Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Дроздовский, Топологическая структура на множестве непрерывных функций с различными областями определения, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 76–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 11:00:02

УДК 515.122.55

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА МНОЖЕСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

С. А. Дроздовский

Построено топологическое пространство непрерывных функций, являющееся обобщением ранее изученного пространства функций, определенных на замкнутых отрезках. Изучены свойства типа метризуемости этого пространства. Полученные результаты применимы в топологической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиография: 5 названий.

Изученное в данной работе новое топологическое пространство функций $F(U)$ является обобщением известных пространств $C_s(U)$, $C_s^+(U)$, $C_s^-(U)$, $C_s^\pm(U)$ (см. определения ниже), которые являются базовыми в топологической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пространство $C_s(U)$ подробно описано в [1] и [2], $C_s^+(U)$ и $C_s^-(U)$ использовались в [3], пространство $C_s^\pm(U)$ рассмотрено в [4]. Там же изложен ряд результатов теории, полученных при помощи этих пространств.

Множество $F(U)$ есть объединение множеств $C_s(U)$, $C_s^+(U)$, $C_s^-(U)$, $C_s^\pm(U)$, а введенная на $F(U)$ топология индуцирует на них их собственные топологии. Рассмотренное в конце статьи пространство $F^*(U)$ обобщает аналогичную конструкцию, использовавшуюся в [4].

В работе исследованы свойства типа метризуемости пространства $F(U)$ и его подмножеств.

1. Пространство $F(U)$. Пусть U – открытое подмножество произведения $\mathbb{R} \times M$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, а M – метрическое сепарабельное локально-компактное пространство. Мы будем рассматривать непрерывные функции из $\mathbb{R}$ в M , определенные на различных сегментах, интервалах и полуинтервалах, графики которых являются подмножествами множества U . Обозначим через $C_s(U)$ множество всех непрерывных функций вида $z : [t_1, t_2] \rightarrow M$, через $C_s^+(U)$ и $C_s^-(U)$ пространства всех непрерывных функций вида $z : [t_0, t) \rightarrow M$ и $z : (t, t_0] \rightarrow M$ соответственно, графики которых замкнуты в U ; t может принимать бесконечные значения. Символом $C_s^\pm(U)$ обозначим множество всех непрерывных функций $(t_1, t_2) \rightarrow M$ с замкнутыми в U графиками. Множество $F(U)$ определим как объединение множеств $C_s(U)$, $C_s^+(U)$, $C_s^-(U)$, $C_s^\pm(U)$.

Топология, которую мы введем на $F(U)$, соответствует сходимости, являющейся естественным обобщением равномерной сходимости функций, определенных на отрезке.

Пусть $z \in C_s(U)$. Последовательность $\{z_i : i < \omega\} \subset F(U)$ сходится к z тогда и только тогда, когда существует такое i_1 , что для всех $i > i_1$ $z_i \in C_s(U)$, семейство $\{z_i : i_1 < i < \omega\}$ равномерно непрерывно, и для каждого замкнутого отрезка $I \subset \langle \pi(z) \rangle$, где $\pi(z)$ – область определения z , и открытого интервала $\hat{I} \supset \pi(z)$ существует такое i_2 , что для всех $i > i_2$ $I \subseteq \pi(z_i) \subset \hat{I}$, и $\|z_i|_I - z|_I\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, где $\|\cdot\|$ обозначает норму равномерной сходимости.

Пусть $z \in C_s^+(U)$. Последовательность $\{z_i : i < \omega\}$ сходится к z в том и только в том случае, если существует такое i_1 , что для всех $i > i_1$ $z_i \in C_s(U) \cup C_s^+(U)$, и для каждого замкнутого отрезка $I \subset \langle \pi(z) \rangle$ и открытого интервала $\hat{I} \supset \pi(z)$ существует такое i_2 , что для всех $i > i_2$ $I \subseteq \pi(z_i) \subset \hat{I}$, семейство $\{z_i|_{\pi(z_i) \cap (-\infty, \sup I]} : i_2 < i < \omega\}$ равномерно непрерывно, и $\|z_i|_I - z|_I\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Сходимость к элементам из $C_s^-(U)$ определяется аналогично. Достаточно в определении для $C_s^+(U)$ заменить все символы “+” на символ “–”, а также полуинтервал $(-\infty, \sup I]$ на полуинтервал $[\inf I, +\infty)$.

В случае, когда $z \in C_s^\pm(U)$, последовательность $\{z_i : i < \omega\}$ элементов из $F(U)$ сходится к z тогда и только тогда, когда для любого замкнутого отрезка $I \subset \pi(z)$ существует такое i_1 , что для всех $i > i_1$ $I \subseteq \pi(z_i)$, и $\|z_i|_I - z|_I\| \rightarrow 0$.

Опишем теперь базу топологии пространства $F(U)$, соответствующую заданной сходимости.

Сначала определим для каждого $z \in F(U)$ множества $c_s(z)$, $c_s^+(z)$, $c_s^-(z)$.

Пусть $z \in C_s(U)$, $\pi(z) = [t_1, t_2]$. Тогда

$$c_s(z) = \{z|_{[t'_1, t'_2]} : t_1 \leq t'_1 \leq t'_2 \leq t_2\}, \quad c_s^+(z) = \{z|_{[t_1, t]} : t_1 \leq t \leq t_2\}, \\ c_s^-(z) = \{z|_{[t, t_2]} : t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Если $z \in C_s^+(U)$, $\pi(z) = [t_1, t_2)$, то

$$c_s(z) = \{z|_{[t'_1, t'_2]} : t_1 \leq t'_1 \leq t'_2 < t_2\}, \quad c_s^+(z) = \{z|_{[t_1, t]} : t_1 \leq t < t_2\}, \quad c_s^-(z) = \emptyset.$$

Если $z \in C_s^-(U)$, $\pi(z) = (t_1, t_2]$, то

$$c_s(z) = \{z|_{[t'_1, t'_2]} : t_1 < t'_1 \leq t'_2 \leq t_2\}, \quad c_s^-(z) = \{z|_{[t, t_2]} : t_1 < t \leq t_2\}, \quad c_s^+(z) = \emptyset.$$

Для $z \in C_s^\pm(U)$, $\pi(z) = (t_1, t_2)$,

$$c_s(z) = \{z|_{[t'_1, t'_2]} : t_1 < t'_1 \leq t'_2 < t_2\}, \quad c_s^+(z) = c_s^-(z) = \emptyset.$$

В дальнейшем мы будем обозначать график элемента $z \in F(U)$ и сам элемент одним и тем же символом z .

Базу окрестностей точки $z \in C_s(U)$, как было определено в [1], составляют множества вида $G(z, V) = V^0 = C_s(U) \cap V$, где V – некоторая окрестность Виеториса точки z в $\exp(U)$.

Пусть $z \in C_s^+(U)$. Элемент базы в этой точке определим как множество

$$G(z, y, V) = V^+ = \{x \in C_s(U) \cup C_s^+(U) : c_s^+(x) \cap V \neq \emptyset\},$$

где V – виеторисовская окрестность какого-либо элемента $y \in c_s^+(z)$.

Окрестность точки $z \in C_s^-(U)$ получается из $G(z, y, V)$, $z \in C_s^+(U)$, заменой всех символов “+” на “-”.

Для $z \in C_s^\pm(U)$ окрестность

$$G(z, y, V) = V^\pm = \{x \in F(U) : c_s(x) \cap V \neq \emptyset\},$$

где V – окрестность Виеториса точки $y \in c_s(z)$.

Заметим, что подмножества $C_s(U)$, $C_s(U) \cup C_s^+(U)$, $C_s(U) \cup C_s^-(U)$ открыты в $F(U)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пространство $F(U)$ имеет счетную базу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $\text{exp}(U)$, как известно, обладает счетной базой. Пусть $\mathcal{B}$ – некоторая счетная база пространства $\text{exp}(U)$. Семейство $\{V^0, V^+, V^-, V^\pm : V \in \mathcal{B}\}$, в чем нетрудно убедиться, является счетной базой для $F(U)$.

2. Обобщенная метризуемость. В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты, касающиеся свойств типа метризуемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство X называется *обобщенно метризуемым* или *о-метризуемым о-метрикой* δ , если существует неотрицательная функция $\delta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, обладающая свойствами:

- 1) $\delta(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) подмножество U пространства X открыто тогда и только тогда, когда для любого $x \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\{y \in X : \delta(x, y) < \varepsilon\} \subseteq U$.

Если выполняются свойства 1) и 2) и, кроме того, $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ для любых $x, y \in X$, то пространство X симметризуемо симметрикой δ .

Если помимо свойств 1) и 2) выполняется свойство: для всех $x, y, z \in X$ $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$, то о-метрика δ называется Δ -метрикой, а пространство X Δ -метризуемым.

Условие 2) равносильно условию 2'). Подмножество F пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда для любого $x \notin F$ $\delta(x, F) = \inf\{\delta(x, y) : y \in F\} > 0$.

Очевидно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *о-метризуемое топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 .*

ЛЕММА 1. *Пусть топологическое пространство X о-метризуемо о-метрикой δ такой, что функция $\delta'(x, y) = \delta(y, x)$ тоже является о-метрикой. Тогда X – симметризуемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметрика на X задается очевидным образом формулой $r(x, y) = \max\{\delta(x, y); \delta(y, x)\}$.

ЛЕММА 2. *Если топологическое пространство X о-метризуемо о-метрикой δ , причем функция*

$$r(x, y) = \inf_{\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq X, n < \omega} \{\delta(x, z_1) + \delta(z_1, z_2) + \dots + \delta(z_n, y)\}$$

является о-метрикой, то X Δ -метризуемо и r является соответствующей Δ -метрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 r(x, z) + r(z, y) &= \inf_{\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq X, n < \omega} \{\delta(x, u_1) + \delta(u_1, u_2) + \dots + \delta(u_n, z)\} \\
 &\quad + \inf_{\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq X, m < \omega} \{\delta(z, v_1) + \delta(v_1, v_2) + \dots + \delta(v_m, y)\} \\
 &\geq \inf_{\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\} \subseteq X, n+m < \omega} \{\delta(x, u_1) + \delta(u_1, u_2) + \dots + \delta(u_n, z) \\
 &\quad + \delta(z, v_1) + \delta(v_1, v_2) + \dots + \delta(v_m, y)\} \\
 &\geq \inf_{\{u_1, \dots, u_n, w, v_1, \dots, v_m\} \subseteq X, n+m < \omega} \{\delta(x, u_1) + \delta(u_1, u_2) + \dots + \delta(u_n, w) \\
 &\quad + \delta(w, v_1) + \delta(v_1, v_2) + \dots + \delta(v_m, y)\} = r(x, y).
 \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях леммы 2 δ – симметрика, то пространство X метризуемо.

ЛЕММА 3 [5]. Пусть топологическое пространство X Δ -метризуемо Δ -метрикой δ . Кроме того, δ обладает свойством: для любой точки $x \in X$ и произвольной последовательности $\{y_n : n < \omega\} \subseteq X$ из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x, y_n) = 0$, следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(y_n, x) = 0$. Тогда X метризуемо.

Доказательство заключается в проверке того, что $r(x, y) = \max\{\delta(x, y); \delta(y, x)\}$ есть метрика на X .

ЛЕММА 4 [5]. Свойство топологического пространства “быть o -метризуемым данной o -метрикой δ ” наследственно по замкнутым подмножествам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – замкнутое подпространство o -метризуемого o -метрикой δ пространства X , и пусть $F \subset Y$. Если F замкнуто в Y , то оно замкнуто и в X . Следовательно, для любой точки $x \in Y \setminus F$ $\delta(x, F) > 0$. Если F не замкнуто в Y , то оно не замкнуто и в X , т.е. существует точка $x \in X \setminus F$ такая, что $\delta(x, F) = 0$ и, следовательно, $\delta(x, Y) = 0$. Но Y замкнуто, поэтому $x \in Y$.

Более подробная информация об o -метризуемости содержится в [5].

3. Свойства типа метризуемости пространства $F(U)$. Здесь мы сконструируем ряд o -метрик для различных подмножеств пространства $F(U)$.

ТЕОРЕМА 1. Пространства $F^+(U) = C_s(U) \cup C_s^+(U)$ и $F^-(U) = C_s(U) \cup C_s^-(U)$ метризуемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим метрику на $F^+(U)$ явным образом. Для $F^-(U)$ метрика строится аналогично.

Поскольку пространство M локально-компактно, существует одноточечная компактификация Александрова $U^* = U \cup \{u_\infty\}$ множества U , которая, так же как и M , имеет счетную базу и потому метризуема некоторой метрикой ρ . Соответственно пространство $\text{exp}_c U^*$ метризуемо метрикой H .

Определим модифицированную метрику Хаусдорфа h в пространстве $C_s(U)$:

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= \max\{g(x, y); g(y, x)\}, \\
 g(x, y) &= \max\left\{ \sup_{v \in c_s(x)} \inf_{s \in c_s(y)} H(v, s); \sup_{v \in c_s^+(x)} \inf_{s \in c_s^+(y)} H(v, s); \sup_{v \in c_s^-(x)} \inf_{s \in c_s^-(y)} H(v, s) \right\}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что h – метрика, задающая топологию Виеториса на $C_s(U)$.

Докажем теорему для $F^+(U)$. Для $F^-(U)$ доказательство аналогично.

Введем в пространстве $F^+(U)$ симметрику, определенную формулой

$$\delta(x, y) = \inf_{(v, s) \in D(f_{xy})} f_{xy}(v, s),$$

где $D(f_{xy}) \subseteq c_s(x) \times c_s(y)$ – область определения функции f_{xy} .

Для $x, y \in C_s(U)$

$$D(f_{xy}) = \{x\} \times \{y\}, \quad f_{xy}(v, s) = f_{yx}(s, v) = h(v, s).$$

В случае, когда $x \in C_s(U)$, $y \in C_s^+(U)$ или $x, y \in C_s^+(U)$,

$$\begin{aligned} D(f_{xy}) &= c_s^+(x) \times c_s^+(y), \quad D(f_{yx}) = c_s^+(y) \times c_s^+(x), \\ f_{xy}(v, s) &= f_{yx}(s, v) = h(v, s) + \rho(v(\sup \pi(v)), u_\infty) + \rho(s(\sup \pi(s)), u_\infty). \end{aligned}$$

Замкнутость графика элемента $z \in F^+(U)$ в U означает, что либо $z \in C_s(U)$ и $\rho(z, u_\infty) > 0$, либо $z \in C_s^+(U)$, и при $t \rightarrow \sup \pi(z)$ $\rho(z(t), u_\infty) \rightarrow 0$. Отсюда с очевидностью следует, что δ соответствует заданной топологии.

Докажем, что o -метрика δ удовлетворяет условию леммы 2.

Пусть x и y – какие-либо два элемента множества $F^+(U)$ и $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq F^+(U)$ – конечное упорядоченное множество такое, что $z_1 = x$, $z_n = y$, $n > 2$. Для каждой пары соседних элементов z_i, z_{i+1} , $1 \leq i \leq n-1$, выберем в соответствии с определением величины δ пару компактов $(v_{(i+1)i}, v_{(i+1)i}) \in D(f_{z_i z_{i+1}})$, удовлетворяющих неравенству

$$|f_{z_i z_{i+1}}(v_{(i+1)i}, v_{(i+1)i}) - \delta(z_i, z_{i+1})| < \frac{1}{2} \delta(z_i, z_{i+1}). \quad (3.1)$$

Рассмотрим два возможных варианта.

1) $x, y \in C_s(U)$. Пусть i_0 – такой наименьший номер, что для всех i , $i_0 \leq i \leq n$, $z_i \in C_s(U)$.

Если $i_0 = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta(z_i, z_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} h(z_i, z_{i+1}) \geq h(z_1, z_n) = \delta(x, y).$$

Пусть $i_0 > 1$; тогда $z_{i_0-1} \in C_s^+(U)$.

Если $h(z_{i_0}, y) < \frac{1}{2} \rho(y, u_\infty)$, то, учитывая определение величины h , имеем

$$\begin{aligned} \rho(v_{i_0(i_0-1)}(\sup \pi(v_{i_0(i_0-1)})), u_\infty) &\geq \rho(y, u_\infty) - \rho(v_{i_0(i_0-1)}(\sup \pi(v_{i_0(i_0-1)})), y) \\ &\geq \rho(y, u_\infty) - h(z_{i_0}, y) > \frac{1}{2} \rho(y, u_\infty). \end{aligned}$$

Из неравенства (3.1) $\delta(z_i, z_{i+1}) > \frac{2}{3} \rho(v_{(i+1)i}(\sup \pi(v_{(i+1)i})), u_\infty)$ для каждого $i < n$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta(z_i, z_{i+1}) > \delta(z_{i_0-1}, z_{i_0}) > \frac{1}{3} \rho(y, u_\infty).$$

Если $h(z_{i_0}, y) \geq \frac{1}{2}\rho(y, u_\infty)$, то $i_0 < n$ и

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta(z_i, z_{i+1}) \geq \sum_{i=i_0}^{n-1} \delta(z_i, z_{i+1}) = \sum_{i=i_0}^{n-1} h(z_i, z_{i+1}) \geq h(z_{i_0}, z_n) \geq \frac{1}{2}\rho(y, u_\infty).$$

2) Хотя бы один из элементов x, y принадлежит $C_s^+(U)$. Используя определение метрики h и неравенство (3.1), легко можно проверить, что среди компактов $v_{i(i+1)}, v_{i(i-1)}$ найдется такой компакт w_{i_0} , для которого можно последовательно построить содержащую его цепь $\{w_i \in c_s(z_i) : 1 \leq i \leq n\}$, для которой при каждом i , $1 < i < n$,

$$w_i \subseteq v_{i(i-1)} \cap v_{i(i+1)}, \quad w_1 \subseteq v_{12}, \quad w_n \subseteq v_{n(n-1)}$$

и $h(w_i, w_{i+1}) < \frac{3}{2}\delta(z_i, z_{i+1})$ при $1 \leq i \leq n-1$. Из неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} h(w_1, w_n) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} h(w_i, w_{i+1}), \\ \rho(w_1(\sup \pi(w_1)), u_\infty) &< \sum_{i=1}^{n-1} h(w_i, w_{i+1}) + \rho(w_{i_0}(\sup \pi(w_{i_0})), u_\infty), \\ \rho(w_n(\sup \pi(w_n)), u_\infty) &< \sum_{i=1}^{n-1} h(w_i, w_{i+1}) + \rho(w_{i_0}(\sup \pi(w_{i_0})), u_\infty). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $h(w_i, w_{i+1}) < \frac{3}{2}\delta(z_i, z_{i+1})$ и $\rho(w_{i_0}(\sup \pi(w_{i_0})), u_\infty) < \frac{3}{2}\delta(z_{i_0}, z_{i_0 \pm 1})$ из (3.1), получим

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= \delta(z_1, z_n) < \rho(w_1(\sup \pi(w_1)), u_\infty) \\ &+ \rho(w_n(\sup \pi(w_n)), u_\infty) + h(w_1, w_n) < 7\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \delta(z_i, z_{i+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что для любого фиксированного $x \in F^+(U)$ и переменного $y \in F^+(U)$ из $r(x, y) \rightarrow 0$ следует, что $\delta(x, y) \rightarrow 0$, где $r(x, y)$ – величина, определенная в условии леммы 2. Обратная импликация очевидна. Поэтому r является o -метрикой, и симметрика δ удовлетворяет условиям следствия из леммы 2, откуда $F^+(U)$ метризуемо метрикой r .

ТЕОРЕМА 2. *Пространство $F(U)$ Δ -метризуемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать утверждение, построим соответствующую Δ -метрику. Так же как и в предыдущей теореме,

$$\delta(x, y) = \inf_{(v, s) \in D(f_{xy})} f_{xy}(v, s), \quad D(f_{xy}) \subseteq c_s(x) \times c_s(y).$$

Для $x, y \in C_s(U)$

$$D(f_{xy}) = \{x\} \times \{y\}, \quad f_{xy}(v, s) = f_{yx}(s, v) = h(v, s).$$

Если $x \in C_s^+(U)$, $y \in C_s(U)$, то

$$D(f_{xy}) = c_s^+(x) \times c_s^+(y), \quad D(f_{yx}) = \{y\} \times c_s^+(x), \\ f_{xy}(v, s) = f_{yx}(s, v) = h(v, s) + H(x \setminus v, \{u_\infty\}).$$

Случай $x \in C_s^-(U)$, $y \in C_s(U)$ полностью аналогичен предыдущему; $\delta(x, y)$ и $\delta(y, x)$ получаются из определенных выше заменой всех символов “+” на символ “-”.

Если $x \in C_s^\pm(U)$, $y \in C_s(U)$, то

$$D(f_{xy}) = c_s(x) \times c_s(y), \quad D(f_{yx}) = \{y\} \times c_s(x), \\ f_{xy}(v, s) = f_{yx}(s, v) = h(v, s) + H(x \setminus v, \{u_\infty\}).$$

В случае, когда $x \in C_s^+(U)$, $y \in C_s^-(U)$,

$$D(f_{xy}) = c_s^+(x) \times c_s^-(y), \quad D(f_{yx}) = c_s^-(y) \times c_s^+(x), \\ f_{xy}(v, s) = f_{yx}(s, v) = h(v, s) + H(x \setminus v, \{u_\infty\}) + H(y \setminus s, \{u_\infty\}).$$

Пусть $x \in C_s^\pm(U)$, $y \in C_s^+(U)$. Тогда

$$D(f_{xy}) = c_s(x) \times c_s(y), \quad f_{xy}(v, s) = h(v, s) + H(x \setminus v, \{u_\infty\}), \\ D(f_{yx}) = c_s^+(y) \times c_s(x), \quad f_{yx}(s, v) = h(s, v) + H(y \setminus s, \{u_\infty\}) + H(x \setminus v, \{u_\infty\}).$$

В случае $x \in C_s^\pm(U)$, $y \in C_s^-(U)$ величина $\delta(x, y)$ получается из вышеуказанной заменой символов “+” на “-”.

Для $x, y \in C_s^\pm(U)$

$$D(f_{xy}) = c_s(x) \times c_s(y), \quad f_{xy}(v, s) = h(v, s) + H(x \setminus v, \{u_\infty\}) + H(y \setminus s, \{u_\infty\}).$$

Соответствие δ топологии пространства $F(U)$ следует из тех же соображений, которые приводились для o -метрики, сконструированной при доказательстве теоремы 1. Разница лишь в том, что здесь существенную роль играет тот факт, что для фиксированного $x \in F(U) \setminus C_s(U)$ и переменного $v \in c_s(x)$ $v \rightarrow x$ влечет за собой $H(x \setminus v, \{u_\infty\}) \rightarrow 0$ и наоборот.

Докажем, что o -метрика δ удовлетворяет условиям леммы 2. Пусть $x, y \in F(U)$, $\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq F(U)$, $z_1 = x$, $z_n = y$, $n > 2$. Для каждой пары соседних элементов z_i, z_{i+1} , $1 \leq i \leq n-1$, выберем пару компактов $(v_{i(i+1)}, v_{(i+1)i}) \in D(f_{z_i z_{i+1}})$, удовлетворяющую неравенству (3.1). Построим по индукции от больших номеров к меньшим компакты $w_{i(i+1)}, w_{i(i-1)} \in c_s(z_i)$ для $1 < i < n$, $w_{12} \in c_s(z_1)$, $w_{n(n-1)} \in c_s(z_n)$. Имеем

$$w_{n(n-1)} = v_{n(n-1)}.$$

Пусть построены компакты $w_{n(n-1)}, w_{(n-1)n}, \dots, w_{(i+1)i}$, где $w_{(i+1)i} \subseteq v_{(i+1)i}$. Поскольку из (3.1) $h(v_{i(i+1)}, v_{(i+1)i}) < \frac{3}{2}\delta(z_i, z_{i+1})$, по определению величины h существует такое $w_{i(i+1)} \subseteq v_{i(i+1)}$, что $h(w_{i(i+1)}, w_{(i+1)i}) < \frac{3}{2}\delta(z_i, z_{i+1})$. Допустим, что $i > 1$. Так как

$$\text{diam}(z_i \setminus v_{i(i-1)}) < 2H(z_i \setminus v_{i(i-1)}, \{u_\infty\}) < 3\delta(z_{i-1}, z_i)$$

Рис. 1

(последнее неравенство следует из (3.1)), очевидно найдется такой компакт $w_{i(i-1)} \subseteq v_{i(i-1)}$, что $h(w_{i(i-1)}, w_{i(i+1)}) < 3\delta(z_{i-1}, z_i)$.

Используя полученные неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \delta(z_1, z_n) &\leq h(w_{12}, w_{n(n-1)}) + H(z_1 \setminus w_{12}, \{u_\infty\}) + H(z_n \setminus w_{n(n-1)}, \{u_\infty\}) \\ &\leq h(w_{12}, w_{21}) + \sum_{i=2}^{n-1} \{h(w_{i(i-1)}, w_{i(i+1)}) + h(w_{i(i+1)}, w_{(i+1)i})\} \\ &\quad + \frac{3}{2}\delta(z_1, z_2) + \frac{3}{2}\delta(z_{n-1}, z_n) < 7\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \delta(z_i, z_{i+1}). \end{aligned}$$

Мы доказали, что для любых $x, y \in F(U)$, где x – фиксирован, из того, что величина, определенная в лемме 2, $r(x, y) \rightarrow 0$ следует, что $\delta(x, y) \rightarrow 0$. Обратное очевидно. Поэтому $r(x, y)$ является o -метрикой, и по лемме 2 пространство $F(U)$ Δ -метризуемо, а $r(x, y)$ является соответствующей Δ -метрикой. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. $F(U)$ является T_1 -пространством.

Однако хаусдорфовым пространство $F(U)$ в общем случае может и не быть.

ПРИМЕР 1 (рис. 1). Пусть $M = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\begin{aligned} z^+ &\in C_s^+(U), \quad \pi(z^+) = [-1, 0], \quad z^+(t) \equiv 0, \\ z^- &\in C_s^-(U), \quad \pi(z^-) = (0, 1], \quad z^-(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Для каждого i , $1 \leq i < \omega$,

$$z_i \in C_s(U), \quad \pi(z_i) = [-1, 1], \quad z_i(t) \equiv \frac{1}{i}.$$

Последовательность z_i , очевидно, сходится как к z^+ , так и к z^- . Следовательно, $F(U)$ – не хаусдорфово.

При некоторых предположениях относительно подмножеств пространства $F(U)$ последние обладают более сильными свойствами, чем само $F(U)$.

ТЕОРЕМА 3. *Подмножество X пространства $F(U)$ метризуемо тогда и только тогда, когда оно регулярно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы уже выяснили, $F(U)$ имеет счетную базу. Согласно хорошо известным утверждениям регулярное пространство со счетной базой нормально и метризуемо.

В [1] и [2] рассмотрены свойства подмножеств Z пространства $C_s(U)$, соответствующие простейшим свойствам множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Перечислим некоторые из них:

- 1) если $z \in Z$ и отрезок $I \subseteq \pi(z)$, то $z|_I \in Z$;
- 2) если $z_1, z_2 \in Z$, z_1 и z_2 совпадают на $\pi(z_1) \cap \pi(z_2)$, то

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t) & \text{при } t \in \pi(z_1), \\ z_2(t) & \text{при } t \in \pi(z_2) \end{cases}$$

также принадлежит Z ;

3) (аксиома компактности) для любого компакта $K \subset U$ подмножество $\{z \in Z : z \subseteq K\}$ компактно.

Через $R^i(U)$ обозначается семейство всех пространств $Z \subseteq C_s(U)$, удовлетворяющих условию 1).

Символ $R(U)$ обозначает множество всех пространств $Z \subseteq C_s(U)$, которые удовлетворяют условиям 1) и 2).

Если кроме условия 1) (условий 1) и 2)) выполняется условие 3), то семейство таких пространств обозначается через $R_c^i(U)$ ($R_c(U)$).

Соответствующее множеству $Z \subseteq C_s(U)$ пространство $F_Z(U)$ определим как множество всех элементов пространства $F(U)$, графики которых имеют вид $[\cup \mathcal{A}]_U$, где $\mathcal{A}$ – некоторое упорядоченное по включению подмножество множества графиков элементов Z , т.е. такое подмножество, что для любых $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$ либо $z_1 \subseteq z_2$, либо $z_2 \subseteq z_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вполне очевидно, что для $Z \in R_c^i(U)$ $F_Z(U) \cap C_s(U) = \cup \{c_s(z) : z \in F_Z(U)\} = Z$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если $Z \in R_c^i(U)$, то $F_Z(U)$ замкнуто в $F(U)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство $F(U)$ имеет счетную базу, достаточно доказать, что предел любой сходящейся в $F(U)$ последовательности элементов из $F_Z(U)$ принадлежит $F_Z(U)$.

Пусть $\{z_k : k < \omega\} \subseteq F_Z(U)$ и $z_k \rightarrow z$. Непосредственно из определения сходимости в $F(U)$ следует, что $z = \bigcup_{j < \omega} y_j$, где $y_j \in c_s(z)$, $y_{j'} \subseteq y_{j''}$ для $j' < j''$, и к каждому y_j , $j < \omega$, сходится последовательность $\{x_k^j \in c_s(z_k) : k < \omega\}$. Так как $Z \in R_c^i(U)$, то каждое $x_k^j \in Z$, а так как, кроме того, U локально-компактно, то для каждого j $y_j \in Z$. Следовательно, по определению пространства $F_Z(U)$ $z \in F_Z(U)$.

ЛЕММА 5. *Если $Z \in R_c^i(U)$, то $F_Z(U)$ является локально бикompактным пространством в том смысле, что в $F_Z(U)$ существует база открытых множеств, замыкание в $F_Z(U)$ каждого элемента которой является бикompактным (но не обязательно хаусдорфовым) пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $F_Z(U)$ обладает счетной базой и замкнуто в $F(U)$, как было доказано ранее, то достаточно доказать, что существует такая база открытых множеств в $F(U)$, что из любой последовательности точек из $F_Z(U)$, содержащейся в каком-либо элементе этой базы, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства $F(U)$.

Из определения топологии пространства $F(U)$ и локальной компактности пространства U следует, что семейство $\{V^0, V^+, V^-, V^\pm: V - \text{открыто}, [V]_U - \text{компактно}\}$ является базой $F(U)$. Пусть H – один из элементов $V^0, V^+, V^-, V^\pm$ этой базы, соответствующих какому-либо V , $\{z_i: i < \omega\}$ – некоторая последовательность, являющаяся подмножеством множества $F_Z(U) \cap H$. Для каждого i выберем элемент $v_i \in c_s(z_i) \cap V$. Пусть для каждого j , $1 \leq j < \omega$, W_j есть ε/j -окрестность точки u_∞ в U^* , где $\varepsilon = \rho([V], u_\infty)$.

Нетрудно проверить, что из последовательности z_i можно выбрать подпоследовательность одного из следующих видов, перечисленных ниже. Поэтому без ограничения общности будем считать, что последовательность z_i относится к одному из них.

1) Существует такое j_0 , что для всех i $z_i \subseteq U \setminus W_{j_0}$. Так как по определению пространства U^* множество $U \setminus W_{j_0}$ компактно, $z_i \in C_s(U)$, а из замечания, сделанного выше, $z_i \in Z$ для всех i . Поскольку $Z \in R_c^i(U)$, и все z_i принадлежат компакту, из последовательности z_i можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $z \in Z$.

2) Существует такое j_0 , что для всех i $z_i|_{(\inf \pi(z_i), \sup \pi(v_i))} \subseteq U \setminus W_{j_0}$, но для каждого i $z_i \cap W_i \neq \emptyset$. Очевидно, что тогда $\{z_i: i < \omega\} \subseteq C_s^+(U)$. При любом i для каждого $j \leq i$ выберем элемент $y_i^j \in c_s^+(z_i)$ такой, что $y_i^j \cap W_j \neq \emptyset$ и $y_i^j \subseteq U \setminus W_{j+1}$. Так как $Z \in R_c^i(U)$, из замечания к определению пространства $F_Z(U)$ $y_i^j \in Z$. Пользуясь тем, что $Z \in R_c^i(U)$, а также компактностью множеств $U \setminus W_i$, построим по индукции для каждого j , $1 \leq j < \omega$, подпоследовательность $\{y_{i(j,k)}^j: k < \omega\}$ последовательности $\{y_i^j: i < \omega\}$.

Выберем из последовательности y_i^1 сходящуюся подпоследовательность $y_{i(1,k)}^1$.

Пусть построена последовательность $y_{i(j,k)}^j$. Последовательность $y_{i(j+1,k)}^{j+1}$ есть сходящаяся подпоследовательность последовательности $y_{i(j,k)}^{j+1}$, $i(j,k) \geq j+1$.

Для каждого j последовательность $y_{i(j,k)}^j$ сходится к некоторому элементу $x_j \in Z$. При этом $\rho(x_j(\sup \pi(x_j)), u_\infty) \leq \varepsilon/j$, $\rho(x_j(\inf \pi(x_j)), u_\infty) \geq \varepsilon$, $x_j \subseteq x_{j+1}$. Поэтому диагональная последовательность $y_{i(j,j)}^j$, а следовательно, и последовательность $z_{i(j,j)}^j$, сходятся к элементу $x = \bigcup_{j=1}^\infty x_j \in C_s^+(U)$.

3) Существует такое j_0 , что для всех i $z_i|_{(\inf \pi(v_i), \sup \pi(z_i))} \subseteq U \setminus W_{j_0}$; но для каждого i $z_i \cap W_i \neq \emptyset$. В этом случае, полностью аналогичном предыдущему, $\{z_i: i < \omega\} \subseteq C_s^-(U)$ и из последовательности z_i можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу из $C_s^-(U)$.

4) Последовательность $z_i^+ = z_i|_{(\inf \pi(v_i), \sup \pi(z_i))}$ обладает свойствами последовательности z_i в случае 2), а последовательность $z_i^- = z_i|_{(\inf \pi(z_i), \sup \pi(v_i))}$ обладает свойствами последовательности z_i в случае 3). Выделим из последовательности z_i^+ подпоследовательность $z_{i(k)}^+$, сходящуюся к элементу $x^+ \in C_s^+(U)$, а затем из последовательности $z_{i(k)}^-$ выделим подпоследовательность $z_{i(k(l))}^-$, сходящуюся к элементу $x^- \in C_s^-(U)$. Очевидно, что последовательность $z_{i(k(l))}$ сходится к элементу $x = x^+ \cup x^- \in$

$C_s^\pm(U)$.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $Z \in R_c^i(U)$ и пространство $F_Z(U)$ хаусдорфово, то $F_Z(U)$ локально компактно.

ТЕОРЕМА 4. Для $Z \in R_c^i(U)$ метризуемость $F_Z(U)$ равносильна хаусдорфовости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы опять предъявим метрику в явном виде. Для того чтобы установить истинность утверждения, достаточно доказать, что если $F_Z(U)$ не метризуемо, то оно не является хаусдорфовым. Согласно утверждению 3 $F_Z(U)$ замкнуто в $F(U)$, поэтому из леммы 4 следует, что $F_Z(U)$ o -метризуемо любой o -метрикой, которой o -метризуемо $F(U)$. Учитывая это, воспользуемся леммой 3, которая позволяет свести доказательство к доказательству следующего факта.

Пусть $y \in F_Z(U)$, $\{y_i : i < \omega\} \subseteq F_Z(U)$, и $\delta(y, y_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, где δ есть o -метрика, построенная при доказательстве теоремы 2, но $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(y_i, y) \neq 0$. Тогда существует $x \in F_Z(U)$, $x \neq y$, к которому сходится некоторая подпоследовательность последовательности y_i , что противоречит хаусдорфовости.

Из определения величины δ следует, что при вышеуказанных условиях найдется $y' \subseteq y$, $y' \in C_s^+(U) \cup C_s^-(U)$, и последовательность $y'_i \subseteq y_i$, $y'_i \in C_s(U)$, такая, что $\delta(y', y'_i) \rightarrow 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(y'_i, y') \neq 0$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $y \in C_s^+(U)$ и $y_i \in C_s(U)$.

Для каждого i существуют $s_i \in c_s^+(y_i)$, $w_i \in c_s^+(y)$ такие, что $h(w_i, s_i) < 2\delta(y, y_i)$ и $H(y \setminus w_i, \{u_\infty\}) < 2\delta(y, y_i)$. Отсюда $\rho(y_i(\sup \pi(s_i)), u_\infty) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность $y_{i(j)}$ такая, что $\rho(y_{i(j)}(\sup \pi(s_{i(j)})), u_\infty) < \varepsilon/j$. Поскольку $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(y_i, y) \neq 0$, а следовательно, $\lim_{i \rightarrow \infty} H(y_i \setminus s_i, \{u_\infty\}) \neq 0$, для некоторого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность $y_{i(k)}$ такая, что $H(y_{i(k)}, \{u_\infty\}) > \varepsilon$ для всех k . Без ограничения общности будем считать, что $i = i(j) = i(k)$. Исходя из двух последних фактов, для каждого i выберем $t_i \in \pi(y_i)$, $t_i > \sup \pi(s_i)$, такое, что $\rho(y_i(t_i), u_\infty) > \varepsilon$. Положим $z_i = y_i|_{[\sup \pi(s_i), t_i]}$.

Мы оказались в ситуации, описанной в случае 3) при доказательстве леммы 5. Согласно соответствующим результатам из последовательности z_i можно выбрать подпоследовательность $z_{i(k)}$, сходящуюся к некоторому $x \in F_Z(U) \cap C_s^-(U)$, $x \neq y \in F_Z(U) \cap C_s^+(U)$. Соответствующая последовательность $y_{i(k)}$ тоже сходится к x .

Таким образом, пространство $F_Z(U)$ метризуемо метрикой $r'(x, y) = \max\{r(x, y); r(y, x)\}$, где $r(x, y)$ — Δ -метрика, построенная при доказательстве теоремы 2. Теорема доказана.

Однако, если пространство Z не удовлетворяет аксиоме компактности, теорема 4 теряет свою силу даже для класса $R(U)$ независимо от замкнутости $F_Z(U)$ в $F(U)$, о чем свидетельствует следующий

ПРИМЕР 2 (рис. 2). Положим $M = \mathbb{R}$,

$$U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (\{(1, 0)\} \cup \{(2k, 0) : 1 \leq k < \omega\}),$$

$$z_0 \in C_s^+(U), \quad \pi(z_0) = [0, 1], \quad z_0(t) \equiv 0.$$

Для каждого i , $1 \leq i < \omega$,

$$z_i \in C_s^-(U), \quad \pi(z_i) = (2i, 2i + 1], \quad z_i(t) \equiv 0.$$

Рис. 2

Для каждого $i \geq 0$ определим последовательность $\{z_i^j : 1 \leq j < \omega\} \subset C_s(U)$, сходящуюся только к z_i :

$$\pi(z_i^j) = [\pi(z_i)]_{\mathbb{R}}, \quad z_i^j(t) \equiv \frac{1}{j}.$$

Для каждых $i, j \geq 1$ проведем отрезок, соединяющий точку $z_0^i(\sup \pi(z_0^i))$ с точкой $z_i^j(\inf \pi(z_i^j))$, являющийся графиком функции $w_{ij} \in C_s(U)$. Определим элемент $x_{ij} \in C_s(U)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi(x_{ij}) &= [\inf \pi(z_0), \sup \pi(z_i)], \quad x_{ij}|_{\pi(z_0)} = z_0^i, \quad x_{ij}|_{\pi(z_i)} = z_i^j, \\ x_{ij}|_{\pi(x_{ij}) \setminus (\pi(z_0) \cup \pi(z_i))}(t) &= w_{ij}(t) + \sin(2\pi(i+j)t). \end{aligned}$$

Мы получили множество

$$Z = \bigcup_{0 \leq i < \omega} c_s(z_i) \cup \bigcup_{1 \leq i, j < \omega} c_s(x_{ij}) \subset R(U).$$

Рассмотрим соответствующее пространство $F_Z(U)$. Докажем, что оно хаусдорфово. Поскольку $F(U)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, достаточно доказать, что не существует последовательности, сходящейся сразу к двум точкам. Причем очевидно, что достаточно рассматривать последовательности, состоящие из элементов множества $C_s(U) \cap F_Z(U)$. Легко можно проверить, что такие пространства как $F_{c_s(x_{ij})}(U)$ и $F_{c_s(z_i)}(U)$ являются хаусдорфовыми. Поэтому достаточно ограничиться последовательностями вида $\{y_k \in c_s(x_{i(k)j(k)}) : k < \omega\}$.

Строение элементов x_{ij} таково, что для каждого бесконечного семейства $X = \{x_{ij} : i \in A, j \in B\}$ и каждой точки $t \in C = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{0 \leq i < \omega} \langle \pi(z_i) \rangle_{\mathbb{R}}$ множество $t \times \mathbb{R} \cap [\bigcup X]_U \setminus \bigcup X$ обязательно содержит всюду плотное подмножество множества $\{t\} \times I$, где I – единственный отрезок. Это делает невозможным сходимость какой-либо последовательности $y_k \in c_s(x_{i(k)j(k)})$ к элементу из $C_s(C \times \mathbb{R})$. Здесь нарушается аксиома компактности. Поэтому, перебрав возможные случаи, которых немного, нетрудно убедиться в том, что любая последовательность $y_k \in c_s(x_{i(k)j(k)})$ может сходиться только к одному элементу. Легко также проверяется, что пространства Z и $F_Z(U)$ замкнуты в $C_s(U)$ и $F(U)$ соответственно.

Пусть $F_Z(U)$ метризуемо метрикой ρ ; тогда для каждого $i \geq 0$ и $k > 0$ найдется стандартная окрестность $G_i^k = G(z_i, v_i^k, V_i^k)$, принадлежащая $1/k$ -окрестности точки z_i . Так как для каждого i z_i^j сходится к z_i при $j \rightarrow \infty$, для любого k найдется $z_i^{j(i,k)} \in G_i^k$. При этом каждый элемент $x_{mn} \supseteq z_i^{j(i,k)}$ будет тоже принадлежать окрестности G_i^k , а следовательно, находится на расстоянии, меньшем $1/k$ от z_i .

Положим $i(k) = j(0, k)$, $j(k) = j(i(k), k)$. Соответствующий элемент $x_{i(k)j(k)}$ будет находиться на расстоянии, меньшем $1/k$ от z_0 и от $z_{i(k)}$. Следовательно,

$$\rho(z_0, z_{i(k)}) \leq \rho(z_0, x_{i(k)j(k)}) + \rho(x_{i(k)j(k)}, z_{i(k)}) < \frac{2}{k},$$

т.е. $z_{i(k)} \rightarrow z_0$ при $k \rightarrow \infty$, что явно противоречит топологии пространства $F(U)$. Таким образом, пространство F_Z хаусдорфово, но не метризуемо.

4. Пространство $F^*(U)$. Пространством $F^*(U)$ мы будем называть подпространство $\{(t, z) : t \in \pi(z), z \in F(U)\}$ топологического произведения $\mathbb{R} \times F(U)$.

ЛЕММА 6. Пространство $F^*(U)$ метризуемо.

Для доказательства леммы определим соответствующую метрику r^* . Каждый элемент (t, z) порождает два элемента $z_t^+ = z|_{[t, +\infty) \cap \pi(z)} \in F^+(U)$, $z_t^- = z|_{(-\infty, t] \cap \pi(z)} \in F^-(U)$. Пусть $(t_1, z_1), (t_2, z_2) \in F^*(U)$. Положим

$$r^*((t_1, z_1), (t_2, z_2)) = r^+(z_{t_1}^+, z_{t_2}^+) + r^-(z_{t_1}^-, z_{t_2}^-),$$

где r^+ и r^- — метрики на множествах $F^+(U)$ и $F^-(U)$, определенные при доказательстве теоремы 1.

Вполне очевидно, что $(t, z) \rightarrow (t_0, z_0)$ тогда и только тогда, когда $z_t^+ \rightarrow z_{t_0}^+$ и $z_t^- \rightarrow z_{t_0}^-$. Отсюда следует, что r^* является o -метрикой, задающей топологию пространства $F^*(U)$. Аксиомы симметрии и треугольника для r^* проверяются тривиально.

Таким образом, $F^*(U)$ метризуемо метрикой r^* .

СЛЕДСТВИЕ. Если для пространства $Z \subseteq F(U)$ существует t_0 , принадлежащее области определения каждого $z \in Z$, то Z метризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $f : Z \rightarrow F^*(U)$, $f(z) = (t_0, z)$, очевидно, является гомеоморфным вложением. Следовательно, Z метризуемо, так же как и $F^*(U)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [2] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [3] Филиппов В. В. О топологических свойствах пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1997. Т. 352. №6. С. 735–738.
- [4] Yorke J. Spaces of solutions // Lecture Notes in Operat. Res. and Math. Econom. V. 12. Berlin: Springer-Verlag, 1969. P. 383–403.
- [5] Недев С. Й. o -метризуемые пространства // Труды ММО. 1971. Т. 24. С. 201–236.