального блочного вида, и к классификации орбит этого действия – точную формулировку см. в п. 1.5.

Идеи, ведущие к этому результату, присутствуют в работах А. А. Болибруха [5], Ф. Р. Гантмахера [3], Д. В. Аносова и А. А. Болибруха [6]. Однако нам не удалось найти источника, где вопрос ставился бы именно в таком контексте (эквивалентности двух нормальных форм); в то же время, получающийся ответ оказывается простым и, как нам кажется, довольно красивым. Поэтому, понимая, что как технически, так и идейно теорема 1 не представляет сложности, мы, тем не менее, считаем ее одним из двух основных результатов настоящей работы.

Вторым основным результатом работы является пример, показывающий, что начиная с размерности 6 в задаче классификации фуксовых особых точек возникают модули. Именно, появляются семейства классов эквивалентности, зависящие от вещественного параметра. Точную формулировку см. в п. 1.5 (следствие 2).

Существование примера такого рода в алгебраической версии задачи следует из работы В. В. Кашина [7]. В разделе 5 такой пример строится явно.

1.2. Структура статьи. Статья устроена следующим образом: в п. 1.3 описан вид резонансной ФНФ системы с фуксовой особой точкой. В п. 1.4 вводятся обозначения, определяются использующиеся далее термины и делаются простейшие замечания о рассматриваемой задаче. В п. 1.5 формулируются основные результаты работы. В п. 1.6 суммируются два подхода, ведущие к получению резонансной ФНФ: с точки зрения теоремы Пуанкаре–Дюлака и с точки зрения фундаментальной матрицы решений.

В разделе 2 исследуется вид матрицы, сопрягающей две системы, приведенные к резонансной ФНФ. В разделе 3 доказаны сформулированные во введении утверждения – основной результат (теорема 1) и следствие 1. В разделе 4 мы приводим уже известные результаты, касающиеся классификации орбит действия групп верхнетреугольных и унитреугольных матриц на нильтреугольных сопряжениями – в наших терминах, случай вполне резонансной системы без кратных собственных значений. В разделе 5 приведены примеры, в которых естественные инварианты – набор собственных значений и жорданова нормальная форма оператора монодромии – совпадают, а сами системы, тем не менее, не сопряжены; более того, оказывается, что дополнительный инвариант в одном из примеров может принимать континуум различных значений.

1.3. Вид резонансной формальной нормальной формы. Для описания резонансной нормальной формы системы (1) разложим фазовое пространство $\mathbb{C}^n$ в прямую сумму корневых для $A(0)$ подпространств. При блочном разбиении, соответствующем этому разложению в прямую сумму (с некоторым специальным порядком блоков – см.

ниже), матрица резонансной нормальной формы принимает вид

$$\dot{z} = \frac{B(t)}{t}z, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}(t) & \dots & B_{1s}(t) \\ 0 & B_{22} & \dots & B_{2s}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_{ss} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$B_{ij}(t) = B_{ij}^0 t^{\lambda_i - \lambda_j}, \quad B_{ij}^0 \equiv \text{const}.$$

У матрицы B_{ii} есть единственное собственное значение λ_i , все λ_i различны. Кроме того, $B_{ij}^0 \neq 0$, только если $\lambda_i - \lambda_j$ – натуральное число или $i = j$. При этом блоки упорядочены так, что если $\lambda_i - \lambda_j$ – натуральное число, то $i < j$. Наконец, все матрицы B_{ii} приведены к жордановой нормальной форме.

Назовем блочное разбиение, возникающее из разбиения $\mathbb{C}^n$ в прямую сумму корневых для $A(0)$ подпространств, *корневым разбиением*. Объединим в нем блоки, для которых λ_i отличаются на целые числа. Мы получили более крупное блочное разбиение, которое будем называть *резонансным*. Далее, говоря о корневом разбиении, мы будем считать порядок блоков следующим: резонансные блоки упорядочены произвольным, но одним и тем же для всех систем с данным набором собственных значений способом. Внутри каждого резонансного блока корневые блоки упорядочены по убыванию вещественной части собственного значения.

Из предыдущего описания следует, что матрица резонансной ФНФ блочнодиагональна в смысле резонансного и блочноверхнетреугольна в смысле корневого разбиений, причем каждый ее резонансный блок имеет вид (2). Это и есть окончательное описание резонансной ФНФ.

В книге Гантмахера [3] приведена ФНФ, отличающаяся от описанной дополнительными упрощениями. Впрочем, поскольку для наших целей достаточно вида (2), мы эти упрощения выполнять не будем.

1.4. Простейшие замечания. Обозначения. Будем называть форму, описанную в предыдущем пункте, *предварительной нормальной формой*. Несложно видеть, что при голоморфной замене матрица $A(0)$ просто сопрягается матрицей $H(0)$. Собственные значения λ_i матрицы-вычета $A(0)$, являющиеся инвариантами аналитического сопряжения, называются *собственными значениями системы*.

По определению система называется *вполне резонансной*, если все ее собственные значения различаются на целые числа. Из вида предварительной нормальной формы (2) следует, что каждая система с фуксовой особой точкой локально аналитически эквивалентна прямой сумме вполне резонансных. Несмотря на это, пока что мы не можем ограничиться рассмотрением только их: ниоткуда не следует, что сопряжение двух прямых сумм тоже есть прямая сумма сопряжений, а, значит, прямые суммы неэквивалентных вполне резонансных подсистем могут оказаться эквивалентны. Впрочем, для случая, когда резонансов нет, т.е. когда любые два собственных значения не отличаются на целое число, отсюда следует известное (см. работу Э.А. Коддингтона и Н. Левинсона [8]) утверждение: нерезонансная система локально аналитически эквивалентна системе

$$\dot{z} = \frac{A(0)}{t}z,$$

и, следовательно, сопряженность матриц $A(0)$ является критерием для сопряженности систем.

Кроме набора собственных значений, у системы есть еще один естественный инвариант – оператор монодромии, рассматриваемый с точностью до сопряжения. Однако, как будет показано ниже, эта система инвариантов далеко не полна.

Будем говорить, что матрица M *блочнOVERХнетреугольная правильной структуры*, если она блочнодиагональна в смысле резонансного и блочноверхнетреугольна в смысле корневого разбиений. Поскольку далее эти разбиения будут совпадать для всех рассматриваемых систем (в силу совпадения наборов собственных значений), мы будем говорить о правильной структуре матрицы, не уточняя, относительно какой именно из матриц-вычетов эта структура рассматривается.

Обозначим $\hat{B}(t) = B(t) - \text{diag}(B)$ для матрицы $B(t)$ системы в предварительной нормальной форме (здесь $\text{diag}(B)$ – диагональная матрица, на диагонали совпадающая с B), и назовем $\hat{B}(1)$ *характеристической матрицей системы* (2). Кроме того, обозначим через m_j кратность собственного значения λ_j , и пусть $k_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$. При этом выполнено $k_{ij} + k_{jl} = k_{il}$ при всех i, j, l .

1.5. Формулировка основных результатов.

ТЕОРЕМА 1 (основной результат). *Две системы, приведенные к предварительной нормальной форме (2), голоморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда у них одинаковые наборы собственных значений и их характеристические матрицы сопряжены некоторой блочноверхнетреугольной матрицей правильной структуры.*

В частности, эта теорема утверждает, что после приведения систем к предварительной нормальной форме вопрос об их эквивалентности можно заменить вопросом о поблочной эквивалентности – об эквивалентности вполне резонансных подсистем. Тем самым, задача о классификации предварительных нормальных форм фуксовых систем сводится к задаче о классификации блочноверхнетреугольных матриц с нильтреугольными блоками-матрицами специального вида (нильпотентная жорданова нормальная форма) по диагонали под действием сопряжения блочноверхнетреугольными матрицами.

Для случая, когда среди собственных значений матрицы $B(0)$ нет кратных (все блоки размера 1), эта теорема была доказана в работе Б. А. Рабиновича [9].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Проблема локальной аналитической эквивалентности двух систем с фуксовыми особыми точками алгебраически разрешима.*

Алгебраическая версия нашей задачи – классификация орбит действия блочноверхнетреугольных матриц на блочнонильтреугольных сопряжениями – давно известна и хорошо исследована. Далее мы приведем некоторые известные результаты для наиболее простого нетривиального случая – когда среди собственных значений систем нет кратных (при этом собственные значения системы могут отличаться на целое число, но не совпадать). Используя эти результаты, мы покажем, что число классов сопряженности систем достаточно большой размерности с данным набором собственных значений для некоторых наборов оказывается бесконечным.

СЛЕДСТВИЕ 2 (основной результат № 2). *Начиная с размерности 6, для некоторых наборов собственных значений (а именно, для тех, среди которых по меньшей мере 6 отличающихся на целые числа, но при этом попарно различных) число классов голоморфной сопряженности систем с фуксовой особой точкой бесконечно.*

1.6. Другое описание предварительной нормальной формы. Эквивалентность всякой системы (1) некоторой системе вида (2) может быть получена двумя способами. Первый из них (см. работы [3], [4]) – линейная версия теоремы Пуанкаре–Дюлака, применяемая к системе

$$\begin{cases} \dot{z} = B(t)z, \\ \dot{t} = t. \end{cases}$$

При этом резонансами оказываются соотношения $\lambda_i = \lambda_j + k \cdot 1$; здесь 1 – собственное значение, соответствующее оси t . В результате получается формальная эквивалентность двух систем, после чего доказывается сходимости ряда для сопрягающего отображения. Этот способ прямо приводит к матрице системы вида (2).

Предварительная нормальная форма может быть также получена (см. работу Левеля [2]), исходя из фундаментальной матрицы решений. Приведем здесь (слегка видоизмененное) рассуждение из [2], доказывающее это. Согласно теореме Левеля (см. [2], а также изложение в книге Болибруха [5, теорема 1, с. 47]), в окрестности фуксовой особой точки 0 найдется ФМР, соответствующая некоторому базису в пространстве решений, имеющая вид

$$Z(t) = U(t)t^N t^E.$$

Здесь матрица $U(t)$ голоморфно обратима в окрестности особой точки. Матрица E верхнетреугольная, имеющая блочнодиагональный (в смысле некоторого разбиения; см. ниже) вид, причем в каждом блоке у E есть только одно собственное значение ρ_k и выполнено $\operatorname{Re} \rho_k \in [0, 1)$. Наконец, N – диагональная матрица, по диагонали которой стоят целые числа (нормирования), невозрастающие в каждом блоке матрицы E .

Сделаем замену, выбрав в качестве матрицы замены $H(t)$ как раз матрицу $U(t)$. После замены получаем ФМР в виде

$$W(t) = t^N t^E. \quad (3)$$

Тогда матрица системы равна

$$\frac{B(t)}{t} = \dot{W}W^{-1} = \frac{N + t^N E t^{-N}}{t}.$$

Как легко видеть, эта матрица имеет вид (2), где корневое блочное разбиение получено объединением блочного разбиения матрицы E с блочным разбиением матрицы N на скалярные блоки. Собственные значения $B(0)$ – суммы нормирований и соответствующих им собственных значений матрицы E . При этом получаем, что вышеупомянутое блочное разбиение матрицы E (в котором она блочнодиагональна) – это и есть резонансное разбиение.

Обратно, как показано в работе Ильяшенко [4], для системы вида (2) ФМР имеет вид (3).

В дальнейшем для доказательства всех утверждений работы мы будем использовать именно подход с точки зрения ФМР, хотя стоит отметить, что именно подход с точки зрения теоремы Пуанкаре–Дюлака позволяет алгоритмизовать процедуру приведения к предварительной нормальной форме.

2. Вид матрицы сопрягающей замены

Вопросы, связанные с утверждениями этого раздела, обсуждались в работах Аносова и Болибруха [6], Болибруха [5], [10], Гантмахера [3]. Однако, поскольку нам не удалось найти ссылку, где рассматривается вопрос именно в этой его постановке, для полноты изложения мы приводим следующие утверждения вместе с их доказательствами.

ЛЕММА 1. Пусть голоморфно обратимая в проколотой окрестности 0 и мероморфная в 0 матрица $H(t)$ сопрягает две системы вида (2) с одинаковыми наборами собственных значений (с учетом кратности). Тогда при корневом разбиении $H(t) = (H_{ij}(t))$ получаем

$$H_{ij}(t) = H_{ij}^0 t^{k_{ij}}, \quad H_{ij}^0 \equiv \text{const}, \quad (4)$$

причем $H_{ij}^0 \neq 0$, только если $k_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $H(t)$ сопрягает две системы тогда и только тогда, когда она переводит ФМР одной системы в (некоторую) ФМР другой. Две ФМР одной и той же системы отличаются умножением на постоянную матрицу, поэтому $H(t)$ сопрягает две системы в нормальной форме Левеля с ФМР $t^N t^E$ и $t^{N'} t^{E'}$ тогда и только тогда, когда

$$\exists V: \quad H(t) t^N t^E = t^{N'} t^{E'} V.$$

Тогда

$$t^{-N'} H(t) t^N = t^{E'} V t^{-E}. \quad (5)$$

Заметим, что элементы $t^{E'}$ – линейные комбинации $t^{\rho'_\alpha} \ln^k t$, где ρ'_α – собственные значения E' , а $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; элементы t^{-E} – линейные комбинации $t^{-\rho_\alpha} \ln^k t$, где ρ_α – собственные значения E . Отсюда элементы матрицы, стоящей в правой части (5), есть линейные комбинации $t^\rho \ln^k t$, где ρ представляется в виде разности собственных значений E' и E . Поскольку вещественные части собственных значений E и E' лежат на $[0, 1)$, имеем $\text{Re } \rho \in (-1, 1)$.

Матрица же в левой части (5) однозначна, поэтому в правой части допустимы лишь $t^\rho \ln^k t$ с $\rho \in \mathbb{Z}, k = 0$. Отсюда $(\text{Re } \rho \in (-1, 1) \Rightarrow \rho = 0)$ матрица в правой части должна быть постоянной. Обозначим ее через $\tilde{V}$.

Поскольку наборы собственных значений одинаковы, имеем $N = N', \text{diag}(E) = \text{diag}(E')$. Кроме того, в резонансном разбиении блок (α, β) правой части (5) имеет вид $t^{\rho_\alpha - \rho_\beta} P(\ln t)$, где P – матричнозначный полином. Из-за однозначности $P \equiv 0$ при $\alpha \neq \beta$ (поскольку в этом случае $\rho_\alpha - \rho_\beta \notin \mathbb{Z}$). Отсюда матрица $\tilde{V}$ блочнодиагональна в смысле резонансного разбиения.

Из формулы (5) имеем

$$H(t) = t^N \tilde{V} t^{-N}, \quad (6)$$

что означает для блоков (в смысле корневого разбиения) H_{ij}

$$H_{ij}(t) = t^{n_i} \tilde{V}_{ij} t^{-n_j} = t^{n_i - n_j} \tilde{V}_{ij} = t^{\lambda_i - \lambda_j} \tilde{V}_{ij},$$

поскольку внутри одного вполне резонансного блока разность нормирований равна разности соответствующих собственных значений $B(0)$, а матрица $\tilde{V}$ блочно-диагональна в смысле разбиения на вполне резонансные подсистемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подставив в формулу для $\tilde{V}$ (правую часть уравнения (5)) значение $t = 1$, получаем $\tilde{V} = V$, так как $1^M = I$ для любой матрицы M . (Эта подстановка законна, так как равенство (5) есть равенство матриц с элементами – рациональными функциями, и потому из его выполнения в малой окрестности 0 следует его выполнение при всех t).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть голоморфно обратимая в окрестности 0 матрица $H(t)$ сопрягает две системы вида (2). Тогда при блочном разбиении $H(t) = (H_{ij}(t))$ получаем

$$H_{ij}(t) = \begin{cases} H_{ij}^0 t^{k_{ij}}, & \lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{N} \cup \{0\}; \end{cases} \quad (7)$$

в частности, при всех t матрица $H(t)$ блочноверхнетреугольная правильной структуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если голоморфно обратимая матрица сопрягает две системы вида (2), то их матрицы-вычеты в 0 сопряжены. Поэтому они обладают одинаковыми наборами собственных значений (с учетом кратности) – применима предыдущая лемма. Осталось показать, что при $\lambda_i - \lambda_j = k_{ij} \in (-\mathbb{N})$ имеем $H_{ij}^0 = 0$: если это не так, то в силу формулы (4) матрица $H(t)$ не будет голоморфна в окрестности 0. Отсюда $H(t)$ – блочноверхнетреугольная матрица требуемого вида.

Следующее утверждение позволяет свести вопрос о сопряженности произвольных систем к сопряженности вполне резонансных.

СЛЕДСТВИЕ 4. При наличии собственных значений, отличающихся на нецелые числа, сопряжение происходит поблочно между вполне резонансными блоками-системами.

3. Доказательство основного результата и следствия 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из формулы (6) и замечания 1 матрица замены имеет вид $H(t) = t^N V t^{-N}$. Подставив это в (5), получаем, что две системы в предварительной нормальной форме сопряжены такой заменой тогда и только тогда, когда

$$\forall t \quad V = t^{E'} V t^{-E}.$$

Это равносильно тому, что

$$\forall t \quad V t^E V^{-1} = t^{E'} \iff \forall t \quad t^V E V^{-1} = t^{E'} \iff \forall t \quad V E V^{-1} = E'.$$

Отсюда

$$VE = E'V.$$

В резонансном разбиении матрицы V и $\text{diag}(E) = \text{diag}(E')$ блочнодиагональны, причем блоки $\text{diag}(E)$ – скалярные матрицы. Значит, $V \text{diag}(E) = \text{diag}(E')V$. Следовательно, эквивалентным условием сопряженности является

$$V(E - \text{diag}(E)) = (E' - \text{diag}(E'))V.$$

Но

$$E - \text{diag}(E) = E + N - \text{diag}(E + N) = B(1) - \text{diag}(B(1)) = \hat{B}(1)$$

и, аналогично,

$$E' - \text{diag}(E') = \hat{C}(1).$$

Кроме того, $V = H(1)$, так как $H(t) = t^N V t^{-N}$. Тем самым мы получили эквивалентное условие сопряженности в виде

$$\hat{B}(1)H(1) = H(1)\hat{C}(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Поскольку предварительная нормальная форма – это формальная нормальная форма Пуанкаре–Дюлака с конечным числом резонансов (вида $\lambda_i = \lambda_j + k$, $k \in \mathbb{N}$), ее нахождение – алгебраически разрешимая задача (см. [3], где соответствующая процедура проведена явно).

В силу теоремы 1 задача сведена к вопросу о сопряженности двух матриц – $\hat{B}(1)$ и $\hat{C}(1)$ – матрицей некоторой блочной структуры.

Уравнение сопряженности ($\hat{B}(1)M = M\hat{C}(1)$) – линейное уравнение на M , поэтому, решив его в линейном пространстве матриц требуемой блочной структуры (не обязательно невырожденных), мы получаем некоторое его подпространство L , после чего исходный вопрос эквивалентен вопросу о наличии в L невырожденной матрицы. Но $\det M$ – многочлен, поэтому вопрос о его обращении в тождественный 0 на подпространстве L алгебраически разрешим, что и доказывает утверждение следствия.

4. Описание орбит действия группы верхнетреугольных матриц на нильтреугольных сопряжениями

Приведенные в разделе сведения взяты из работ И.Б. Бродского [11], [12], В.В. Кашина [7].

Ограничимся случаем вполне резонансного простого спектра матрицы-вычета, когда алгебраическая версия вопроса звучит так: исследовать орбиты действия группы верхнетреугольных матриц на нильтреугольных сопряжениями.

Заметим, что сопряжение верхнетреугольной матрицей разбивается на два этапа: сопряжение унитреугольной и диагональной матрицами. При этом сопряжение диагональной матрицей не может изменить мест, на которых стоят ненулевые элементы – оно может только поменять сами эти элементы, оставляя их ненулевыми.

Упорядочим элементы нильтреугольной матрицы так, чтобы элементы с более “низких” диагоналей (с меньшей разностью $j - i$) были бы “старше” – имели бы большие

номера, чем элементы с более “высоких” диагоналей; порядок элементов на одной диагонали неважен. Тогда действие унитарной матрицы сопряжением можно интерпретировать как действие некоторой унитарной матрицы порядка $N = n(n-1)/2$ в линейном пространстве нильтреугольных матриц. Тем самым, задача сводится к описанию орбит действия некоторой подгруппы Ли G группы унитарных матриц порядка N . В отношении таких действий в работах Бродского [11], [12] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть есть подгруппа Ли G группы унитарных матриц порядка N , естественным образом действующая на $\mathbb{R}^N$. Тогда каждая орбита G содержит ровно один вектор $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ (нормальную форму) следующего вида: для любого i , $N \geq i \geq 1$, либо $\mu_i = 0$, либо, действуя на μ теми элементами G , которые не изменяют $\mu_N, \dots, \mu_{i+1}$, нельзя добиться обращения μ_i в 0. В последнем случае μ_i вообще нельзя изменить, сохранив $\mu_N, \dots, \mu_{i+1}$.

Назовем носителем нильтреугольной матрицы множество номеров ненулевых элементов и будем говорить, что один носитель лексикографически старше другого, если для некоторого $1 \leq i \leq N$ все $j > i$ одновременно принадлежат или не принадлежат обоим носителям, а i не принадлежит первому носителю и принадлежит второму (старшинство по отсутствию элементов).

В этих терминах эквивалентная формулировка теоремы звучит так.

ТЕОРЕМА. В каждой орбите действия G есть единственный элемент (нормальная форма) с лексикографически старшим носителем.

Легким следствием этой теоремы является следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Носители нормальных форм двух матриц, сопряженных верхнетреугольной матрицей, совпадают, а сами эти нормальные формы сопряжены диагональной матрицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сопряженности двух матриц верхнетреугольной матрицей следует, что их нормальные формы также сопряжены некоторой верхнетреугольной матрицей T . Пусть $F_1 = T F_2 T^{-1}$, где F_1 и F_2 – нормальные формы. Представим T в виде $T = DU$, где D – диагональная, U – унитарная матрицы. Тогда $D^{-1} F_1 D = U F_2 U^{-1}$. Носитель левой части совпадает с носителем F_1 , а правая часть принадлежит орбите F_2 под действием G ; следовательно, носитель F_1 лексикографически не старше носителя F_2 . Аналогично, носитель F_2 лексикографически не старше носителя F_1 . Тем самым эти носители совпадают. Но в силу единственности в орбите элемента с лексикографически максимальным носителем $U F_2 U^{-1} = F_2$ (так как это элемент орбиты F_2 с тем же носителем), откуда $D^{-1} F_1 D = F_2$.

Рассмотрим следующий вопрос: сколько существует классов голоморфной эквивалентности фуксовых систем с данным набором собственных значений? Для случая вполне резонансного набора различных собственных значений этот вопрос эквивалентен вопросу о числе классов эквивалентности нильтреугольных матриц под действием сопряжения блочноверхнетреугольными. В работе Кашина [7] показано, что в размерности ≤ 5 число классов сопряженности конечно, и равно 1, 2, 5, 16, 61 в размерностях 1, 2, ..., 5 соответственно, а при размерности ≥ 6 оно бесконечно. Далее (в разделе 5), применив

описанную выше технику, мы приведем явный пример однопараметрического семейства орбит для такого действия, переведенный на язык фуксовых особых точек.

Последовательность 1, 2, 5, 16, 61 образует начало известной последовательности – последовательности Эйлера–Бернулли K_n , которая является последовательностью производных в 0 функции $\sec x + \operatorname{tg} x$. В работе А. А. Кириллова [13] исследована почти та же задача: над полем из двух элементов им исследовались орбиты действия унитарных матриц на нижнетреугольных с нулями на диагонали комбинацией сопряжения и взятия поддиагональной части (коприсоединенное действие). Им получен следующий ответ: начиная с размерности 6 число орбит начинает отличаться от вышеупомянутой последовательности, и, более того, если рассматривать аналогичную задачу над полем из q элементов и (некоторый) q -аналог последовательности K_n , то они также начинают различаться при $n = 6$. Это отличие, как нам кажется, может быть вызвано именно наличием однопараметрических семейств дополнительных инвариантов.

5. Примеры дополнительных инвариантов

5.1. Пример 1. Рассмотрим две системы:

$$\dot{z} = \frac{B_1(t)}{t}z, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\dot{w} = \frac{B_2(t)}{t}w, \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что у них одинаковые нормирования (0, 1 и 2), а операторы монодромии сопряжены, однако эти две системы не являются голоморфно эквивалентными: их характеристические матрицы $-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – не сопряжены никакой верхнетреугольной матрицей.

5.2. Пример 2 и доказательство следствия 2. Предыдущий пример был основан на том, что не только сам оператор монодромии, рассматриваемый с точностью до сопряжения, является инвариантом системы, но также и его ограничение на подпространство решений, имеющих нормирование не меньше n_i (для каждого i получаем свой инвариант). Однако это все равно дает дискретную (для каждого набора собственных значений) систему инвариантов. Следующий пример показывает, что в достаточно большой размерности число классов аналитической сопряженности систем с данным набором собственных значений может быть бесконечным, что, в частности, означает неполноту вышеупомянутой системы инвариантов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Разберем здесь только случай набора собственных значений $0, 1, \dots, 5$ – общий случай ему полностью аналогичен.

Рассмотрим семейство систем

$$\dot{z} = \frac{B(t)}{t}z, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 5 & b_1t & b_2t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & b_4t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b_3t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & b_5t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_6t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где все $b_i \neq 0$. Их характеристические матрицы имеют вид

$$A = \widehat{B}(1) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Покажем, что никакие две различные матрицы вида (8) не сопряжены унитарной матрицей, и, более того, каждая из них является нормальной формой для такого действия. Для этого мы применим технику раздела 4, упорядочив элементы нильтреугольной матрицы A следующим образом:

$$a_{16}, a_{26}, a_{15}, a_{25}, a_{36}, a_{14}, a_{46}, a_{13}, a_{35}, a_{24}, a_{56}, a_{34}, a_{12}, a_{45}, a_{23}.$$

Пусть

$$r_{i_0j_0}(A) = \text{rank}((a_{ij})_{i_0 \leq i, j \leq j_0}).$$

Тогда, как легко видеть, $R_{ij,k}(A) = r_{ij}(A^k)$ – инвариант сопряжения унитарной (и даже верхнетреугольной) матрицей. Заметим, что поскольку для нашей матрицы $R_{12,1}(A) = R_{34,1}(A) = R_{56,1}(A) = 1$, то сопряжением унитарной матрицей невозможно обнулить a_{12} , a_{34} и a_{56} . Кроме того, поскольку $R_{14,2}(A) = R_{36,2}(A) = 1$, $R_{26,1}(A) = 2$, не изменив (равные 0) a_{35} и a_{24} , нельзя обнулить a_{13} , a_{46} или a_{25} . Итак, ни один ненулевой элемент нашей матрицы нельзя обнулить, не изменив какой-то из “более старших”. Тем самым наша матрица приведена к нормальной для данного действия форме.

Но лемма 2 утверждает, что в таком случае две матрицы из семейства (8) сопряжены верхнетреугольной матрицей тогда и только тогда, когда они сопряжены диагональной матрицей. С другой стороны, легко видеть, что сопряжение диагональной матрицей не может изменить отношения

$$\frac{b_1b_4b_6}{b_2b_3b_5} = \frac{a_{12}a_{25}a_{56}}{a_{13}a_{34}a_{46}}.$$

Элементы семейства (8), для которых это отношение различно, не сопряжены никакой верхнетреугольной матрицей. Тем самым, имеем однопараметрическое семейство попарно не эквивалентных фуксовых особых точек: все системы

$$\dot{z} = \frac{B_c(t)}{t}z, \quad B_c(t) = \begin{pmatrix} 5 & t & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & ct^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$s \neq 0$ попарно не сопряжены.

Благодарности. Авторы благодарны Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи, многократные плодотворные обсуждения и за помощь в написании и редактировании этой статьи, без которой она не могла бы появиться, А. А. Болибруху, благодаря которому в статье появился второй взгляд на рассматриваемую задачу, и Д. В. Алексеевскому, заметившему алгебраический характер задачи. Кроме того, хотелось бы поблагодарить А. С. Городецкого и Э. Жиса за полезные дискуссии и И. В. Аржанцева за обсуждение алгебраической части работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Динамические системы. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7–150.
- [2] Levelt A. H. M. Hypergeometric functions, I, II, III, IV // Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1961. V. 64. № 4. P. 361–403.
- [3] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
- [4] Ильяшенко Ю. С. Нелинейная проблема Римана–Гильберта // Тр. МИАН. 1996. Т. 213. С. 6–29.
- [5] Болибрух А. А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000.
- [6] Anosov D. V., Bolibrukh A. A. The Riemann–Hilbert Problem. Aspects of Math. Braunschweig: Vieweg, 1994.
- [7] Кашин В. В. Орбиты присоединенного и коприсоединенного действия борелевских подгрупп полупростой алгебраической группы // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1990. С. 141–159.
- [8] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
- [9] Рабинович Б. А. Аналитическая классификация фуксовых особых точек. Дипломная работа. М.: МГУ, 1997.
- [10] Болибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем. Тр. МИАН. Т. 206. М.: Наука, 1994.
- [11] Бродский И. Б. Об инвариантах унитарных групп // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 243–244.
- [12] Бродский И. Б. Об орбитах унитарных групп // Функцион. анализ и его прилож. 1969. Т. 3. № 2. С. 19–23.
- [13] Кириллов А. А. Метод орбит и конечные группы // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 37–73.

(В. А. Клепцын) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(Б. А. Рабинович) Department of Mathematics,
Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel
E-mail: kleptsyn@mccme.ru, borisra@012.net.il

Поступило
03.02.2004