Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Деревенский, Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 63–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:28:13

УДК 517.926

СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. П. Деревенский

В статье даются достаточные условия разрешимости в квадратурах систем матричных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с односторонним умножением на переменные матричные коэффициенты. Эти условия формулируются в терминах теории алгебр Ли. Рассматриваются матричные уравнения высших порядков, эквивалентные таким системам. Имеется иллюстративный пример.

Библиография: 8 названий.

В статье определяются достаточные условия разрешимости в квадратурах системы матричных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (СМЛОДУ.1) с левосторонним умножением

$$\dot{X}_i \equiv \frac{d}{dt} X_i = A_i^j X_j + B_i, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad A_i^j = A_i^j(t), \quad B_i = B_i(t), \quad (1)$$

где X_i – искомая, A_i^j и B_i – данные ограниченные по норме и непрерывные квадратные матрицы в собственном-евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$ над действительным полем $\mathbb{R}$, а по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование.

1. Интегрирование системы матричных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.. Задача о нахождении условий разрешимости в квадратурах систем (1) является естественным обобщением очень актуальных задач интегрирования матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка и систем скалярных ЛОДУ.1. Методы решения систем (1) позволяют, во-первых, упростить технику блочного оперирования при рассмотрении отдельных матричных линейных дифференциальных уравнений, а во-вторых, распространить классические методы интегрирования скалярных систем на некоммутативное множество. Такие задачи неизбежно появляются при рассмотрении первого линейного приближения динамики взаимодействия различных эволюционных процессов, описываемых отдельными МЛОДУ.1. Особое значение подобных систем заключается в том, что они могут использоваться как представление систем линейно-операторных дифференциальных уравнений, которые всегда имеют матричное представление [1]. Так что излагаемые ниже методы и результаты практически полностью могут быть перенесены и на этот вид уравнений.

Обращаясь к системе (1), отметим, что она эквивалентна одному блочно-матричному уравнению, в котором искомая матрица и свободный член имеют размерность $Kn \times n$,

а матричный коэффициент – $Kn \times Kn$. Но это уравнение может быть представлено как скалярная система Kn^2 уравнений. Для нее справедлива теорема о существовании и единственности решений [2, с. 22], дающая положительный ответ и на аналогичный вопрос для систем (1).

При обобщении методов интегрирования скалярных систем на матричный случай необходимо дать способ решения систем матричных алгебраических линейных уравнений (СМАЛУ). Таким способом может быть “обобщенный алгоритм Гаусса” [3, с. 55]. Формализуя его, дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Левым оператором Гаусса* блочной матрицы $A \equiv (A_i^j)$, у которой A_m^k – невырожденная матрица, называется линейный оператор $\Gamma(A_m^k)$, действующий на матричную последовательность (Y_l) ($l = 1, \dots, K$) по правилу

$$\Gamma(A_m^k)Y_l \equiv Y_l - A_l^k(A_m^k)^{-1}Y_m.$$

Так как $\Gamma(A_m^k)A_l^k = A_l^k - A_l^k(A_m^k)^{-1}A_m^k \equiv 0$, введенный оператор реализует “обобщенный алгоритм Гаусса” решения СМАЛУ с левосторонним умножением. Повторное применение их задает

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Произведением операторов Гаусса* называется

$$\Gamma(A_m^k)\Gamma(B_i^j)Y_l \equiv \Gamma(\Gamma(B_i^j)A_m^k)(\Gamma(B_i^j)Y_l). \quad (2)$$

В символах операторов Гаусса коэффициенты алгебраической системы характеризует

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Квадратно-блочная матрица A называется *невырожденной*, если при некоторой перенумерации ее индексов матрица

$$\Delta(A) \equiv A_1^1 \prod_{i=2}^{K-1} \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(A_{i-k}^{i-k}) A_i^i \right) \quad (3)$$

неособенна, т.е.

$$\delta(A) \equiv \det \Delta(A) \neq 0. \quad (4)$$

Теперь может быть сформулирована

ЛЕММА 1. *Решением системы матричных алгебраических линейных уравнений*

$$U_i^j X_j = V_i, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

с невырожденной матрицей (U_i^j) является

$$\begin{aligned} X_1 &= (U_1^1)^{-1} \prod_{\tau=N}^2 \Gamma(\tilde{U}_\tau^\tau) V_1, & \tilde{U}_\tau^\tau &= \prod_{k=1}^{\tau-1} \Gamma(U_{\tau-k}^{\tau-k}) U_\tau^\tau, \\ X_i &= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_{i-k}^{i-k}) U_i^i \right)^{-1} \prod_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(\tilde{U}_\tau^\tau) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_{i-k}^{i-k}) V_i \right), \\ X_N &= \left(\prod_{k=1}^{N-1} \Gamma(U_{N-k}^{N-k}) U_N^N \right)^{-1} \prod_{k=1}^{N-1} \Gamma(U_{N-k}^{N-k}) V_N. \end{aligned} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\Gamma(U_1^1)$ позволяет обратить в нуль коэффициенты при X_1 во всех уравнениях, начиная со второго. Получаемая при этом подсистема $(N-1)$ -го порядка, $\Gamma(U_1^1)U_i^j X_j = \Gamma(U_1^1)V_i$, в силу невырожденности матрицы коэффициентов допускает такую перенумерацию индексов, при которой коэффициент у X_2 во втором уравнении будет невырожденным. Это позволяет действием оператора $\Gamma(\Gamma(U_1^1)U_2^2)$ на третье и последующие уравнения получить нулевые коэффициенты при X_2 . Однако согласно (2) $\Gamma(\Gamma(U_1^1)U_2^2)(\Gamma(U_1^1)U_1^j) \equiv \Gamma(U_2^2)\Gamma(U_1^1)U_1^j$. Следовательно, при продолжении этого процесса производится “прямой ход” [4, с. 157] матричного метода Гаусса, триангулирующего систему (5),

$$\begin{aligned} U_1^j X_j &= V_i, \quad j = 1, \dots, N, \\ \Gamma(U_1^1)U_2^j X_j &= \Gamma(U_1^1)V_2, \quad j = 2, \dots, N, \\ &\dots\dots\dots \\ \prod_{k=1}^{N-1} \Gamma(U_{N-k}^{N-k})U_N^N X_N &= \prod_{k=1}^{N-1} \Gamma(U_{N-k}^{N-k})V_N. \end{aligned}$$

“Обратный ход” метода Гаусса, диагонализующий полученную треугольную систему, осуществляется действиями операторов $\Gamma(U_{i-k}^{i-k})$ на уравнения в обратном порядке с помощью преобразованной “прямым ходом” матрицы коэффициентов. Для наглядности операторы “обратного хода” нумеруются греческими индексами. При этом требование (3) гарантирует существование операторов Гаусса, и разрешимость диагонализированной системы, так как “обратный ход” не меняет диагональных коэффициентов системы, которая принимает вид

$$\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_{i-k}^{i-k})U_i^i X_i = \prod_{\tau=N}^{i+1} \Gamma(\tilde{U}_\tau^\tau) \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_{i-k}^{i-k})V_i \right).$$

Откуда и следует (6).

Заметим, что найти X_i можно простым переносом внедиагональных слагаемых триангулированной системы за знак равенства с последующим умножением на

$$\left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_{i-k}^{i-k})U_i^i \right)^{-1}.$$

При этом не используются операторы “обратного хода”, а X_i записываются в виде, соответствующем традиционному способу решения скалярных систем:

$$X_i = \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_{i-k}^{i-k})U_i^i \right)^{-1} \prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(U_{i-k}^{i-k})(V_i - A_i^j X_j). \quad (7)$$

Теперь можно дать условия разрешимости СМЛОДУ.1.

ЛЕММА 2. Однородная система (1) разрешима в квадратурах, если $A_i^j = 0$: $(i > j) \vee (i < j)$, а A_i^i принадлежат представлениям в $\mathbb{R}_n$ разрешимых $N(i)$ -мерных алгебр Ли $L_{N(i)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для первого дизъюнктивного условия последнее уравнение в однородной системе (1) принимает вид $\dot{X}_K = A_K^K X_K$, $A_K^K \in L_{N(K)}$. В этом случае [5] существует $X_K = \exp(b_K^\alpha E_{K\alpha})$ ($\alpha = 1, \dots, N(K)$), где b_K^α – скалярные функции класса $C^1(t)$, а $E_{K\alpha}$ – базисные матрицы $L_{N(K)}$. В силу ее разрешимости b_K^α определяются в квадратурах. Для $i < K$

$$\dot{X}_i = A_i^i X_i + \sum_{r=1}^{K-i} A_i^{i+r} X_{i+r}.$$

Следовательно,

$$X_i = X_{i0} \int X_{i0}^{-1} \sum_{r=1}^{K-i} A_i^{i+r} X_{i+r} dt,$$

где X_{i0} – невырожденные решения однородных уравнений $\dot{X}_{i0} = A_i^i X_{i0}$, для которых при принадлежности A_i^i разрешимым $L_{N(i)}$ экспоненциальные решения определяются в квадратурах. Последовательное нахождение X_i через X_{i+r} обеспечивает разрешимость в квадратурах всей рассматриваемой системы. Для второго дизъюнктивного условия рассуждения повторяются в порядке возрастания индекса i . Заметим, что интегрируемость МЛОДУ.1 в альтернативном мультипликативно-экспоненциальном виде для разрешимых алгебр Ли, содержащих матричный параметр уравнения, доказана в [6].

Как и в скалярном случае, свободные члены системы (1) не имеют существенного значения, так как “метод вариации постоянных” обобщается и на СМЛОДУ.1. Прежде чем обосновать это, отметим, что при сохранении классического определения фундаментальной системы решений системы (1) необходимым и достаточным условием линейной независимости K ее решений, нумеруемых верхним индексом, X_i^j , будет (4), т.е. $\delta(X) \neq 0$.

ЛЕММА 3. Решением системы (1) является

$$\begin{aligned} X_i &= X_{i0}^j Y_j, & \dot{X}_{i0}^j &= A_i^k X_{k0}^j, & \delta(X_0) &\neq 0, \\ Y_i &= \int \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(X_{i-k,0}^{i-k}) X_{i0}^i \right)^{-1} \prod_{\tau=K}^{i+1} \Gamma(\tilde{X}_{\tau 0}^\tau) \prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(X_{i-k,0}^{i-k}) B_i dt. \end{aligned} \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подставить в (1) $X_i = X_{i0}^j Y_j$, то на Y_j наложатся условия $X_{i0}^j \dot{Y}_j = B_i$. Эта СМАЛУ разрешима относительно $\dot{Y}_j$, так как блочная матрица ее коэффициентов невырождена по условию. Выбирая нумерацию индексов фундаментальной системы решений однородной системы так, чтобы матрица $\Delta(X_0)$ имела вид (3), определим $\dot{Y}_j$ в форме подинтегральных функций в (8), что и требовалось показать.

Из приведенных утверждений следует

ТЕОРЕМА 1. Если в системе (1) перенумерацией индексов A_i^j можно представить в виде

$$A_i^j = \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(T_{i-k}^{i-k})(F_i^m T_m^i) \right)^{-1} \prod_{\tau=K}^{i+1} \Gamma(\tilde{T}_\tau^\tau) \prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(T_{i-k}^{i-k})(F_i^m T_m^j), \quad (9)$$

где $\|F_i^j\| < \infty$,

$$F_i^j = \begin{cases} 0, & i < j, \\ f_i^\alpha E_{i\alpha}, & E_{i\alpha} \in L_{N(i)}, f_i^\alpha \in C^1(t), i = j, \\ F_i^j, & i > j, \end{cases} \quad (10)$$

а $L_{N(i)}$ – разрешима, то она интегрируется в квадратурах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из (6), условие (9) определяет блочную матрицу (A_i^j) как решение системы $T_i^j A_k^j = F_i^j T_j^k$. Следовательно, свертывая (1) с T_k^i , эту систему можно записать в виде $\dot{Z}_i = F_i^j Z_j + Q_i$, $Z_i = T_i^k X_k$, $Q_i = T_i^k B_k$. В силу леммы 3 решение этой системы сводится к решению однородной, а она по условию (10) является треугольной. Разрешимость $L_{N(i)}$, содержащих диагональные элементы (F_i^j) , обеспечивает в соответствии с леммой 2 интегрируемость в квадратурах однородных систем $\dot{Z}_{i0} = F_i^i Z_{i0}$. Существование же фундаментальной системы решений однородной СМЛОДУ.1 доказывается аналогично скалярному случаю [2, с. 130].

ЗАМЕЧАНИЕ. Все сказанное выше справедливо и для правосторонних систем $\dot{X}_i = X_j A_i^j + B_i$ при коммутации сомножителей в произведениях.

Работая в двумерном пространстве, полезно учитывать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В $\mathbb{R}_2$ наиболее общим видом систем, удовлетворяющих условиям теоремы 1, являются (1) с A_i^j вида (9), где

$$F_i^i = \begin{pmatrix} \varphi_{i1} & \varphi_{i2} \\ \varphi_{i3} & \varphi_{i1} + \alpha_i \varphi_{i2} - \alpha_i^{-1} \varphi_{i3} \end{pmatrix}, \quad \dot{\alpha}_i = 0, \quad \varphi_{ir} \in C^1(t), \quad r = 1, 2, 3, \quad (11)$$

а решением ее будет

$$X_i = \left(\prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(T_{i-k}^{i-k}) T_i^i \right)^{-1} \prod_{\tau=K}^{i+1} \Gamma(\tilde{T}_\tau^\tau) \prod_{k=1}^{i-1} \Gamma(T_{i-k}^{i-k}) Z_i, \quad (12)$$

$$Z_i = Z_{i0} \int Z_{i0}^{-1} (F_i^k Z_k + T_i^j B_j) dt, \quad k \neq i, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{i0} &= a_i \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \tau_i - b_i & \alpha_i^{-1} (\operatorname{sh} \tau_i + b_i) \\ -\alpha_i (\operatorname{sh} \tau_i + b_i) & \operatorname{ch} \tau_i + b_i \end{pmatrix}, \\ a_i &= \exp \frac{1}{2} \int_0^t (2\varphi_{i1} + \alpha_i \varphi_{i2} - \alpha_i^{-1} \varphi_{i3}) dt, \quad b_i = \frac{1}{2} \int_0^t (\alpha_i \varphi_{i2} - \alpha_i^{-1} \varphi_{i3}) \exp(2\tau_i) dt, \\ \tau_i &= \frac{1}{2} \int_0^t (\alpha_i \varphi_{i2} + \alpha_i^{-1} \varphi_{i3}) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (11) дан наиболее общий вид матрицы, принадлежащей разрешимой L_3 [7], являющейся прямой суммой двумерной разрешимой алгебры и одномерного центра. Если за базис ее взять матрицы

$$E_{i1} = \begin{pmatrix} -\alpha_i & 1 \\ -\alpha_i^{-1} & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad E_{i2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i^{-1} \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{i3} = E,$$

то $F_i^j = f_i^\alpha E_{i\alpha}$, где $f_i^1 = (\varphi_{i2} - \alpha_i^{-1} \varphi_{i3})/2$, $f_i^2 = -\alpha_i \varphi_{i2} - \alpha_i^{-1} \varphi_{i3}$, $f_i^3 = \varphi_{i1} + f_i^1$, причем $[E_{i1} E_{i2}] = E_{i1}$, $[E_{i\alpha} E_{i3}] = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Следовательно, если в системе (1) перейти к неизвестным $Z_k = T_k^i X_i$, то она становится треугольной, $\dot{Z}_i = F_i^j Z_j + Q_i$, $F_i^j = T_i^k A_k^l (T^{-1})_l^j$, $Q_i = T_i^j B_j$. При этом X_i находятся через Z_k по формулам (6) в виде (12), а метод вариации постоянных позволяет найти Z_k в виде (13), где альтернативные варианты треугольности объединены способом суммирования по k . Таким образом, задача интегрирования системы (1) сводится к решению K уравнений $\dot{Z}_{i0} = f_i^\alpha E_{i\alpha} Z_{i0}$. Определяя Z_{i0} в мультипликативно-экспоненциальном виде [5], [6] $Z_{i0} = \prod_{\alpha=1}^3 \exp(g_{i\alpha} E_{i\alpha})$ ($g_{i\alpha} \in C^1(t)$, $g_{i\alpha}(0) = 0$), найдем $g_{i\alpha}$ из условий $\dot{g}_{i1} + \dot{g}_{i2} g_{i1} = f_i^1$, $\dot{g}_{is} = f_i^s$ ($s = 2, 3$), что дает

$$g_{i1} = \exp \int_t^0 f_i^2 dt \int_0^t f_i^1 \exp \int_0^t f_i^2 dt dt \quad \text{и} \quad g_{is} = \int_0^t f_i^s dt.$$

Так как

$$\exp(g_{i3} E) = E \exp g_{i3},$$

$$\exp(g_{i1} E_{i1}) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_i g_{i1} & g_{i1} \\ -\alpha_i^2 g_{i1} & 1 + \alpha_i g_{i1} \end{pmatrix}, \quad \exp(g_{i2} E_{i2}) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{1}{2} g_{i2} & -\alpha_i^{-1} \operatorname{sh} \frac{1}{2} g_{i2} \\ -\alpha_i \operatorname{sh} \frac{1}{2} g_{i2} & \operatorname{ch} \frac{1}{2} g_{i2} \end{pmatrix},$$

перемножая эти экспоненты и используя введенные обозначения для a_i , b_i и τ_i , получаем (14), что и требовалось показать.

Чтобы сделать теорему 1 более наглядной и конкретной, приведем

СЛЕДСТВИЕ. Если в двумерной системе (1) можно так перенумеровать индексы, что

$$T_1^i A_i^1 (T_1^1)^{-1} T_1^2 = T_1^i A_i^2, \quad A_1^i = (T_1^1)^{-1} (P_1 T_1^i - T_1^2 A_2^i), \\ A_2^i = H^{-1}(T) (P_3 T_1^i + P_2 T_2^i - T_2^1 (T_1^1)^{-1} P_1 T_1^i),$$

где T_i^j – постоянные матрицы, $T = (T_i^j)$, $H(T) = T_2^2 - T_2^1 (T_1^1)^{-1} T_1^2$, $\delta(T) \neq 0$, $P_i = p_i^\alpha E_{i\alpha}$, $[E_{i\alpha} E_{i\beta}] = C_{\alpha\beta}^\gamma(i) E_{i\gamma}$, $E_{i\alpha} \in L_{N(i)}$, элементы P_3 и p_i^α непрерывны, а $L_{N(i)}$ разрешимы, то решение СМЛОДУ.1 будет находиться в квадратурах в виде

$$X_i = X_{i0}^j Y_j, \quad \delta(X_0) \neq 0, \quad X_0 \equiv (X_{i0}^j),$$

$$Y_1 = \int (X_{10}^1)^{-1} ((E + X_{10}^2 H^{-1}(X_0) X_{20}^1 (X_{10}^1)^{-1}) B_1 - X_{10}^2 H^{-1}(X_0) B_2) dt,$$

$$Y_2 = \int H^{-1}(X_0) (B_2 - X_{20}^1 (X_{10}^1)^{-1} B_1) dt,$$

$$X_{10}^j = (T_1^1)^{-1} ((E + T_1^2 H^{-1}(T) T_2^1 (T_1^1)^{-1} U_1 Q^j - T_1^2 H^{-1}(T) V^j),$$

$$X_{20}^j = H^{-1}(T) (V^j - T_2^1 (T_1^1)^{-1} U_1 Q^j),$$

где $V^j = U_2 \int U_2^{-1} P_3 U_1 Q^j dt$, Q^j – постоянные матрицы,

$$U_i = \exp(u_i^\alpha E_{i\alpha}), \quad u_i^\alpha = p_i^\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (u_i^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma(i))^n \right)^{-1}, \quad u_i^\alpha(0) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производя в двумерной системе (1) такую перенумерацию индексов, при которой A_i^j удовлетворяют условию (4), определим $X_i = X_{i0}^j Y_j$. Тогда на Y_j наложатся условия $X_{i0}^j \dot{Y}_j = B_i$. Одноэтапный “прямой ход” метода Гаусса осуществляет преобразование второго уравнения оператором $\Gamma(X_{i0}^1)$ к виду $\Gamma(X_{i0}^1) X_{20}^2 \dot{Y}_2 = \Gamma(X_{i0}^1) B_2$. Это равенство можно расписать как

$$(X_{20}^2 - X_{20}^1 (X_{i0}^1)^{-1} X_{i0}^2) \dot{Y}_2 = B_2 - X_{20}^1 (X_{i0}^1)^{-1} B_1,$$

что в силу невырожденности X_0 позволяет проделать “обратный ход” с помощью преобразованной матрицы X_{20}^2 , $H(X_0) = \Gamma(X_{i0}^1) X_{20}^2$. При этом изменяется лишь свободный член первого уравнения, принимающего вид $X_{i0}^1 \dot{Y}_1 = B_1 - X_{i0}^1 H^{-1}(X_0) (\Gamma(X_{i0}^1) B_2)$. Так что требование невырожденности X_0 обеспечивает возможность найти $\dot{Y}_j$ из диагонализированной системы и проинтегрировать их в указанном виде. Кстати, тот же результат дает и формула Фробениуса [3, с. 60], определяющая матрицу, обратную к блочной $(2n \times 2n)$ -матрице.

Найдем X_{i0}^j , для чего решим однородную СМЛОДУ.1, вводя новые неизвестные $U_k^j = T_k^i X_{i0}^j$, где T_k^i – постоянные матрицы с $\delta(T) \neq 0$. Первое из трех наложенных на A_i^j условий означает, что матрица $P \equiv (P_i^j)$ в определяющем ее равенстве $TA = PT$ является нижнетреугольной, причем $P_i^i \equiv P_i$, а $P_2^1 \equiv P_3$. Второе и третье условия определяют решения этого матричного равенства относительно A_k^i . Действительно, расписывая его по компонентам, имеем

$$T_1^1 A_1^i + T_1^2 A_2^i = P_1 T_1^i, \quad T_2^1 A_1^i + T_2^2 A_2^i = P_3 T_1^i + P_2 T_2^i.$$

Откуда $\Gamma(T_1^1) T_2^2 A_2^i = (T_2^2 - T_2^1 (T_1^1)^{-1} T_1^2) A_2^i = P_3 T_1^i + P_2 T_2^i - T_2^1 (T_1^1)^{-1} P_1 T_1^i$. Матрица A_1^i дана в виде (7), однако ее можно представить в эквивалентной форме (6), так как

$$T_1^1 A_1^i = \Gamma(T_2^2) \Gamma(T_1^1) P_1 T_1^i = P_1 T_1^i - T_1^2 (\Gamma(T_1^1) T_2^2)^{-1} \Gamma(T_1^1) (P_3 T_1^i + P_2 T_2^i) = P_1 T_1^i - T_1^2 A_2^i.$$

Таким образом, мы имеем матричную систему: $\dot{Z}_1^i = P_1 Z_1^i$, $\dot{Z}_2^i = P_2 Z_2^i + P_3 Z_1^i$. Решением первой пары этих уравнений будет $Z_1^i = U_1 Q_1^i$, где U_1 – нормированное решение, а Q_1^i – постоянные матрицы. При этом U_1 находится в экспоненциальной форме, показатель которой имеет проекции на базис $L_{N(1)}$, u_1^α , удовлетворяющие данной скалярной нелинейной системе [5]. Решение второй пары матричных уравнений имеет вид [2, с. 135] $Z_2^i = Z_{20}^i \int (Z_{20}^i)^{-1} P_3 Z_1^i dt$, в котором Z_{20}^i – невырожденные решения соответствующих однородных уравнений. Таким образом, $Z_2^i = U_2 (R Q_1^i + Q_2^i)$, где U_2 – нормированное решение однородного МЛОДУ.1, также имеющее вид $U_2 = \exp(u_2^\alpha E_{2\alpha})$, $R = \int U_2^{-1} P_3 U_1 dt$, а Q_2^i – постоянные матрицы. Легко убедиться, что $H(Z) = U_2 H(Q)$, т.е. $(\delta(X) \neq 0) \iff (\delta(Z) \neq 0) \iff (\delta(Q) \neq 0)$.

2. Уравнения K -го порядка. Формулы (6) позволяют определить матричные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения K -го порядка (МЛОДУ.К), эквивалентные СМЛОДУ.1. Во избежание громоздких записей будем рассматривать однородные уравнения. Это не ограничивает их общности, так как и в матричном случае действует “метод вариации постоянных”, который формулируется следующим образом.

ЛЕММА 4. *Общим решением матричного уравнения*

$$\sum_{i=0}^K A_i X^{(K-i)} = F \quad (15)$$

с непрерывными матрицами A_i и F является

$$\begin{aligned} X &= X_{j0} T^j, \quad \sum_{i=0}^K A_i X_{j0}^{(K-i)} = 0, \quad \delta(X_{j0}^{(l)}) \neq 0, \\ j &= 1, \dots, K, \quad l = 0, \dots, K-1, \quad (F_l) \equiv (0, \dots, 0, F), \\ T^j &= \int \left(\prod_{k=1}^{j-1} \Gamma(X_{j-k,0}^{(j-k-1)}) X_{j0}^{(j-1)} \right)^{-1} \prod_{\tau=K}^{j+1} \Gamma(\tilde{X}_{\tau}^{(\tau-1)}) F_{K-1} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в уравнении (15) используются левосторонние произведения, классический метод вариации постоянных [2, с. 143] необходимо обусловить лишь правосторонним умножением решений однородного уравнения на матричные константы. А условия на эти матрицы, как и наличие фундаментальной системы однородного уравнения, устанавливаются обычным способом. Решение же матричной системы

$$\begin{cases} X_{j0}^{(\alpha)} \dot{T}^j = 0, & \alpha = 0, \dots, K-2, \\ X_{j0}^{(K-1)} \dot{T}^j = F \end{cases}$$

относительно $\dot{T}^j$ определяется по формулам (6) в виде подинтегральных функций в (16). При этом, так как “прямой ход” метода Гаусса в силу однородности первых $K-1$ уравнений не меняет F , то в T^j матрицу F преобразуют лишь операторы Гаусса “обратного хода”.

Таким образом, при рассмотрении МЛОДУ.К можно ограничиться однородными уравнениями, порождаемыми системой

$$\dot{X}_i = A_i^j X_j, \quad \|A_i^j\| < \infty, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (17)$$

в которой элементы матриц A_i^j принадлежат $C^k(t)$. Как и в скалярном случае, система (17) порождает K матричных однородных уравнений K -го порядка. Для них условия разрешимости в квадратурах дает теорема 1. Чтобы воспользоваться ими, введем обозначения

$$X_i^{(l)} = A_{il}^j X_j, \quad A_{il}^j \equiv \dot{A}_{i,l-1}^j + A_{i,l-1}^k A_k^j, \quad A_{i1}^j \equiv A_i^j. \quad (18)$$

Совокупность $K - 1$ этих равенств образует СМАЛУ относительно X_α ($i \neq \alpha = 1, \dots, K$) $A_{il}^\alpha X_\alpha = X_i^{(l)} - A_{il}^i X_i$, $l = 1, \dots, K - 1$, решение которой при $i \neq 1$ (наиболее общий случай) согласно (6) имеет вид

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \left(\prod_{k=1}^{\alpha-1} \Gamma(A_{i,\alpha-k}^{\alpha-k}) A_{i\alpha}^\alpha \right)^{-1} \prod_{\tau=K-1}^{\alpha+1} \Gamma(\tilde{A}_{i\tau}^\tau) \prod_{k=1}^{\alpha-1} \Gamma(A_{i,\alpha-k}^{\alpha-k}) (X_i^{(\alpha)} - A_{i\alpha}^i X_i), \\ X_\beta &= \left(\prod_{k=2}^{\beta-1} \Gamma(A_{i,\beta-k}^{\beta-k}) A_{i,\beta-1}^\beta \right)^{-1} \prod_{\tau=K-1}^{\beta+1} \Gamma(\tilde{A}_{i\tau}^\tau) \prod_{k=2}^{\beta-1} \Gamma(A_{i,\beta-k}^{\beta-k}) (X_i^{(\beta-1)} - A_{i,\beta-1}^i X_i), \\ \alpha &< i < \beta \end{aligned} \quad (19)$$

(решение записано для такой нумерации индексов, при которой $\delta(A_{il}^\alpha) \neq 0$). Если же $i = 1$, то

$$X_\alpha = \left(\prod_{k=2}^{\alpha-1} \Gamma(A_{i,\alpha-k}^{\alpha-k}) A_{1,\alpha-1}^\alpha \right)^{-1} \prod_{\tau=K-1}^\alpha \Gamma(\tilde{A}_{1\tau}^\tau) \prod_{k=2}^{\alpha-1} \Gamma(A_{1,\alpha-k}^{\alpha-k}) (X_1^{(\alpha-1)} - A_{1,\alpha-1}^1 X_1).$$

Подставляя X_α из (19) в равенство $X_i^{(K)} = A_{iK}^\alpha X_\alpha + A_{ii}^i X_i$, где по i нет суммирования, получаем все K МЛОДУ.К:

$$\begin{aligned} X_i^{(K)} &= A_{iK}^1 (A_{ii}^i)^{-1} \prod_{\tau=K-1}^2 \Gamma(\tilde{A}_{i\tau}^\tau) (\dot{X}_i - A_{ii}^i X_i) \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{i-1} A_{iK}^\alpha \left(\prod_{k=1}^{\alpha-1} \Gamma(A_{i,\alpha-k}^{\alpha-k}) A_{i\alpha}^\alpha \right)^{-1} \\ &\times \prod_{\tau=K-1}^{\alpha+1} \Gamma(\tilde{A}_{i\tau}^\tau) \prod_{k=1}^{\alpha-1} \Gamma(A_{i,\alpha-k}^{\alpha-k}) (X_i^{(\alpha)} - A_{i\alpha}^i X_i) \\ &+ \sum_{\beta=i+1}^{K-1} A_{iK}^\beta \left(\prod_{k=2}^{\beta-1} \Gamma(A_{i,\beta-k}^{\beta-k}) A_{i,\beta-1}^\beta \right)^{-1} \\ &\times \prod_{\tau=K-1}^{\beta+1} \Gamma(\tilde{A}_{i\tau}^\tau) \prod_{k=2}^{\beta-1} \Gamma(A_{i,\beta-k}^{\beta-k}) (X_i^{(\beta-1)} - A_{i,\beta-1}^i X_i) \\ &+ A_{iK}^K \left(\prod_{k=2}^{K-1} \Gamma(A_{i,K-k}^{K-k}) A_{i,K-1}^K \right)^{-1} \prod_{k=2}^{K-1} \Gamma(A_{i,K-k}^{K-k}) (X_i^{(K-1)} - A_{i,K-1}^i X_i), \end{aligned} \quad (20)$$

для которых справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если в уравнении (20) A_{il}^j определяются в виде (18), а A_{ii}^j при перенумерации i и j можно представить в виде (9), то оно интегрируется в квадратурах.

Доказательство этого утверждения следует из эквивалентности решений, полученных МЛОДУ.К и исходной СМЛОДУ.1, которая при условии (9) интегрируется в квадратурах в силу теоремы 1.

3. ПРИМЕР. Пусть в системе (1) $K = 2$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}(1-t) & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}t & -1-2t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{2}(1+t) & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{2}t & 1+2t \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Эта система триангулируется преобразованием $T_i^j A_j^k = F_i^j T_j^k$, где

$$(T_i^j) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (F_i^j) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (21) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = F_1^1 Z_1 + Q_1, \\ \dot{Z}_2 = F_2^1 Z_1 + F_2^2 Z_2, \end{cases} \quad Z_i = T_i^j X_j, \quad Q_1 = T_1^j B_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение первого из этих уравнений имеет вид $Z_1 = Z_{10} \int Z_{10}^{-1} Q_1 dt$, а $\dot{Z}_{10} = F_1^1 Z_{10}$. Последнее уравнение эквивалентно матричному уравнению с постоянным коэффициентом и легко интегрируется:

$$\begin{aligned} (\dot{Z}_{10} = F_1^1 Z_{10}) &\iff \left(\frac{dZ_{10}}{d\tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z_{10} : \tau_1 = \frac{1}{2}t^2 \right) \\ &\iff \left(Z_{10} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_1 C \right). \end{aligned}$$

Полагая $C = E$, имеем

$$Z_{10} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau_1 = \begin{pmatrix} \text{ch } \tau_1 & \text{sh } \tau_1 \\ \text{sh } \tau_1 & \text{ch } \tau_1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \begin{pmatrix} \text{ch } \tau_1 & \text{sh } \tau_1 \\ \text{sh } \tau_1 & \text{ch } \tau_1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \text{ch } \tau_1 & -\text{sh } \tau_1 \\ -\text{sh } \tau_1 & \text{ch } \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \text{sh } \tau_1 \int \text{ch } \tau_1 dt - \text{ch } \tau_1 \int \text{sh } \tau_1 dt \\ 0 & \text{ch } \tau_1 \int \text{ch } \tau_1 dt - \text{sh } \tau_1 \int \text{sh } \tau_1 dt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Зная Z_1 , можно согласно (13) определить $Z_2 = Z_{20} \int Z_{20}^{-1} F_2^1 Z_1 dt$, $\dot{Z}_{20} = F_2^2 Z_{20}$. Так как F_2^2 имеет вид (11) при $\varphi_{21} = 1$, $\varphi_{22} = -\varphi_{23} = t$, то Z_{20} находится по формуле (14), в которой $\tau_2 = 0$, $a_2 = \exp(t + \tau_1) - 1$, $b_2 = t$,

$$Z_{20} = a_2 \begin{pmatrix} 1-t^2 & t^2 \\ -t^2 & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

Найдем подынтегральное выражение в Z_2 . Имеем

$$\begin{aligned} Z_{20}^{-1} F_2^1 Z_1 &= a_2^{-1} \begin{pmatrix} 1+t^2 & -t^2 \\ t^2 & 1-t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z_1 = a_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} Z_1 \\ &= a_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -t^2 R \\ 0 & (1-t^2)R \end{pmatrix}, \\ R &= \operatorname{ch} \tau_1 \int \operatorname{ch} \tau_1 dt - \operatorname{sh} \tau_1 \int \operatorname{sh} \tau_1 dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Z_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1-t^2 & t^2 \\ -t^2 & 1+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -\int a_2^{-1} t^2 R dt \\ c_2 & \int a_2^{-1} (1-t^2) R dt \end{pmatrix}, \quad \dot{c}_i = 0.$$

Из равенств

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_2 = Z_1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X_2 = Z_2$$

в соответствии с леммой 1 находим X_i . Так как из (3) имеем

$$\begin{aligned} \Delta(T) &= T_1^1(T_2^2 - T_2^1(T_1^1)^{-1}T_1^2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то $\delta(T) \neq 0$ и по формулам (6) находим

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z_1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} Z_2, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} Z_2.$$

Определим уравнения второго порядка, эквивалентные системе (21). Так как она является неоднородной, вместо (20) имеем $\ddot{X}_i = A_{i2}^j X_j + \dot{B}_i + A_i^j B_j$. При этом i и j принимают лишь два значения, $j = (i \vee \bar{i})$, а $X_{\bar{i}} = (A_i^{\bar{i}})^{-1}(\dot{X}_i - A_i^i X_i - B_i)$. Следовательно, $\ddot{X}_i = A_{i2}^i X_i + A_{i2}^{\bar{i}}(A_i^{\bar{i}})^{-1} \times (\dot{X}_i - A_i^i X_i - B_i) + \dot{B}_i + A_i^{\bar{i}} B_i$, что можно записать в виде

$$\ddot{X}_i + P_i \dot{X}_i + Q_i X_i = R_i,$$

где

$$\begin{aligned} -P_i &= A_{i2}^{\bar{i}}(A_i^{\bar{i}})^{-1} = (\dot{A}_i^{\bar{i}} + A_i^j A_j^{\bar{i}})(A_i^{\bar{i}})^{-1}, \\ -Q_i &= P_i A_i^i + \dot{A}_i^i + A_i^j A_j^i, \quad R_i = \dot{B}_i + (A_i^i + P_i)B_i + A_i^{\bar{i}} B_{\bar{i}}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $i = 1$ ($\bar{i} = 2$) имеем

$$\begin{aligned}
 -P_1 &= \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}(1-t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}t & -1-t \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}t & 1+2t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}t & -1-2t \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -t - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{3}{2} & 2t + \frac{2}{t} \end{pmatrix}, \\
 -Q_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ t^2 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{2} & -2t - 2 - \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}(1-t) & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}(1-t) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}t & -1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{2}(1+t) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} t^2 & -2 \\ 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2t} & -2t - 1 - \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \\
 R_1 &= \left(\begin{pmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{2}(1-t) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & 0 \\ t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{2} & -2t - 2 - \frac{1}{t} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & -\frac{1}{2}t - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, найденное X_1 является решением уравнения

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}_1 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & 0 \\ t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{2} & -2t - 2 - \frac{1}{t} \end{pmatrix} \dot{X}_1 + \begin{pmatrix} -t^2 & 2 \\ -2t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2t} & 2t + 1 + \frac{1}{t} \end{pmatrix} X_1 \\
 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & -\frac{1}{2}t - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогично, для $i = 2$ имеем

$$\begin{aligned}
 -P_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 2(t-1) + \frac{2}{t(t+1)} \\ \frac{1}{2} & 2(t+1) + \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 -Q_2 &= \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 - \frac{1}{t(t+1)} & 2(2t+1)(1-t - \frac{1}{t(t+1)}) \\ \frac{t}{2(t+1)} - 1 & 2 - (2t+1)(1 + \frac{1}{t+1}) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

что определяет следующее уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}_2 - \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 2(t-1) + \frac{2}{t(t+1)} \\ \frac{1}{2} & 2(t+1) + \frac{1}{t+1} \end{pmatrix} \dot{X}_2 - \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 - \frac{1}{t(t+1)} & 2(2t+1)(1-t - \frac{1}{t(t+1)}) \\ \frac{t}{2(t+1)} - 1 & 2 - (2t+1)(1 + \frac{1}{t+1}) \end{pmatrix} X_2 \\
 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

В заключение отметим, что все полученные результаты полностью переносятся на правосторонние СМЛОДУ.1, разумеется, при коммутации матричных сомножителей во

всех произведениях. Их можно использовать и для определения условий разрешимости в квадратурах линейных систем с разносторонним умножением

$$\dot{X}_i = A_i^j X_j + X_k B_i^k + C_i,$$

которые введением новых переменных сводятся к решению отдельных лево- и правосторонних систем.

Более того, путем редуцирования матричных уравнений [8] предлагаемый метод интегрирования систем может быть распространен и на СМЛОДУ.1 с двусторонним умножением

$$\dot{X}_i = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N A_{ik}^j X_j B_{ik}^j + C_i,$$

позволяя существенно обобщить теорему 2 этой работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Адо И. Д. Представление алгебр Ли матрицами // УМН. 1947. Т. 11. №6 (22). С. 159–173.
- [2] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
- [3] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [4] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.–Л.: ГИФМЛ, 1963.
- [5] Деревенский В. П. Экспоненциальное решение матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Изв. вузов. Матем. 1981. № 7. С. 31–33.
- [6] Wei J., Norman E. On global representations of the solutions of linear differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. № 2. P. 327–334.
- [7] Деревенский В. П. Интегрируемость уравнения Риккати и линейного однородного дифференциального уравнений второго порядка // Изв. вузов. Матем. 1987. № 5. С. 33–40.
- [8] Деревенский В. П. Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 35–42.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Поступило

01.07.96

Исправленный вариант

10.08.98