Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Вахитова, Об одномерном решетке Сельберга с весами Бухштаба нового типа, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 38–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 09:42:04

УДК 511

ОБ ОДНОМЕРНОМ РЕШЕТЕ СЕЛЬБЕРГА С ВЕСАМИ БУХШТАБА НОВОГО ТИПА

Е. В. Вахитова

В работе изучается метод решета Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Доказанная теорема позволяет получить преимущества в выборе параметров одномерного решета с весами по сравнению с известными ранее результатами.

Библиография: 11 названий.

Введение. Метод решета, наряду с другими приложениями, успешно можно применять при решении теоретико-числовых задач, в которых простые числа заменяются числами с ограниченным количеством простых делителей. (Такие числа называются *почти простыми числами*). Рассмотрим конечную последовательность A целых чисел a_n , где $n \in \mathbb{N}$. Через $\nu(a_n)$ обозначим количество простых чисел в разложении a_n с учетом их кратности. Поставим задачу: получить оценку снизу количества элементов из A , имеющих в своем разложении не более r простых чисел с учетом их кратности ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$), т.е. оценку снизу количества r -почти простых чисел в последовательности A . Для решения задачи применим метод одномерного решета Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Имеем:

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 \geq \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}} \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} 1 - \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}} \\ \nu(a_n) \geq r+1}} 1,$$

где p_n – наименьший простой делитель числа a_n , а X – достаточно большое положительное число.

Оценку сверху для последней суммы можно находить по-разному, применяя метод решета В. Бруна [1] или А. Сельберга [2]. П. Кун [3] впервые заметил, что сила метода значительно возрастет, если в методе решета Бруна элементы из последовательности A снабдить определенными весами (коэффициентами). Результаты для оценок будут еще лучше при сочетании решета Сельберга и весов Куна. Проблема нахождения оптимальных весов в решете Сельберга является очень трудной проблемой. А. А. Бухштаб [4] получил процедуру выбора весов, применяя сложный комбинаторный набор, разбивая весь интервал на конечное число промежутков и на каждом промежутке выбирая разные веса. Полученное комбинаторное весовое решето давало лучшие результаты. Но это была громоздкая конструкция. Х.-Э. Рихерт [5] дал свою конструкцию весовой функции. М. Лаборде [6] значительно упростил веса Бухштаба: разбил интервал на

достаточно большое число промежутков, для каждого промежутка брал свой вес и при стремлении длины промежутка к нулю получил предельную форму. Это, по-видимому, лучшее, что до сих пор сделано с весами. Веса Рихтерта являются частным случаем весов Бухштаба в непрерывной форме Лаборде и получаются при выборе параметра $b = 1$.

В 1985 году А. А. Бухштаб [7] анонсировал новый тип весового решета.

Благодаря весам удалось решить ряд теоретико-числовых задач и перенести идею на конечные последовательности значений неприводимых полиномов натуральной степени. В [8] изучено решето Сельберга с весами Рихтерта, в [9] – решето Сельберга с весами Бухштаба в непрерывной форме Лаборде, в [10] – решето Бруна с весами Бухштаба нового типа. В настоящей работе изучено решето Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Доказана основная теорема (теорема 3) для последовательности A , которая имеет преимущества в выборе параметров решета в сравнении с теоремой, полученной ранее Рихтертом [5] и улучшенной автором [9].

1. Веса Бухштаба нового типа. Приведем здесь весовую функцию $T(X)$ в общем виде, о котором автору стало известно (в 1986 г.) из устного сообщения А. А. Бухштаба. А в работе [7] дана весовая функция при $g = 3$

$$\begin{aligned}
 T(X) = & \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{a-1}{ga}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + \frac{1}{2c-b-1} \\
 & \times \left\{ (c-b) \sum_{X^{\frac{a-1}{ga}} \leq p < X^{\frac{a-g}{a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \right. \\
 & + \sum_{X^{\frac{a-g}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \\
 & + a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1+a(g-1)}{ag^2}} \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{ga}} \leq p < X^{1-gz}} S_k(A_p; X^z) \right) dz \\
 & + \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{a-1}{ga}}} \left(\frac{b+1}{2} - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k \left(A_p; \left(\frac{X}{p} \right)^{\frac{1}{g}} \right) \\
 & \left. + \frac{1}{g} \sum_{X^{\frac{a-1}{ga}} \leq p < X^{\frac{a-g}{a}}} \left(bg - a + g - a(g-1) \frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k \left(A_p; \left(\frac{X}{p} \right)^{\frac{1}{g}} \right) \right\}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $1 \leq b \leq c \leq a$, $2c - b - 1 > 0$, $S_k(A_d; z) = |\{a_n \in A : a_n \equiv 0 \pmod{d}, (a_n, P_k(z)) = 1\}|$, $P_k(z) = \prod_{\substack{p < z \\ p|k}} p$, $1 \leq g \leq a - 1$.

Параметр g зависит от размерности решета, в случае одномерного решета лучше выбрать $g = 3$.

ЛЕММА 1. Пусть $T(X)$ определено равенством (1), $a, b, c \in \mathbb{R}$, $1 \leq b \leq c \leq a$,

$2c-b-1 > 0$, $4 \leq a \leq 8$, $a-c \leq 3$, $g = 3$, $k = 1$. Тогда имеет место неравенство:

$$T(X) \leq \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p|a_n \\ p < X^{\frac{c}{a}}}} W(p), \quad (2)$$

где

$$W(p) = \frac{1}{2c-b-1} \left(c - a \frac{\ln p}{\ln X} \right). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем отдельно слагаемые суммы $T(X)$ из равенства (1) при $g = 3$, $k = 1$. При этом будем применять определение для $S(A_d; z)$. Тогда получим, обозначив слагаемые соответственно через $Y_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, 6$:

$$\begin{aligned} Y_1(X) &= \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p} \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} 1 = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W_1(p), \\ W_1(p) &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ Y_2(X) &= \frac{c-b}{2c-b-1} \sum_{X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{1-\frac{3}{a}}} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p} \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W_2(p), \\ W_2(p) &= \begin{cases} \frac{c-b}{2c-b-1} x, & \text{если } X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{1-\frac{3}{a}}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ Y_3(X) &= \frac{1}{2c-b-1} \sum_{X^{1-\frac{3}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p} \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p|a_n \\ X^{1-\frac{3}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}}} \frac{c - a \frac{\ln p}{\ln X}}{2c-b-1} = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W_3(p), \\ W_3(p) &= \begin{cases} \frac{1}{2c-b-1} \left(c - a \frac{\ln p}{\ln X} \right), & \text{если } X^{1-\frac{3}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ Y_4(X) &= \frac{a}{2c-b-1} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a+1}{9a}} \left(\sum_{X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{1-3z}} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p} \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} 1 \right) dz \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a+1}{9a}} \frac{a}{2c-b-1} \left(\sum_{X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{1-3z}} 1 \right) dz,$$

так как $X^z \geq X^{\frac{1}{a}}$. Преобразуем теперь интеграл, обозначив его через J :

$$J = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a+1}{9a}} \left(\sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \geq X^z \\ p < X^{1-3z}}} \frac{a}{2c-b-1} \right) dz - \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a+1}{9a}} \left(\sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \geq X^z \\ p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}}} \frac{a}{2c-b-1} \right) dz.$$

Для первого интеграла получим, что

$$z \leq \min \left(\frac{\ln p_n}{\ln X}; \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\ln p}{\ln X} \right) \right),$$

а отсюда следует, что $z \leq (2a+2)/(9a)$ при $a \leq 8$. Поэтому для $Y_4(X)$ получим неравенство:

$$\begin{aligned} Y_4(X) &\leq \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \left(\sum_{\substack{p < X^{1-\frac{3}{a}} \\ p|a_n}} \int_{\frac{1}{a}}^{\min(\frac{\ln p_n}{\ln X}, \frac{1}{3}(1-\frac{\ln p}{\ln X}))} \frac{a}{2c-b-1} dz \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \\ p|a_n}} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{\ln p_n}{\ln X}} \frac{a}{2c-b-1} dz \right) = \sum_{a_n \in A} \sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} W_4(p), \\ W_4(p) &= \begin{cases} \min \left(\frac{a \frac{\ln p_n}{\ln X} - 1}{2c-b-1}; \frac{\frac{a}{3} - 1 - \frac{a}{3} \frac{\ln p}{\ln X}}{2c-b-1} \right), & X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{\frac{1}{a}}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ Y_5(X) &= \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}} \frac{1}{2c-b-1} \left(\frac{b+1}{2} - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv (\text{mod } p) \\ p_n \geq (\frac{X}{p})^{\frac{1}{3}}}} 1. \end{aligned}$$

Если $p|a_n$, $X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}$, и $p_n \geq (\frac{X}{p})^{\frac{1}{3}}$, то отсюда получим, что $p_n \geq X^{\frac{2a+1}{9a}}$, а следовательно, $p_n \geq X^{\frac{1}{a}}$. Тогда

$$\begin{aligned} Y_5(X) &= \sum_{a_n \in A} \sum_{\substack{p|a_n \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} W_5(p), \\ W_5(p) &= \begin{cases} \frac{1}{2c-b-1} \left(\frac{b+1}{2} - a \frac{\ln p}{\ln X} \right), & X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ Y_6(X) &= \frac{1}{3(2c-b-1)} \sum_{X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{1-\frac{3}{a}}} \left(3b-a+3-2a \frac{\ln p}{\ln X} \right) \end{aligned}$$

$$\times \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p} \\ p_n \geq (\frac{X}{p})^{\frac{1}{3}}}} 1 = \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{p|a_n} W_6(p),$$

$$W_6(p) = \begin{cases} \frac{1}{2c-b-1} \left(b+1 - \frac{a}{3} \left(1 + 2 \frac{\ln p}{\ln X} \right) \right), & X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{1-\frac{3}{a}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, если обозначим теперь через $W(p)$ сумму $\sum_{i=1}^6 W_i(p)$, то после преобразований для $W(p)$ получим равенство (3), а для $T(X)$ – неравенство (2). Лемма 1 доказана.

Введем следующее условие.

Существует некоторая постоянная M такая, что

$$|a_n| \leq X^M \quad (u_0)$$

для всех a_n из последовательности A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T(X)$ определено равенством (1), выполнено условие (u_0) и $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$, $1 \leq b \leq c \leq a$, $4 \leq a \leq 8$, $a - c \leq 3$, $g = 3$, $k = 1$. Тогда имеет место неравенство:

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 \geq S(A; X^{\frac{1}{a}}) - T(X) - R, \quad (4)$$

где R – число элементов из A , делящихся на квадрат простого числа p из интервала $X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 1. Тогда, учитывая определение $S(A; X^{\frac{1}{a}})$, получим, что

$$S(A; X^{\frac{1}{a}}) - T(X) \geq \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} 1 - \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} \sum_{\substack{p|a_n \\ p < X^{\frac{c}{a}}}} W(p),$$

где $W(p)$ определено равенством (3).

Но последняя разность будет положительной. Кроме того,

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 \geq \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}}}} 1 - \sum_{\substack{a_n \in A \\ p_n \geq X^{\frac{1}{a}} \\ \nu(a_n) \leq r+1}} 1.$$

Теорема 1 доказана.

2. Одномерное решето Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Приведем полученный результат в случае одномерного решета к форме, удобной для приложений. Для этого введем несколько условий.

1) Существует постоянная $A_1 \geq 1$ такая, что

$$1 \leq \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \leq A_1 \quad (u_1)$$

для любого простого числа p , где $\omega(p)$ – такое, что $\omega(d)/dX$ является приближением $|A_d|$ и $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(n)$ – функция Мебиуса). Выполнимость условия (u_1) дает возможность рассматривать

$$\prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right).$$

2) Существуют постоянная $A_2 \geq 1$ и параметр L такие, что

$$-L \leq \sum_{v \leq p < \omega} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{\omega}{v} \leq A_2, \quad (u_2)$$

где $L \geq 1$ и не зависит от v и ω ($2 \leq v \leq \omega$).

Условие (u_2) говорит о том, что $\omega(p)$, по крайней мере в среднем по p , равно 1, иначе будем рассматривать только те последовательности A , при просеивании которых возникает задача одномерного решета.

3) Существуют постоянные α ($0 < \alpha \leq 1$), $A_3 \geq 1$, $A_5 \geq 1$ такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln A_5 X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X, d)| \leq A_3 \frac{X}{\ln^C X}, \quad (u_3)$$

где $X \geq 2$, $A_3 = A_3(C)$, $R(X, d) = |A_d| - \omega(d)X/d$. Условие (u_3) позволяет говорить о достаточной малости остаточного члена $R(X, d)$.

4) Существует постоянная $A_4 \geq 1$ такая, что

$$\sum_{z \leq p < y} \sum_{\substack{a_n \in A \\ a_n \equiv 0 \pmod{p^2}}} 1 \leq A_4 \left(\frac{X \ln X}{z} + y \right), \quad (u_4)$$

если $2 \leq z \leq y \leq X$.

Условие (u_4) необходимо для того, чтобы можно было нужным образом оценить величину R , входящую в неравенство теоремы 1.

Кроме того, пусть выполнены условия: $c < \alpha a$, $2 < \alpha a$, где α берется из условия (u_3) .

Предположим, что 1) при некоторой постоянной δ ($0 < \delta \leq 1$) для $S(A; X^{\frac{1}{a}})$ имеет место следующая оценка снизу [8, теорема 7.4]:

$$S(A; X^{\frac{1}{a}}) \geq X \cdot W(X^{\frac{1}{a}}) \left(f(\alpha a) - C_1 \frac{L}{\ln^\delta X} \right), \quad (5)$$

где $f(\alpha a) > 0$,

$$W(z) = \prod_{p < z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right),$$

2) для любого действительного числа ξ , $\xi > 1$, удовлетворяющего неравенствам

$$\frac{1}{C_2} \leq a \frac{\ln \xi^2}{\ln X} \leq \alpha a - 1,$$

для всех простых p из интервала $[X^{\frac{1}{a}}; X^{\frac{a}{a}}]$ для $S(A_p; X^{\frac{1}{a}})$ имеет место следующая оценка сверху [8, теорема 8.3]:

$$\begin{aligned} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) &\leq \frac{\omega(p)}{p} X W(X^{\frac{1}{a}}) \left(F\left(a \frac{\ln \xi^2}{\ln X}\right) + C_3 \frac{L}{\ln^\delta \xi} \right) \\ &+ C_4 \sum_{\substack{d < \xi^2 \\ d | P(X^{\frac{1}{a}})}} 3^{\nu(d)} |R(X, \rho d)|, \end{aligned} \quad (6)$$

где для $u > 0$ функция $F(u)$ является неотрицательной, убывающей и непрерывной, удовлетворяющей условию:

$$F(u_1) - F(u_2) \leq C_5 \frac{u_2 - u_1}{u_1}, \quad \frac{1}{C_2} \leq u_1 < u_2.$$

Будем считать, что $X > C_6$, где C_6 – достаточно большое число. Выберем ξ^2 из учета условия (u_3) : $\xi^2 = X^\alpha / (\ln^{A_5} X)$. Неравенство (6) будем применять с ξ^2/p вместо ξ^2 (это можно доказать). Проведем еще замену ξ^2 на X^α в аргументе функции F . Тогда

$$\Delta F = F\left(\frac{\ln \frac{\xi^2}{p}}{\ln X^{\frac{1}{a}}}\right) - F\left(\frac{\ln \frac{X^\alpha}{p}}{\ln X^{\frac{1}{a}}}\right) \leq C_7 \frac{\ln \ln X}{\ln X}.$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия $(u_1) - (u_4)$, (6) и $T(X)$ определено равенством (1) при $g = 3$, $k = 1$. Тогда для $T(X)$ имеет место следующее неравенство:

$$T(X) \leq X \cdot W(X^{\frac{1}{a}}) \left(B(\alpha, a, b, c) + \frac{C_{28} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right),$$

где $B(\alpha, a, b, c)$ определено равенством:

$$\begin{aligned} B(\alpha, a, b, c) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1} \frac{F(z) dz}{\alpha a - z} + \frac{1}{2c - b - 1} \left\{ (c - b) \int_3^{\frac{2\alpha a+1}{3}} \frac{F(z) dz}{\alpha a - z} \right. \\ &+ \int_{\alpha a - c}^3 F(z) \frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz + \int_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a} \left(\int_3^{\frac{2\alpha a+1}{3} v} F(z) \frac{dz}{v - z} \right) \frac{dv}{v} \\ &+ \frac{3}{2\alpha a} \int_{\frac{2\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1} F(3) \frac{(b+1)z - (2\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz \\ &\left. + \frac{3}{\alpha a} \int_{\frac{3}{\alpha a-3}}^{\frac{2\alpha a+1}{\alpha a-1}} F(3) \frac{(b+1 - \frac{\alpha a}{3})z - (\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем отдельно слагаемые суммы $T(X)$, применяя неравенство (6):

$$\begin{aligned} J_1(X) &= \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \\ &\leq XW(X^{\frac{1}{a}}) \left(\int_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1} \frac{1}{2} \frac{F(z) dz}{\alpha a - z} + \frac{C'_{19} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} J_2(X) &= (c-b) \sum_{X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leq p < X^{1-\frac{3}{a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \\ &\leq XW(X^{\frac{1}{a}}) \left((c-b) \int_3^{\frac{2\alpha a+1}{3}} \frac{F(z) dz}{\alpha a - z} + \frac{C_{19} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для третьего слагаемого $J_3(X)$ из $T(X)$, учитывая, что $\Delta F \leq C_7 \ln \ln X / \ln X$, получим:

$$\begin{aligned} J_3(X) &= \sum_{X^{1-\frac{3}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) \\ &\leq XW(X^{\frac{1}{a}}) \sum_{X^{\frac{a-3}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}} \left(\left(c - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) \frac{\omega(p)}{p} F\left(a \frac{\ln \frac{X^\alpha}{p}}{\ln X} \right) \right. \\ &\quad \left. + C_8 \frac{\omega(p)}{p} \frac{\ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right) + C_4 \sum_{X^{\frac{a-3}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}} \sum_{\substack{d < \frac{\xi^2}{p} \\ d|P(X^{\frac{1}{a}})}} 3^{\nu(d)} |R(X, pd)|. \end{aligned}$$

Применим теперь условие (u_3) и оценку (2.3.6) из [8] (при $k = 1$), а затем – неравенство (5.2.1) из [8] (при $k = 1$) и условие (u_2) . Тогда, наконец, применяя лемму Абеля о частном суммировании, получим, что

$$\begin{aligned} J_3(X) &\leq XW(X^{\frac{1}{a}}) \left(\int_{X^{\frac{a-3}{a}}}^{X^{\frac{c}{a}}} E(\omega) \left(c - a \frac{\ln \omega}{\ln X} \right) \frac{d\omega}{\omega \ln \omega} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{C_{13} \ln \ln 3X}{\ln X} \right) + \frac{C_{10} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right), \end{aligned}$$

где $E(\omega) = F(a \ln(X^\alpha/\omega)/\ln X)$. Сделаем замену переменной:

$$z = \frac{\ln \frac{X^\alpha}{\omega}}{\ln X^{\frac{1}{a}}}.$$

Тогда

$$\int_{X^{\frac{a-3}{a}}}^{X^{\frac{c}{a}}} E(\omega) \left(c - a \frac{\ln \omega}{\ln X} \right) \frac{d\omega}{\omega \ln \omega} \leq \int_{\alpha a - c}^3 F(z) \frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz.$$

Таким образом,

$$J_3(X) \leqslant XW(X^{\frac{1}{a}}) \left(\int_{\alpha a - c}^3 F(z) \frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz + \frac{C_{14} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right). \quad (10)$$

Для четвертого слагаемого $J_4(X)$ из $T(X)$ получим

$$\begin{aligned} J_4(X) &= a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a+1}{9a}} \left(\sum_{X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-3z}} S(A_p; X^z) \right) dz \\ &\leqslant a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a+1}{9a}} \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{3a}} \leqslant p < X^{1-3z}} \left(\frac{\omega(p)}{p} XW(X^z) \left(F\left(\frac{\ln \frac{\xi^2}{p}}{\ln X^z}\right) + \frac{C_3 \ln \ln 3X}{\ln^\delta \frac{\xi}{\sqrt{p}}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_4 \sum_{\substack{d < \frac{\xi^2}{p} \\ d|P(X^z)}} 3^{\nu(d)} |R(X, pd)| \right) \right) dz \\ &\leqslant a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a+1}{9a}} XW(X^z) \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{3a}} \leqslant p < X^{1-3z}} \frac{\omega(p)}{p} F\left(\frac{\ln \frac{X^\alpha}{p}}{\ln X^z}\right) + C_{20} \frac{\ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right) dz. \end{aligned}$$

Выполняя дальнейшие преобразования и учитывая неравенство (2.3.5) из [8], получим окончательно

$$J_4(X) \leqslant XW(X^{\frac{1}{a}}) \left(\int_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a} \left(\int_3^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v} F(z) \frac{dz}{v-z} \right) \frac{dv}{v} + \frac{C_{22} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right); \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J_5(X) &= \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leqslant p < X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})}} \left(\frac{b+1}{2} - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) S_p \left(A_p; \left(\frac{X}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \leqslant XW(X^{\frac{1}{a}}) \\ &\quad \times \left(\frac{3}{2\alpha a} \int_{\frac{9\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1} F(3) \frac{(b+1)z - (2\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz + \frac{C_{27} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right); \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_6(X) &= \frac{1}{3} \sum_{X^{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{a})} \leqslant p < X^{1-\frac{3}{a}}} \left(3b - a + 3 - 2a \frac{\ln p}{\ln X} \right) S \left(A_p; \left(\frac{X}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \leqslant XW(X^{\frac{1}{a}}) \\ &\quad \times \left(\frac{3}{\alpha a} \int_{\frac{3}{\alpha a-3}}^{\frac{2\alpha a+1}{\alpha a-1}} F(3) \frac{(b+1-\frac{\alpha a}{3})z - (\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz + \frac{C'_{27} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Таким образом, определяя величину $B(\alpha, a, b, c)$ равенством (7), из неравенств (8) – (13) получим требуемое неравенство для $T(X)$. Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия $(u_1)-(u_4)$, (u_6) , (5), (6) и пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $1 \leq b < c < \alpha a$, $4 \leq \alpha a \leq 8$, $\alpha a - c \leq 3$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$. Тогда имеет место оценка снизу:

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 \geq XW(X^{\frac{1}{a}}) \left(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c) - \frac{C_{31} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right),$$

где $B(\alpha, a, b, c)$ определено равенством (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим последовательно теорему 1, неравенство (5) и лемму 2. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 &\geq S(A; X^{\frac{1}{a}}) - T(X) - R \\ &\geq XW(X^{\frac{1}{a}}) \left(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c) - \frac{C_{29} \ln \ln 3X}{\ln^\delta X} \right) - R, \end{aligned}$$

где R – число элементов последовательности A , делящихся на квадрат простого числа из интервала $[X^{\frac{1}{a}}; X^{\frac{2}{a}})$. Оценивая теперь R с учетом условия (u_4) , получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Уточним теорему 2, учитывая выбор функций $f(z)$ и $F(z)$. Рассмотрим функции $\eta(u)$ и $\sigma(u)$, которые определяются следующим образом:

$$\sigma(u) = \frac{u\bar{e}^\gamma}{2}, \quad 0 \leq u \leq 2,$$

где γ – постоянная Эйлера,

$$u\sigma'(u) = \sigma(u) - \sigma(u-2), \quad u > 2,$$

причем $\sigma(u)$ непрерывна при $u = 2$,

$$\eta(u) = \frac{1}{u} \int_u^\infty (\sigma^{-1}(t-1) - 1) dt, \quad u > 1.$$

О свойствах этих функций можно узнать из [8].

Условие $c < \alpha a$, $2 < \alpha a$ влечет условие (7.6.1) теоремы 7.4 из [8] (при $a = v$, $c = v/u$), а теорема 7.4 дает неравенство (5) с $f(\alpha a) = 1 - \eta(\alpha a)$.

Условие $f(\alpha a) > 0$ означает условие $\alpha a > 2$, поэтому получим условие на a : $a > 2/\alpha$.

Неравенство (6) можно получить по теореме 6.3 из [8] с $F(t) = \sigma^{-1}(t)$, причем при таком выборе $F(t)$ будет выполнено условие на $F(t)$ (учитывая (6.3.3), (6.3.4) и (6.3.5) из [8]).

В силу теорем 7.4 и 6.3 из [8] величина δ может быть любой положительной постоянной, меньшей 1 (а сами эти теоремы доказаны методом решета Сельберга).

Наконец, в дальнейшем вместо условия (u_2) будем использовать другое условие:

$$-A_2 \ln \ln 3X \leq \sum_{v \leq p \leq w} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{\omega}{v} \leq A_2. \quad (u'_2)$$

Уточним теперь теорему 2, учитывая условие (u'_2) и выбор функций $f(z)$ и $F(z)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия $(u_1), (u'_2), (u_3), (u_4), (u_0)$, $f(\alpha a) = 1 - \eta(\alpha a)$, $F(z) = \sigma^{-1}(z)$ и пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $1 \leq b < c < \alpha a$, $4 \leq \alpha a \leq 8$, $\alpha a - c \leq 3$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$. Тогда имеет место следующая оценка снизу:

$$\sum_{\substack{a_n \in A \\ \nu(a_n) \leq r}} 1 \geq XW(X^{\frac{1}{a}}) \left(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c) - \frac{C_{28}L}{\ln^{1/2} X} \right),$$

где $B(\alpha, a, b, c)$ определено равенством (7).

Доказательство теоремы получим из теоремы 2, учитывая условие (u'_2) и выбирая $\delta = 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Таким образом, теорема 3 позволяет получить преимущества в выборе параметров одномерного решета с весами по сравнению с известными ранее результатами.

3. Приложение решета Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Рассмотрим последовательность A_1 :

$$A_1 = \{ \Phi(pq) : p, q \text{ — простые, } p \neq q, (pq, \Phi(0)) = 1, pq \leq x \}, \quad (14)$$

где $\Phi(n)$ — неприводимый полином натуральной степени g с целыми коэффициентами, а x — достаточно большое положительное число.

ТЕОРЕМА 4. Пусть последовательность A_1 определена условием (14), выполнены условия $(u_1), (u'_2), (u_3), (u_4), (u_0)$, $f(\alpha a) = 1 - \eta(\alpha a)$, $F(z) = \sigma^{-1}(z)$ и пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $1 \leq b < c < \alpha a$, $4 \leq \alpha a \leq 8$, $\alpha a - c \leq 3$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, $2c - b - 1 > 0$. Тогда имеет место следующая оценка снизу:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\Phi(pq) \in A_1 \\ \nu(\Phi(pq)) \leq r}} 1 &\geq \frac{a\bar{e}^\gamma}{2} (f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c)) \\ &\times \prod_{p \nmid \Phi(0)} \frac{1 - \frac{\rho(p)}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} \prod_{p \mid \Phi(0)} \frac{1 - \frac{\rho(p)-1}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} \frac{x}{\ln^2 x} \ln \ln x \end{aligned}$$

для достаточно больших x , где $B(\alpha, a, b, c)$ определено равенством (7), а $\rho(d)$ — число решений сравнения $\Phi(n) \equiv 0 \pmod{d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4 получим, применяя теорему 3 и лемму 4 работы [11].

Теорема 4 позволяет получить преимущества в выборе параметров одномерного решета с весами по сравнению с ранее доказанной соответствующей теоремой в работе [9] (с помощью метода решета Сельберга с весами Бухштаба в непрерывной форме Лаборде).

Автор благодарит профессора Н. М. Тимофеева за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brun V. Le crible d'Eratosthene et le theoreme de Goldbach // C. R. Acad. Sci. Paris. 1919. V. 168. P. 544–546.
- [2] Selberg A. On elementary methods in prime number theory and their limitations // II. Scand. Mat. Kongr. Trondheim. 1949. P. 13–22.
- [3] Kuhn P. Zur Viggo Brunschen Siebmethode // I. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondhjem. 1941. V. 14. № 39. P. 145–148.
- [4] Бухштаб А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета // УМН. 1967. Т. 22. № 3 (135). С. 199–226.
- [5] Richert H.-E. Selberg's sieve with weights // Mathematika. 1969. V. 16. № 31. P. 1–22.
- [6] Laborde M. Buchstabs sifting weights // Mathematika. 1979. V. 26. P. 250–257.
- [7] Бухштаб А. А. Новый тип весового решета // Тезисы докл. Всес. конф. “Теория чисел и ее приложения”. Тбилиси. 1985. С. 22–24.
- [8] Halberstam H., Richert H.-E. Sieve methods. London: Acad. Press., 1974.
- [9] Вахитова Е. В. О некоторых приложениях одномерного решета с весами // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 139–141.
- [10] Вахитова Е. В. О приложении функций Бухштаба // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 121–125.
- [11] Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Распределение арифметических функций в среднем по прогрессиям (теоремы типа Виноградова–Бомбьери) // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4(12). С. 558–572.

Стерлитамакский государственный
педагогический институт

Поступило
10.06.98