Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, Точное неравенство Джексона в пространстве L_p на сфере, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 50–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:52:39

УДК 517.5

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ L_p НА СФЕРЕ

Д. В. Горбачев

Доказывается точное неравенство Джексона в пространстве L_p , $1 \leq p < 2$, на единичной евклидовой сфере S^{n-1} , $n \geq 3$. При $n = 2$ оно было установлено Н. И. Черныхом.

Библиография: 14 названий.

Статья посвящена доказательству результатов, анонсированных в [1].

Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $|x| = \sqrt{xx}$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, $\Gamma_\alpha(x) = \{y \in S^{n-1} : xy = \cos \alpha\}$ – окружность на сфере с центром в точке $x \in S^{n-1}$ и угловым радиусом α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, σ и γ_α – нормированные меры на сфере S^{n-1} и окружности $\Gamma_\alpha(x)$ соответственно;

$$L_p(S^{n-1}) = \left\{ f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_p = \left(\int_{S^{n-1}} |f|^p d\sigma \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Пусть $H_l = \{h(x) = \sum h_{l_1 \dots l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} : l_1 + \dots + l_n = l, \Delta h = 0, x \in S^{n-1}\}$ – множество сужений на сферу S^{n-1} однородных гармонических многочленов степени l от n переменных (множество сферических гармоник порядка l), Δ – оператор Лапласа. Известно [2, гл. IX], что

$$L_2(S^{n-1}) = \sum_{l=0}^{\infty} \oplus H_l,$$

проектор $\text{Pr}_l : L_2(S^{n-1}) \rightarrow H_l$ имеет вид

$$\text{Pr}_l f(x) = \int_{S^{n-1}} P_l(xy) f(y) d\sigma(y), \quad (1)$$

где $P_l \in H_l$,

$$P_l(t) = \frac{C_l^{(n-2)/2}(t)}{C_l^{(n-2)/2}(1)}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad l = 0, 1, \dots,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00318) и Министерства общего и профессионального образования России (грант № 97-0-1.4-78)

$C_l^{(n-2)/2}(t)$ – многочлены Гегенбауэра [3, гл. 22], $P_0(t) \equiv 1$, $P_l(\cos \tau) = \cos l\tau$ при $n = 2$.

Пусть для $R \in \mathbb{N}$

$$E_R(f, S^{n-1})_p = \inf \left\{ \|f - g\|_p : g \in \sum_{l=0}^{R-1} \oplus H_l \right\}$$

– величина наилучшего приближения функции $f \in L_p(S^{n-1})$ сферическими гармониками порядка не выше $R - 1$; для $0 \leq \delta \leq \pi$

$$\omega(\delta, f, S^{n-1})_p = \sup_{\alpha \leq \delta} \left(\int_{S^{n-1}} \int_{\Gamma_\alpha(x)} |f(y) - f(x)|^p d\gamma_\alpha(y) d\sigma(x) \right)^{1/p} \quad (2)$$

– модуль непрерывности. При $n = 2$ окружность $\Gamma_\alpha(x)$ вырождается в две изолированные точки [4], и определение (2) сводится к следующему

$$\begin{aligned} \omega(\delta, f, S^1)_p &= \sup_{0 \leq \alpha \leq \delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\varphi + \alpha) - f(\varphi)|^p + |f(\varphi - \alpha) - f(\varphi)|^p}{2} d\varphi \right)^{1/p} \\ &= \sup_{|\alpha| \leq \delta} \|f(\varphi + \alpha) - f(\varphi)\|_p, \end{aligned}$$

т.е. к стандартному определению модуля непрерывности на S^1 . Можно показать, что при $n \geq 3$ $\omega(\delta, f, S^{n-1})_p$ обладает свойствами модуля непрерывности $\omega(\delta, f, S^1)_p$ (непрерывность, равенство нулю при $\delta = 0$, неубывание, полуаддитивность [5, гл. 7]).

Определим константу Джексона (точную константу в неравенстве Джексона) равенством

$$D(\delta, R, S^{n-1})_p = \sup_{f \in L_p(S^{n-1})} \frac{E_R(f, S^{n-1})_p}{\omega(\delta, f, S^{n-1})_p}. \quad (3)$$

Пусть $t_R = \cos \tau_R$ – наибольший (ближайший к точке 1) нуль многочлена Гегенбауэра $P_R(t)$ ($\tau_R = \pi/(2R)$ при $n = 2$, $\tau_R \asymp (q_{(n-3)/2})/R$ при $R \rightarrow \infty$ [3, гл. 22], $q_{(n-3)/2}$ – первый положительный нуль функции Бесселя $J_{(n-3)/2}(t)$).

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Если $n \geq 3$, $1 \leq p < 2$, то

$$D(2\tau_R, 2R - 1, S^{n-1})_p = 2^{-1/p'},$$

где $p' = p/(p - 1)$ – сопряженный показатель.

При $n = 2$ теорема получена Н. И. Черныхом [6] в виде

$$D\left(\frac{2\pi}{R}, R, S^1\right)_p = 2^{-1/p'}.$$

В работе [4] А. Г. Бабенко получил следующий точный результат

$$D(2\tau_R, R, S^{n-1})_2 = 1$$

при использовании другого модуля непрерывности

$$\tilde{\omega}(\delta, f, S^{n-1})_2 = \sup_{\alpha \leq \delta} \|(I - s_\alpha)^{1/2} f\|_2,$$

где I – тождественный оператор,

$$s_\alpha f(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} f(y) d\gamma_\alpha(y)$$

– оператор среднего значения. Можно показать, что

$$\omega(\delta, f, S^{n-1})_2 = \sqrt{2} \tilde{\omega}(\delta, f, S^{n-1})_2,$$

но при обобщении точной теоремы Джексона на другие пространства $L_p(S^{n-1})$, $1 \leq p < 2$, удобнее оказалось использовать модуль непрерывности (2).

Доказательство теоремы проведем в два этапа. Вначале получим оценку сверху, а затем построим семейство функций, на котором эта оценка достигается. При доказательстве оценки сверху будем следовать работе [7], где установлено точное неравенство Джексона в пространстве L_p , $1 \leq p < 2$, на n -мерном торе, $n \geq 2$.

Доказательство оценки сверху. Пусть $1 \leq p \leq \infty$; для произвольной функции $f \in L_p(S^{n-1})$

$$Tf(x, y) = f(x) - f(y), \quad Af(x) = \int_{S^{n-1}} K(xy) f(y) d\sigma(y) \quad (4)$$

– линейный интегральный оператор сферической свертки [8] с зональным сферическим ядром K , для которого выполнены условия

$$K(xy) = \sum_{l=0}^{\infty} K_l P_l(xy), \quad K(xy) \geq 0, \quad K_0 = \int_{S^{n-1}} K(xy) d\sigma(y) = 1; \quad (5)$$

$$L_{pp}(S^{n-1} \times S^{n-1}) = \left\{ g: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C} \mid \right. \\ \left. \|g\|_{pp} = \left(\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |g(x, y)|^p K(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ЛЕММА 1. Если

$$\|T\|_{p' \rightarrow p' p'} = \sup_{\|h\|_{p'} \leq 1} \|Th\|_{p' p'},$$

то

$$\|f - Af\|_p \leq \frac{1}{2} \|T\|_{p' \rightarrow p' p'} \|Tf\|_{pp}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейный оператор $B: L_{pp}(S^{n-1} \times S^{n-1}) \rightarrow L_p(S^{n-1})$

$$Bg(x) = \int_{S^{n-1}} (g(x, y) - g(y, x))K(xy) d\sigma(y).$$

При $1 \leq p \leq \infty$ [9, с. 184]

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dx \right)^{1/p} = \sup \left\{ \int fh dx : \|h\|_{p'} \leq 1 \right\}. \quad (6)$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \|Bg\|_p &= \sup_{\|h\|_{p'} \leq 1} \int_{S^{n-1}} Bg(x)h(x) d\sigma(x) \\ &= \sup_{\|h\|_{p'} \leq 1} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} (g(x, y) - g(y, x))h(x)K(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \sup_{\|h\|_{p'} \leq 1} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} (h(x) - h(y))g(x, y)K(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &\leq \sup_{\|h\|_{p'} \leq 1} \|Th\|_{p'p'} \|g\|_{pp}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно (4), (5) на элементе $g(x, y) = Tf(x, y)$

$$\begin{aligned} BTf(x) &= \int_{S^{n-1}} (Tf(x, y) - Tf(y, x))K(xy) d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} (2f(x) - 2f(y))K(xy) d\sigma(y) = 2(f(x) - Af(x)). \end{aligned}$$

Отсюда и из (7)

$$\|BTf\|_p = 2\|f - Af\|_p \leq \|T\|_{p' \rightarrow p'p'} \|Tf\|_{pp}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $1 \leq p \leq 2$, для ядра K (5) выполнено условие

$$K_l \geq 0, \quad l = 0, 1, \dots,$$

то

$$\|f - Af\|_p \leq 2^{-1/p'} \|Tf\|_{pp}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\|Tf\|_{\infty\infty} = \sup_{x, y} |f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_{\infty},$$

то

$$\|T\|_{\infty \rightarrow \infty\infty} \leq 2. \quad (8)$$

Воспользовавшись положительной определенностью многочленов Гегенбауэра $P_l(xy)$ [10]

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(x) \overline{f(y)} P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \geq 0, \quad f \in L_1(S^{n-1}), \quad l = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

условиями леммы и (5), получим оценку

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{22}^2 &= \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^2 K(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} (|f(x)|^2 + |f(y)|^2 - 2 \operatorname{Re} f(x) \overline{f(y)}) K(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= 2\|f\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{\infty} K_l \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f(x) \overline{f(y)} P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \leq 2\|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|T\|_{2 \rightarrow 22} \leq 2^{1/2}. \quad (10)$$

Интерполируя (8) и (10) [11], получим при $1 \leq p \leq 2$

$$\|T\|_{p' \rightarrow p'p'} \leq 2^{1-1/p'}.$$

Осталось воспользоваться леммой 1.

ЛЕММА 3. Если $1 \leq p < 2$, $l \geq 1$, то для любой функции $f \in L_p(S^{n-1})$

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \leq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы легко проверяемые тождества

$$\begin{aligned} |z|^p &= c_p^{-1} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})|^p d\varphi, \quad z \in \mathbb{C}, \quad p > 0, \quad c_p = \int_0^{2\pi} |\cos \varphi|^p d\varphi > 0, \\ |a - b|^p &= d_p^{-1} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(a - b)\xi}{\xi^{p+1}} d\xi, \\ a, b \in \mathbb{R}, \quad 0 < p < 2, \quad d_p &= \int_0^\infty \frac{1 - \cos \xi}{\xi^{p+1}} d\xi > 0. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (9),

$$\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) = 0, \quad l \geq 1,$$

ПОЛУЧИМ

$$\begin{aligned}
& c_p d_p \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= d_p \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}(f(x)e^{-i\varphi}) - \operatorname{Re}(f(y)e^{-i\varphi})|^p d\varphi \\
&\quad \times P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \cos(\operatorname{Re}(f(x)e^{-i\varphi}) - \operatorname{Re}(f(y)e^{-i\varphi}))\xi}{\xi^{p+1}} \\
&\quad \times P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) d\varphi d\xi \\
&= - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \cos \operatorname{Re}(f(x)e^{-i\varphi})\xi \cdot \cos \operatorname{Re}(f(y)e^{-i\varphi})\xi \right. \\
&\quad \times P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&\quad + \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \sin \operatorname{Re}(f(x)e^{-i\varphi})\xi \cdot \sin \operatorname{Re}(f(y)e^{-i\varphi})\xi \\
&\quad \times P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \left. \right) \frac{d\varphi d\xi}{\xi^{p+1}} \leq 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если $1 \leq p < 2$, зональные сферические функции

$$F(xy) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l P_l(xy), \quad G(xy) = \sum_{l=0}^{\infty} G_l P_l(xy)$$

удовлетворяют условиям

$$F_0 = G_0, \quad F_l \geq G_l, \quad l \geq 1,$$

то для любой функции $f \in L_p(S^{n-1})$

$$\begin{aligned}
& \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p F(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
& \leq \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p G(xy) d\sigma(x) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условия леммы и лемму 3, получим

$$\begin{aligned}
& \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p (F(xy) - G(xy)) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (F_l - G_l) \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} |F_l - G_l| \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p P_l(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \leq 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $R \in \mathbb{N}$, $d\nu(t) = A_n(1 - t^2)^{(n-3)/2} dt$, $\int_{-1}^1 d\nu = 1$, $\int_{-1}^1 P_l^2 d\nu = 1/d_l$, $l = 0, 1, \dots$, $d_0 = 1$;

$$k(t) = \left(\sum_{i=0}^{R-1} d_i P_i(t_R) P_i(t) \right)^2 = a_R \left(\frac{P_R(t)}{t - t_R} \right)^2, \quad a_R > 0, \quad -1 \leq t \leq 1$$

(см. [10], [12]). Хорошо известно [10], [12], что

$$P_i(t_R) > 0, \quad 0 \leq i \leq R-1,$$

$$P_i(t) P_j(t) = \sum_{l=|i-j|}^{i+j} c(i, j, l) P_l(t), \quad c(i, j, l) \geq 0.$$

Отсюда

$$k(t) \geq 0, \quad k(t) = \sum_{l=0}^{2R-2} k_l P_l(t), \quad k_l > 0, \quad 0 \leq l \leq 2R-2. \quad (11)$$

ЛЕММА 5. Если $0 \leq l \leq R-1$, то

$$k_l \geq d_l P_l(t_R) k_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\Delta_l(t) = P_l(t) - (P_l(t_R) + P'_l(t_R)(t - t_R)) \quad (12)$$

— разность между многочленом Гегенбауэра $P_l(t)$ и касательной к нему в точке t_R . Покажем, что если $0 \leq l \leq R-1$, $0 \leq t \leq 1$, то

$$\Delta_l(t) \geq 0. \quad (13)$$

Пусть t'_l — наибольший (ближайший к точке 1) нуль производной $P'_l(t)$. Тогда $0 < t'_l < t_R$, на отрезке $[t'_l, 1]$ функция $P_l(t)$ выпуклая вниз ($P'_l(t)$ возрастает на $[t'_l, 1]$) и (13) верно при $t'_l \leq t \leq 1$.

Известно [12, гл. VII], что последовательные максимумы функции $|P_l(t)|$, $0 \leq t \leq 1$, отсчитываемые от точки 1 влево, образуют убывающую последовательность, поэтому если учесть, что $P_l(t'_l) < 0$,

$$P_l(t) \geq P_l(t'_l), \quad 0 \leq t \leq t'_l.$$

Отсюда и из (12) в силу неотрицательности $P'_l(t_R)$ и $\Delta_l(t'_l)$ следует, что

$$\Delta_l(t) \geq \Delta_l(t'_l) + P'_l(t_R)(t - t'_l) \geq 0$$

при $0 \leq t \leq t'_l$ и (13) доказано.

Многочлены Гегенбауэра $P_l(t)$, $l = 0, 1, \dots$, образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[-1, 1]$ относительно меры ν (см. [2, гл. IX]), поэтому

$$k_l = d_l \int_{-1}^1 k(t) P_l(t) d\nu(t), \quad l = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Покажем, что

$$\int_{-1}^1 k(t) \Delta_l(t) d\nu(t) \geq 0, \quad 0 \leq l \leq R-1. \quad (15)$$

Известно [3, гл. 22], что $P_l(-t) = (-1)^l P_l(t)$, поэтому из (11)

$$k(-t) \leq k(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (16)$$

Разбивая интеграл в (15) на интегралы от -1 до 0 и от 0 до 1 , заменяя в первом интеграле переменную t на $-t$, учитывая (13), (16), получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 k(t) \Delta_l(t) d\nu(t) &= \int_0^1 k(-t) \Delta_l(-t) d\nu(t) + \int_0^1 k(t) \Delta_l(t) d\nu(t) \\ &\geq \int_0^1 k(-t) (\Delta_l(t) + \Delta_l(-t)) d\nu(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Так как $P'_l(t_R) > 0$, $0 \leq l \leq R-1$, то

$$\begin{aligned} \Delta_{2i}(t) + \Delta_{2i}(-t) &= P_{2i}(t) - (P_{2i}(t_R) + P'_{2i}(t_R)(t - t_R)) \\ &\quad + (-1)^{2i} P_{2i}(t) - (P_{2i}(t_R) + P'_{2i}(t_R)(-t - t_R)) \\ &= 2\Delta_{2i}(t) + 2P'_{2i}(t_R)t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 2i < R. \end{aligned} \quad (18)$$

Так как $P_{2i+1}(0) = 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta_{2i+1}(t) + \Delta_{2i+1}(-t) &= P_{2i+1}(t) - (P_{2i+1}(t_R) + P'_{2i+1}(t_R)(t - t_R)) \\ &\quad + (-1)^{2i+1} P_{2i+1}(t) - (P_{2i+1}(t_R) + P'_{2i+1}(t_R)(-t - t_R)) \\ &= 2P_{2i+1}(0) - 2(P_{2i+1}(t_R) + P'_{2i+1}(t_R)(0 - t_R)) \\ &= 2\Delta_{2i+1}(0) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 2i+1 < R. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (11), (17)–(19) следует, что (15) верно.

Известно [12, гл. III], что

$$\int_{-1}^1 k(t)(t - t_R) d\nu(t) = 0.$$

Отсюда и из (12), (14), (15) при $0 \leq l \leq R-1$

$$\int_{-1}^1 k(t)(P_l(t) - (P_l(t_R) + P'_l(t_R)(t - t_R))) d\nu(t) = \frac{k_l}{d_l} - P_l(t_R)k_0 \geq 0.$$

Лемма доказана.

В [4] при доказательстве теоремы Джексона в пространстве $L_2(S^{n-1})$ построена непрерывная функция (вес)

$$v(t) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l P_l(t), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

удовлетворяющая условиям:

- 1) $v(t) \geq 0$;
- 2) $\text{supp } v \subset [\cos 2\tau_R, 1]$;
- 3) $v_0 > 0$, $v_l \leq 0$, $l \geq R$;
- 4) $v_l = d_l P_l(t_R) \int_{t_R}^1 P_R(t) P_l(t) d\nu(t)$, $l = 0, 1, \dots$.

Так как $|P_l(t)| \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$ [4], то из 4) следует

$$v_l \leq d_l P_l(t_R) \int_{t_R}^1 P_R(t) d\nu(t) = d_l P_l(t_R) v_0, \quad 0 \leq l \leq R-1. \quad (20)$$

Используя накопленный материал, получим оценку сверху константы Джексона при $1 \leq p < 2$. Положим

$$V(xy) = \frac{v(xy)}{v_0}, \quad K(xy) = \frac{k(xy)}{k_0}. \quad (21)$$

Из (11) следует, что функция K удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому

$$\|f - Af\|_p \leq 2^{-1/p'} \left(\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p K(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \right)^{1/p}. \quad (22)$$

Из определения (21), леммы 5, (20), (11) и 3) следует, что функции K и V удовлетворяют условиям леммы 4, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p K(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ & \leq \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p V(xy) d\sigma(x) d\sigma(y). \end{aligned} \quad (23)$$

Справедлива следующая формула интегрирования [13, с. 171]

$$\int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \int_{-1}^1 \int_{\Gamma_{\arccos t}(x)} f(y) d\gamma_{\arccos t}(y) d\nu(t).$$

Отсюда, из определения (21), 1), 2) и определения (2)

$$\begin{aligned} & \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |f(x) - f(y)|^p V(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ & = \int_{-1}^1 V(t) \int_{S^{n-1}} \int_{\Gamma_{\arccos t}(x)} |f(y) - f(x)|^p d\gamma_{\arccos t}(y) d\sigma(x) d\nu(t) \\ & = \int_{\cos 2\tau_R}^1 \frac{v(t)}{v_0} \int_{S^{n-1}} \int_{\Gamma_{\arccos t}(x)} |f(y) - f(x)|^p d\gamma_{\arccos t}(y) d\sigma(x) d\nu(t) \\ & \leq \sup_{\cos 2\tau_R \leq t \leq 1} \int_{S^{n-1}} \int_{\Gamma_{\arccos t}(x)} |f(y) - f(x)|^p d\gamma_{\arccos t}(y) d\sigma(x) \\ & = \omega^p(2\tau_R, f, S^{n-1})_p. \end{aligned} \quad (24)$$

(такой выбор функций g_ε обусловлен неоднозначностью сферических координат при $\theta_{n-2} = 0, \pi$).

Пусть $h(xy) \in L_1(S^{n-1})$, $\|h\|_1 \leq 1$; тогда

$$\begin{aligned}
 \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)|^p h(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) &= \int_{A_\varepsilon} \int_{A_\varepsilon} + 2 \int_{A_\varepsilon} \int_{A'_\varepsilon} + \int_{A'_\varepsilon} \int_{A'_\varepsilon} \\
 &= 2 \int_{A_\varepsilon} \int_{A'_\varepsilon} h(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
 &\quad + \int_{A'_\varepsilon} \int_{A'_\varepsilon} |f(\varphi_1) - f(\varphi_2)|^p h(x(\varphi_1, \theta^1) y(\varphi_2, \theta^2)) \frac{1}{4\pi^2} d\varphi_1 d\varphi_2 d\sigma'(\theta^1) d\sigma'(\theta^2) \\
 &\leq 2\sigma(A_\varepsilon) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi_1) - f(\varphi_2)|^p H(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2, \\
 x(\varphi_1, \theta^1) y(\varphi_2, \theta^2) &= \sin \theta_{n-2}^1 \dots \sin \theta_1^1 \cdot \sin \theta_{n-2}^2 \dots \sin \theta_1^2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + \cos \theta_{n-2}^1 \cdot \cos \theta_{n-2}^2, \\
 H(\varphi_1 - \varphi_2) &= \int_{B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} h(x(\varphi_1, \theta^1) y(\varphi_2, \theta^2)) d\sigma'(\theta^1) d\sigma'(\theta^2), \\
 B'_\varepsilon &= \{0 \leq \theta_k \leq \pi, \quad k = 1, \dots, n-3, \quad \varepsilon < \theta_{n-2} < \pi - \varepsilon\}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $g_\varepsilon(x) = 0$ при $x \in A_\varepsilon$, $|g_\varepsilon(x)| = |f(\varphi)| = 1$ при $x \in A'_\varepsilon$,

$$\int_{A'_\varepsilon} h(xy) d\sigma(y) \leq \int_{S^{n-1}} |h(xy)| d\sigma(y) = \|h\|_1 \leq 1.$$

Легко видеть, что $H \in L_1(T)$,

$$\begin{aligned}
 \|H\|_{L_1(T)} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(\varphi_1 - \varphi_2)| d\varphi_1 d\varphi_2 \\
 &\leq \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |h(xy)| d\sigma(x) d\sigma(y) = \|h\|_1 \leq 1,
 \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
 &\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)|^p h(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} H(\varphi_1) \int_0^{2\pi} |f(\varphi_2 + \varphi_1) - f(\varphi_2)|^p d\varphi_2 d\varphi_1 + 2\sigma(A_\varepsilon) \\
 &\leq \sup_{|\varphi_1| \leq \pi} \|f(\varphi_2 + \varphi_1) - f(\varphi_2)\|_{L_p(T)}^p \|H\|_{L_1(T)} + o(1) \\
 &\leq \omega^p(\pi, f, T)_p + o(1).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Как и в (24)

$$\begin{aligned}
 &\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)|^p h(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
 &= \int_{-1}^1 h(t) \int_{S^{n-1}} \int_{\Gamma_{\arccos t}(x)} |g_\varepsilon(y) - g_\varepsilon(x)|^p d\gamma_{\arccos t}(y) d\sigma(x) d\nu(t).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Так как h – произвольная функция,

$$\int_{-1}^1 |h| d\nu = \int_{S^{n-1}} |h(xy)| d\sigma(y) \leq 1, \quad (29)$$

то по (6), (27)–(29) и определению (2)

$$\begin{aligned} \omega^p(\pi, g_\varepsilon, S^{n-1})_p &= \sup_{\|h\|_1 \leq 1} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)|^p h(xy) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &\leq \omega^p(\pi, f, T)_p + o(1). \end{aligned} \quad (30)$$

Из определения функций g_ε следует, что $g_\varepsilon: S^{n-1} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, в частности, $g_\varepsilon(x) = \text{sign } g_\varepsilon(x)$. Отсюда и из (26)

$$\begin{aligned} &\int_{S^{n-1}} |g_\varepsilon(x)|^{p-1} \text{sign } g_\varepsilon(x) \Xi_{lK}(x) d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{\pm i k_{n-2} \varphi} d\varphi \int_{B'_\varepsilon} \xi_{lK'}(\theta) d\sigma'(\theta) = 0, \quad |\pm k_{n-2}| \leq l < R, \end{aligned}$$

т.е.

$$|g_\varepsilon(x)|^{p-1} \text{sign } g_\varepsilon(x) \perp \sum_{l=0}^{R-1} \oplus H_l.$$

Отсюда по критерию элемента наилучшего приближения [5, гл. 2]

$$\begin{aligned} E_R(g_\varepsilon, S^{n-1})_p &= \|g_\varepsilon\|_p = \|f\|_{L_p(T)} \int_{B'_\varepsilon} d\sigma'(\theta) \\ &= \|f\|_{L_p(T)} \sigma'(B'_\varepsilon) = E_R(f, T)_p (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (31)$$

Соединяя вместе (30) и (31), получим

$$\frac{E_R(g_\varepsilon, S^{n-1})_p}{\omega(\pi, g_\varepsilon, S^{n-1})_p} \geq \frac{E_R(f, T)_p}{\omega(\pi, f, T)_p} (1 + o(1)). \quad (32)$$

Хорошо известно [14], что при $1 \leq p < 2$

$$\sup_f \frac{E_R(f, T)_p}{\omega(\pi, f, T)_p} = 2^{-1/p'},$$

где $\sup$ берется по всем функциям вида (26). Отсюда и из (32) при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$D(\pi, R, S^{n-1})_p \geq 2^{-1/p'}.$$

Так как константа Джексона (3) не возрастает по δ (в силу неубывания по δ модуля непрерывности), то

$$D(\delta, R, S^{n-1})_p \geq 2^{-1/p'}, \quad 0 \leq \delta \leq \pi.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горбачев Д. В. Теорема Джексона в $\mathcal{L}_p(S^{n-1})$ // Тезисы докл. Воронеж. зимней матем. школы “Современные методы теории функций и смежные пробл. прикл. математики и механики”. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. С. 56.
- [2] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1991.
- [3] Справочник по специальным функциям. Под. ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
- [4] Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве L^2 функций на n -мерной сфере // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 333–355.
- [5] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.
- [6] Черных Н. И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 232–241.
- [7] Иванов В. И. О приближении функций в пространствах L_p // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 15–40.
- [8] Юдин В. А. Нижние оценки для сферических дизайнов // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 3. С. 213–223.
- [9] Хьюитт Э., Росс К. А. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Мир, 1975.
- [10] Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 43–110.
- [11] Benedeck A., Panzone R. The spaces L_p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. V. 28. P. 301–324.
- [12] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [13] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [14] Бердышев В. И. О теореме Джексона в L_p // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 13–16.

Тульский государственный университет
E-mail: dvg@mechmat.tsu.tula.ru

Поступило
03.12.98