Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Измаилов, К условиям оптимальности в экстремальных задачах с нерегулярными ограничениями-неравенствами, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 89–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:38:32

УДК 517.977

К УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ

А. Ф. Измаилов

Предлагается содержательная характеристика локальных решений экстремальных задач, ограничения которых, задаваемые с помощью выпуклого конуса с непустой внутренностью, не предполагаются регулярными. Основой проводимых построений служит описание касательного конуса к допустимому множеству задачи в исследуемой точке.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Вспомогательные результаты. Известно, что классические необходимые условия оптимальности в экстремальных задачах с ограничениями содержательны лишь при выполнении тех или иных условий регулярности (см., например, [1]–[3]). Специальные условия оптимальности для задач с нерегулярными ограничениями-равенствами, основанные на использовании так называемой конструкции *2-регулярности*, предложены в работах [4]–[7] (см. также [2], [3]). Однако, попытки распространить эти построения (с помощью тех или иных известных приемов) на случай, когда в задаче имеются ограничения-неравенства, приводят к весьма грубым результатам, поскольку такие ограничения имеют определенную специфику. В этой связи выделим работу [7], где рассматривается случай, когда ограничения-неравенства не вносят в задачу “дополнительной нерегулярности”, а также монографию [3], где построена содержательная теория условий второго порядка оптимальности, в том числе и для нерегулярных задач, среди ограничений которых имеются неравенства.

Настоящая статья является развитием работы [8], где предложен специальный подход к локальному исследованию экстремальных задач с нерегулярными ограничениями-неравенствами. Основные результаты из [8] содержатся в излагаемом ниже материале, причем в форме, существенно более удобной для восприятия.

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства. Речь будет идти о задаче

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in D, \quad (1)$$

$$D = \{x \in X \mid F(x) \in K\}, \quad (2)$$

где функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $F: X \rightarrow Y$ обладают оговариваемой ниже гладкостью, а K – выпуклый конус в Y .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-00288 и 97-01-00188)

Приведем некоторые вспомогательные факты, которые будут полезны при изучении локального строения множества D , заданного в (2) (доказательства опустим – все эти факты очевидно следуют из известных результатов выпуклого анализа [1], [9]–[11]).

Для конуса C и произвольного множества Ξ в линейном топологическом пространстве Σ стандартным образом определим *сопряженный конус*

$$C^* = \{\sigma^* \in \Sigma^* \mid \langle \sigma^*, \sigma \rangle \geq 0 \quad \forall \sigma \in C\}$$

и *аннулятор*

$$\Xi^\perp = \{\sigma^* \in \Sigma^* \mid \langle \sigma^*, \sigma \rangle = 0 \quad \forall \sigma \in \Xi\}$$

соответственно, где Σ^* – сопряженное к Σ пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание элементов пространств Σ^* и Σ . Кроме того, для конуса $\tilde{C}$ в Σ^* положим

$${}^*\tilde{C} = \{\sigma \in \Sigma \mid \langle \sigma^*, \sigma \rangle \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in \tilde{C}\}.$$

Если Ξ и Σ – линейные топологические пространства, $\Lambda: \Xi \rightarrow \Sigma$ – непрерывный линейный оператор, то $\Lambda^*: \Sigma^* \rightarrow \Xi^*$ – сопряженный к Λ оператор.

Через $\text{int } \Xi$ и $\text{cl } \Xi$ будем обозначать соответственно внутренность и замыкание множества Ξ (в соответствующей топологии), а через $\text{lin } \Xi$ и $\text{cone } \Xi$ – соответственно линейную и коническую оболочки этого множества (в соответствующем линейном пространстве; коническая оболочка понимается как минимальный выпуклый конус, содержащий Ξ).

ЛЕММА 1. Пусть Σ – линейное топологическое пространство, C – выпуклый конус в Σ , $\text{int } C \neq \emptyset$, L – линейное подпространство в Σ .

Тогда условие

$$\text{int } C \cap L = \emptyset \tag{3}$$

равносильно условию

$$C^* \cap L^\perp \neq \{0\}.$$

Лемма 1 может рассматриваться как частный случай теоремы Дубовицкого–Милютина о пересечении выпуклых конусов [1].

ЛЕММА 2. Пусть Σ – локально выпуклое линейное топологическое пространство, C_1 и C_2 – непустые выпуклые конусы в Σ .

Тогда

$${}^*(C_1^* \cap C_2^*) = \text{cl}(C_1 + C_2).$$

ЛЕММА 3. Пусть Σ – линейное топологическое пространство, Ξ_1 и Ξ_2 – выпуклые множества в Σ , $\text{int } \Xi_1 \neq \emptyset$.

Тогда

$$\text{int}(\Xi_1 + \Xi_2) = \text{int } \Xi_1 + \Xi_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ниже будет использоваться не сама лемма 3, а такое ее следствие: если в условиях этой леммы пространство Σ локально выпукло, то

$$\text{int } \text{cl}(\Xi_1 + \Xi_2) = \text{int } \Xi_1 + \Xi_2.$$

Конус C в линейном пространстве Σ будем называть *конечно порожденным*, если либо он пуст, либо найдутся такие число $s \in \mathbb{N}$ и элементы $\sigma^i \in \Sigma$, $i = 1, \dots, s$, что

$$\text{cl } C = \text{cone}\{\sigma^1, \dots, \sigma^s\} \cup \{0\}.$$

ЛЕММА 4. Пусть Σ – линейное нормированное пространство, C_1 и C_2 – конечно порожденные конусы в Σ .

Тогда

$$\text{cl}(C_1 + C_2) = \text{cl } C_1 + \text{cl } C_2. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В левой части (4) стоит замкнутое множество, в то время как множество в правой части (4) без требования конечной порожденности конусов C_1 и C_2 может не быть замкнутым (см. пример 1 ниже). Поэтому без последнего требования лемма 4 неверна.

В связи с понятием конечно порожденного конуса приведем также следующий вариант леммы о сопряженном конусе.

ЛЕММА 5. Пусть Ξ и Σ – линейные нормированные пространства, $\dim \Sigma < \infty$, $\Lambda: \Xi \rightarrow \Sigma$ – непрерывный линейный оператор, C – непустой замкнутый конечно порожденный конус в Σ .

Тогда для конуса $\Gamma = \{\xi \in \Xi \mid \Lambda\xi \in C\}$ имеет место равенство

$$\Gamma^* = \Lambda^* C^*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В условиях леммы 5 конус C по необходимости является однородным полиэдром. Если предполагать, что C – однородный полиэдр, то требование конечности Σ в лемме 5 можно снять (это сразу следует из леммы о сопряженном конусе [1]).

Наконец, отметим следующий факт, вытекающий из известного результата об отрезке для выпуклых множеств [9].

ЛЕММА 6. Пусть Σ – локально выпуклое линейное топологическое пространство, C – выпуклый конус в Σ .

Тогда для любых элементов $\sigma^1 \in \text{cl } C$ и $\sigma^2 \in \text{int } C$

$$\sigma^1 + \sigma^2 \in \text{int } C.$$

2. Касательный конус. Пусть X и Y – линейные нормированные пространства. Напомним, что вектор $h \in X$ называется *касательным* к множеству $D \subset X$ в точке $x_* \in D$, если найдется такое отображение $r: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, что

$$x_* + th + r(t) \in D \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

$$\|r(t)\| = o(t). \quad (6)$$

Множество всех таких векторов h образует конус $TD(x_*)$ в X , называемый *касательным конусом* к множеству D в точке x_* . Конус $TD(x_*)$ всегда непуст (так как содержит 0) и замкнут [9].

Вопрос о возможно более точном описании касательного конуса к допустимому множеству экстремальной задачи в исследуемой точке является центральным при построении условий оптимальности.

Далее считаем, что множество D задано формулой (2), где $F: X \rightarrow Y$ – дифференцируемое по Фреше в точке $x_* \in D$ отображение, а K – выпуклый конус в Y , причем

$$\text{int } K \neq \emptyset. \quad (7)$$

Для описания $TD(x_*)$ предлагается следующая конструкция.

Если $F(x_*) \in \text{int } K$, то, очевидно, $TD(x_*) = X$. Пусть $F(x_*) \notin \text{int } K$. Тогда $\text{int } K \cap \text{lin}\{F(x_*)\} = \emptyset$, что согласно лемме 1 равносильно условию

$$\tilde{C}_0(x_*) \neq \{0\}, \quad (8)$$

где

$$\tilde{C}_0(x_*) = K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp \quad (9)$$

— конус в Y^* . Согласно лемме 2

$${}^*\tilde{C}_0(x_*) = \text{cl}(K + \text{lin}\{F(x_*)\}), \quad (10)$$

причем (8) равносильно условию

$${}^*\tilde{C}_0(x_*) \neq Y. \quad (11)$$

Займемся необходимыми условиями касания. Для любого вектора $h \in TD(x_*)$ и любого $y^* \in K^*$ из (2), (5), (6) имеем

$$0 \leq \langle y^*, F(x_* + th + r(t)) \rangle = \langle y^*, F(x_*) \rangle + t \langle y^*, F'(x_*)h \rangle + o(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

откуда согласно (9) немедленно вытекает необходимое условие первого порядка касания

$$F'(x_*)h \in {}^*\tilde{C}_0(x_*). \quad (12)$$

Отметим, что это условие содержательно в силу (11). Отметим также, что согласно (7), (10) и замечанию 1

$$\text{int } {}^*\tilde{C}_0(x_*) = \text{int } K + \text{lin}\{F(x_*)\} \neq \emptyset. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В некоторых случаях полезна следующая наглядная интерпретация полученного необходимого условия касания:

$$\begin{aligned} TD(x_*) &\subset \{h \in X \mid F'(x_*)h \in TK(F(x_*))\}, \\ TK(F(x_*)) &= \text{cl}(K + \text{lin}\{F(x_*)\}). \end{aligned}$$

Перейдем к достаточным условиям касания. Пусть теперь вектор $h \in X$ удовлетворяет (12). Если $F'(x_*)h \in \text{int } {}^*\tilde{C}_0(x_*)$, то в силу (13) найдутся такие $y \in \text{int } K$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, что $F'(x_*)h = y + \lambda F(x_*)$. Поэтому для любого достаточно малого числа $t > 0$ согласно лемме 6 имеем

$$F(x_* + th) = (1 + t\lambda)F(x_*) + ty + \omega_1(t) \in \text{int } K$$

(здесь $\omega_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow Y$, $\|\omega_1(t)\| = o(t)$), и, в частности, в силу (2) $h \in TD(x_*)$. Последнее останется верным и в случае, когда $F'(x_*)h \notin \text{int } {}^*\tilde{C}_0(x_*)$, но существует такая сходящаяся к h последовательность $\{h^k\} \subset X$, что $\{F'(x_*)h^k\} \subset \text{int } {}^*\tilde{C}_0(x_*)$ (это следует из замкнутости $TD(x_*)$). Если найдется хотя-бы один элемент $\bar{h} \in X$, удовлетворяющий условию

$$F'(x_*)\bar{h} \in \text{int } {}^*\tilde{C}_0(x_*), \quad (14)$$

то нужную последовательность $\{h^k\}$ можно указать явно, положив, например, $h^k = (1 - 1/k)h + \bar{h}/k$, $k \in \mathbb{N}$. Действительно, при этом для любого $k \in \mathbb{N}$ в силу (12), (14) и леммы 6 имеем

$$F'(x_*)h^k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) F'(x_*)h + \frac{1}{k} F'(x_*)\bar{h} \in \text{int } {}^* \tilde{C}_0(x_*).$$

Условие существования элемента $\bar{h} \in X$, удовлетворяющего (14), равносильно условию

$$\text{int } {}^* \tilde{C}_0(x_*) \cap \text{Im } F'(x_*) \neq \emptyset, \quad (15)$$

которое естественно назвать условием *регулярности* (первого порядка) заданного в (2) множества D в точке $x_* \in D$. Это – классическое условие регулярности типа условия Мангасаряна–Фрамовица [1]. Именно наличие такого условия делает содержательными классические необходимые условия оптимальности (принцип Лагранжа) для экстремальных задач рассматриваемого класса.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если отображение F регулярно в точке $x_* \in D$ в том смысле, что $\text{Im } F'(x_*) = Y$ [1], [2], [9], то условие (15), очевидно, выполнено в силу (13). Поэтому введенное условие регулярности множества D слабее условия регулярности отображения F .

В дальнейшем потребуется очевидное усиление полученного результата, связанное с тем, что условие линейности ограничений само является условием регулярности [11] – никаких дополнительных условий регулярности для таких ограничений не требуется.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X, Y и Z – линейные нормированные пространства, K и C – выпуклые конусы в Y и Z соответственно, причем K удовлетворяет условию (7). Пусть множество D задано формулой (2), где $F: X \rightarrow Y$ – дифференцируемое по Фреше в точке $x_* \in D$ отображение. Пусть $A: X \rightarrow Z$ – непрерывный линейный оператор, $\Delta = \{x \in D \mid Ax \in C\}$.

Тогда

1) всякий вектор $h \in T\Delta(x_*)$ удовлетворяет условию (12), причем

$$Ah \in \text{cl}(C + \text{lin}\{Ax_*\}); \quad (16)$$

2) если для вектора $h \in X$ выполнено (12) и условие

$$Ah \in C + \text{lin}\{Ax_*\}, \quad (17)$$

причем существует элемент $\bar{h} \in X$, удовлетворяющий (14) и условию

$$A\bar{h} \in C + \text{lin}\{Ax_*\}, \quad (18)$$

то $h \in T\Delta(x_*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если в условиях теоремы 1 конус C — замкнутый и конечно порожденный, то с помощью лемм 2 и 4 легко получаем, что четыре условия (16), (17),

$$Ah \in TC(Ax_*)$$

и

$$h \in T\{x \in X \mid Ax \in C\}(x_*)$$

на элемент $h \in X$ равносильны. Аналогичную интерпретацию в этом случае допускает и условие (18) на элемент $\bar{h} \in X$.

Продолжим изучение конуса $TD(x_*)$. В нерегулярном случае, когда (15) не выполнено, этот конус может быть уже, чем множество векторов $h \in X$, удовлетворяющих (12), и для получения более точного описания представляется естественным привлекать информацию о старших производных отображения F . Этому и посвящена оставшая часть пункта. Далее предполагаем, что отображение F дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_* .

Введем в Y^* конус

$$\tilde{C}_1(x_*) = (*\tilde{C}_0(x_*))^* \cap (\text{Im } F'(x_*))^\perp. \quad (19)$$

Согласно (10)

$$(*\tilde{C}_0(x_*))^* = (\text{cl}(K + \text{lin}\{F(x_*)\}))^* = (K + \text{lin}\{F(x_*)\})^* = K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp,$$

поэтому

$$\tilde{C}_1(x_*) = K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp \cap (\text{Im } F'(x_*))^\perp \quad (20)$$

и с учетом леммы 2

$$*\tilde{C}_1(x_*) = \text{cl}(K + \text{lin}\{F(x_*)\} + \text{Im } F'(x_*)). \quad (21)$$

В силу (19) и леммы 1 невыполнение (15) равносильно условию

$$\tilde{C}_1(x_*) \neq \{0\} \quad (22)$$

(здесь учтено (13)). В свою очередь, (22) равносильно условию

$$*\tilde{C}_1(x_*) \neq Y. \quad (23)$$

Для любого вектора $h \in TD(x_*)$ и любого $y^* \in K^*$ из (2), (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle y^*, F(x_* + th + r(t)) \rangle &= \langle y^*, F(x_*) \rangle \\ &+ \langle y^*, F'(x_*)(th + r(t)) \rangle + \frac{t^2}{2} \langle y^*, F''(x_*)[h]^2 \rangle + o(t^2) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

откуда согласно (20) немедленно вытекает необходимое условие второго порядка касания

$$F''(x_*)[h]^2 \in *\tilde{C}_1(x_*), \quad (24)$$

содержательное в нерегулярном случае в силу (23). Отметим, что согласно (7), (21) и замечанию 1

$$\text{int } *\tilde{C}_1(x_*) = \text{int } K + \text{lin}\{F(x_*)\} + \text{Im } F'(x_*) \neq \emptyset. \quad (25)$$

Перейдем к достаточным условиям касания. Пусть теперь вектор $h \in X$ удовлетворяет (12), (24). Более того, предположим, что

$$F'(x_*)h \in \text{cl } K + \text{lin}\{F(x_*)\}, \quad (26)$$

т.е. существуют такие $y^1 \in \text{cl } K$ и $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, что $F'(x_*)h = y^1 + \lambda_1 F(x_*)$. Если $F''(x_*)[h]^2 \in \text{int } {}^*\tilde{C}_1(x_*)$, то согласно (25) найдутся такие $y^2 \in \text{int } K$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\bar{x} \in X$, что $F''(x_*)[h]^2 = y^2 + \lambda_2 F(x_*) + F'(x_*)\bar{x}$. Поэтому для любого достаточно малого числа $t > 0$ согласно лемме 6 имеем

$$\begin{aligned} F\left(x_* + th - \frac{t^2}{2}\bar{x}\right) &= F(x_*) + t(y^1 + \lambda_1 F(x_*)) \\ &\quad - \frac{t^2}{2}F'(x_*)\bar{x} + \frac{t^2}{2}(y^2 + \lambda_2 F(x_*) + F'(x_*)\bar{x}) + \omega_2(t) \\ &= \left(1 + t\lambda_1 + \frac{t^2}{2}\lambda_2\right)F(x_*) + ty^1 + \frac{t^2}{2}y^2 + \omega_2(t) \in \text{int } K \end{aligned}$$

(здесь $\omega_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow Y$, $\|\omega_2(t)\| = o(t^2)$) и, в частности, в силу (2) $h \in TD(x_*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если конус K – конечно порожденный, то из (10) и леммы 4 вытекает эквивалентность условий (12) и (26) на элемент $h \in X$. В общем случае заменить в проведенном рассуждении условие (26) более слабым условием (12) нельзя.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} K &= \text{cone}\{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = 1, y_3 = |y_2|^{3/2}\}, \\ F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для точки $x_* = 0 \in \mathbb{R}$ имеем: $F(0) \in K$, ${}^*\tilde{C}_0(0) = {}^*\tilde{C}_1(0) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 \geq 0\}$, и, как нетрудно убедиться, для элемента $h = 1 \in \mathbb{R}$ выполняются условия $F'(0)h \in {}^*\tilde{C}_0(0)$, $F''(0)[h]^2 \in \text{int } {}^*\tilde{C}_1(0)$. Вместе с тем, очевидно, 0 – изолированная точка множества D , задаваемого формулой (2), а значит, $TD(0) = \{0\}$.

Если $F''(x_*)[h]^2 \notin \text{int } {}^*\tilde{C}_1(x_*)$, но существует такая сходящаяся к h последовательность $\{h^k\} \subset X$, что $\{F''(x_*)[h^k]^2\} \subset \text{int } {}^*\tilde{C}_1(x_*)$, то по-прежнему $h \in TD(x_*)$ в силу замкнутости $TD(x_*)$. В частности, если найдется хотя-бы один такой элемент $\bar{h} \in X$, что

$$F'(x_*)\bar{h} \in \text{cl } K + \text{lin}\{F(x_*)\}, \quad (27)$$

$$F''(x_*)[h, \bar{h}] \in \text{int } {}^*\tilde{C}_1(x_*), \quad (28)$$

то нужную последовательность $\{h^k\}$ можно указать явно, вновь положив $h^k = (1 - 1/k)h + \bar{h}/k$, $k \in \mathbb{N}$. Действительно, при этом для любого $k \in \mathbb{N}$ из (26), (27) выводим

$$F'(x_*)h^k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)F'(x_*)h + \frac{1}{k}F'(x_*)\bar{h} \in \text{cl } K + \text{lin}\{F(x_*)\}.$$

Кроме того, для любого достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ в силу (24), (28) и леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} F''(x_*)[h^k]^2 &= \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 F''(x_*)[h]^2 \\ &+ \frac{1}{k} \left(2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) F''(x_*)[h, \bar{h}] + \frac{1}{k} F''(x_*)[\bar{h}]^2\right) \in \text{int } {}^* \tilde{C}_1(x_*). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Заданное в (2) множество D будем называть *2-регулярным* в точке $x_* \in D$ на элементе $h \in X$, если существует элемент $\bar{h} \in X$, удовлетворяющий (27), (28).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Подчеркнем, что если конус K – конечно порожденный, то согласно (10) и лемме 4 условие (27) на элемент $\bar{h} \in X$ равносильно условию

$$F'(x_*)\bar{h} \in {}^* \tilde{C}_0(x_*).$$

Суммируя сказанное, сформулируем основной результат о касательном конусе.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, K – выпуклый конус в Y , удовлетворяющий условию (7). Пусть множество D задано формулой (2), где $F: X \rightarrow Y$ – дважды дифференцируемое по Фреше в точке $x_* \in D$ отображение.

Тогда

- 1) всякий вектор $h \in TD(x_*)$ удовлетворяет условиям (12), (24);
- 2) если множество D 2-регулярно в точке x_* на элементе $h \in X$, который удовлетворяет условиям (24), (26), то $h \in TD(x_*)$.

В работе [8] содержится ряд примеров, которые могут использоваться для иллюстрации теоремы 1 в случае, когда $Y = \mathbb{R}^m$, $K = \mathbb{R}_+^m$, $m \in \mathbb{N}$ (см. также замечание 11 и пример 2 ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Разумеется, теорема 1 описывает и регулярный случай. Если в ее условиях выполнено (15), то в силу (19) и леммы 1 $\tilde{C}_1(x_*) = \{0\}$, ${}^* \tilde{C}_1(x_*) = Y$, и условие (24) выполняется тривиальным образом для любого элемента $h \in X$. Более того, если h удовлетворяет (26), то при $\bar{h} = h$ выполняются и условия (27), (28) (в частности, это всегда будет так при $h = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Несложно убедиться, что если отображение F 2-регулярно в точке $x_* \in D$ на элементе $h \in X$ в смысле работ [2]–[7], то тем же свойством обладает и заданное в (2) множество D . Поэтому введенное условие 2-регулярности множества D слабее условия 2-регулярности отображения F , которое, в свою очередь, слабее условия регулярности отображения F .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Пусть $Y = \mathbb{R}^m$, $K = \mathbb{R}_+^m$, $m \in \mathbb{N}$, т.е. (1), (2) – стандартная задача с ограничениями-неравенствами. Тогда в силу (10) и лемм 3, 4 для векторов $h, \bar{h} \in X$ условия (12) и (14) совпадают с условиями совместности систем линейных неравенств

$$\lambda F(x_*) + F'(x_*)h \geq 0$$

и

$$\lambda F(x_*) + F'(x_*)\bar{h} > 0$$

относительно $\lambda \in \mathbb{R}$ соответственно. Аналогично, в силу (10), (21) и лемм 3, 4 условия (24) и (27), (28) совпадают с условиями совместности систем линейных неравенств

$$\mu F(x_*) + F'(x_*)x + F''(x_*)[h]^2 \geq 0$$

относительно $(\mu, x) \in \mathbb{R} \times X$ и

$$\begin{aligned} \lambda F(x_*) + F'(x_*)\bar{h} &\geq 0, \\ \mu F(x_*) + F'(x_*)x + F''(x_*)[h, \bar{h}] &> 0 \end{aligned}$$

относительно $(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$ соответственно.

3. Условия оптимальности. Теперь обратимся собственно к задаче (1), (2), где по-прежнему X и Y – линейные нормированные пространства, K – выпуклый конус в Y , удовлетворяющий условию (7), а $F: X \rightarrow Y$ – дважды дифференцируемое по Фреше в исследуемой точке $x_* \in D$ отображение. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ будет предполагаться дифференцируемой по Фреше в точке x_* .

Используя обозначения п. 2, введем в X конусы

$$\begin{aligned} H_2(x_*) &= \{h \in X \mid F'(x_*)h \in {}^*\tilde{C}_0(x_*), F''(x_*)[h]^2 \in {}^*\tilde{C}_1(x_*)\}, \\ \tilde{H}_2(x_*) &= \{h \in X \mid F'(x_*)h \in \text{cl } K + \text{lin}\{F(x_*)\}, F''(x_*)[h]^2 \in {}^*\tilde{C}_1(x_*)\}, \\ \bar{H}_2(x_*) &= \{h \in \tilde{H}_2(x_*) \mid \exists \bar{h} \in X : F'(x_*)\bar{h} \in \text{cl } K + \text{lin}\{F(x_*)\}, \\ &\quad F''(x_*)[h, \bar{h}] \in \text{int } {}^*\tilde{C}_1(x_*)\}. \end{aligned}$$

Согласно сказанному выше

$$\bar{H}_2(x_*) \cup \{0\} \subset \tilde{H}_2(x_*) \subset H_2(x_*). \quad (29)$$

Из теоремы 2 и известных общих условий первого порядка оптимальности в задачах условной оптимизации (см., например, теоремы 3 и 4 в [8]) вытекают следующие необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче (1), (2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть в условиях теоремы 2 функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема по Фреше в точке x_* , которая является локальным минимумом задачи (1), (2).

Тогда

$$\langle f'(x_*), h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \bar{H}_2(x_*). \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть в условиях теоремы 2 $\dim X < \infty$, функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема по Фреше в точке x_* и

$$\langle f'(x_*), h \rangle > 0 \quad \forall h \in H_2(x_*) \setminus \{0\}. \quad (31)$$

Тогда x_* – изолированный локальный минимум задачи (1), (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В отличие от случая ограничений-равенств конус $H_2(x_*)$ может не содержать линейных подпространств, поэтому условие (31) непротиворечиво.

Условие (30) можно переписать в виде

$$f'(x_*) \in (\overline{H}_2(x_*))^*, \quad (32)$$

что соответствует лагранжевой форме условий оптимальности. Однако, вычисление сопряженного конуса, стоящего в правой части (32), – крайне трудная задача. Даже в случае, когда заданное в (2) множество D 2-регулярно в точке $x_* \in D$ в том смысле, что левое включение в (29) выполнено как равенство, эта задача вряд-ли может быть решена в общем виде, поскольку конус $\tilde{H}_2(x_*)$ задается нелинейными ограничениями и, вообще говоря, даже не является выпуклым. Иными словами, “лемма об аннуляторе” (о сопряженном конусе), которую можно было-бы применить к конусу $\tilde{H}_2(x_*)$, неизвестна.

Вместе с тем, в свете теорем 3 и 4 ясно, что в дальнейшем исследовании нуждаются свойства дифференциала целевой функции задачи главным образом на тех элементах $h \in \overline{H}_2(x_*)$, для которых неравенство в (30) выполняется как равенство. Оказывается, для таких h можно получить специальную локальную лагранжеву форму условий оптимальности, аналогичную той, которая для экстремальных задач с ограничениями-равенствами изложена в [2]–[7].

А именно, пусть в условиях теоремы 3 для элемента $h \in \overline{H}_2(x_*)$ выполнено равенство

$$\langle f'(x_*), h \rangle = 0. \quad (33)$$

Далее будем предполагать, что конус K – конечно порожденный. При этом согласно замечанию 7 правое включение в (29) выполнено как равенство. Отсюда следует устойчивость свойства 2-регулярности множества D в точке x_* на элементе h в том смысле, что найдется окрестность U точки h в X , для которой

$$H_2(x_*) \cap U \subset \overline{H}_2(x_*).$$

Поэтому согласно (30)

$$\langle f'(x_*), \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in H_2(x_*) \cap U. \quad (34)$$

Но из (33), (34) очевидно следует, что

$$\langle f'(x_*), \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in T(H_2(x_*))(h),$$

т.е.

$$f'(x_*) \in (T(H_2(x_*))(h))^*. \quad (35)$$

Остается вычислить конус $T(H_2(x_*))(h)$, а также сопряженный к нему. Оказывается, эта задача может быть решена с помощью теоремы 1 и леммы 5 (дело в том, что выполнение условия 2-регулярности множества D в точке x_* на элементе h гарантирует, что конус $T(H_2(x_*))(h)$ задается линейными ограничениями).

Действительно, согласно (10) конус ${}^*\tilde{C}_0(x_*)$ – замкнутый и конечно порожденный. Поэтому из условия существования элемента $\tilde{h} \in X$, удовлетворяющего (27), (28), согласно теореме 1 и замечанию 6 вытекает равенство

$$\begin{aligned} T(H_2(x_*))(h) &= \{\xi \in X \mid F'(x_*)\xi \in \text{cl}({}^*\tilde{C}_0(x_*) + \text{lin}\{F'(x_*)h\})\}, \\ F''(x_*)[h, \xi] &\in \text{cl}({}^*\tilde{C}_1(x_*) + \text{lin}\{F''(x_*)[h]^2\}). \end{aligned} \quad (36)$$

Конус $\text{cl}(*\tilde{C}_0(x_*) + \text{lin}\{F'(x_*)h\})$ – замкнутый и конечно порожденный. Одновременное выполнение условия конечной порожденности конуса K и условия (7) предполагает, что $\dim Y < \infty$. В частности, $\text{rang } F'(x_*) < \infty$, поэтому из (21) следует, что конус $\text{cl}(*\tilde{C}_1(x_*) + \text{lin}\{F''(x_*)[h]^2\})$ – тоже замкнутый и конечно порожденный. Но тогда из (36) и леммы 5 получаем равенство

$$\begin{aligned} (T(H_2(x_*))(h))^* &= (F'(x_*))^* ((*\tilde{C}_0(x_*))^* \cap \{F'(x_*)h\}^\perp) \\ &\quad + (F''(x_*)[h])^* ((*\tilde{C}_1(x_*))^* \cap \{F''(x_*)[h]^2\}^\perp). \end{aligned} \quad (37)$$

Из соотношений (10), (21), (35), (37) вытекает

ТЕОРЕМА 5. Пусть в условиях теоремы 2 K – конечно порожденный конус, функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема по Фреше в точке x_* , которая является локальным минимумом задачи (1), (2). Пусть для некоторого элемента $h \in H_2(x_*)$ выполнено (33).

Тогда найдутся такие функционалы

$$y_1^* = y_1^*(h) \in K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp \cap \{F'(x_*)h\}^\perp, \quad (38)$$

$$y_2^* = y_2^*(h) \in K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp \cap (\text{Im } F'(x_*))^\perp \cap \{F''(x_*)[h]^2\}^\perp, \quad (39)$$

что

$$f'(x_*) = (F'(x_*))^* y_1^* + (F''(x_*)[h])^* y_2^*. \quad (40)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Еще раз подчеркнем, что в теореме 5 речь идет и задачах “с конечномерным образом” – пространство Y по необходимости конечномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Теорема 5 является следствием теоремы 3 – никакие дополнительные экстремальные свойства, относящиеся исходной задаче (1), (2), при обосновании теоремы 5 не привлекались.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Если в условиях теоремы 5 $F''(x_*)[h]^2 \in \text{int } *\tilde{C}_1(x_*)$, то согласно лемме 1 и (21)

$$K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp \cap (\text{Im } F'(x_*))^\perp \cap \{F''(x_*)[h]^2\}^\perp = \{0\}.$$

Поэтому в силу (38), (39) представление (40) принимает вид

$$f'(x_*) = (F'(x_*))^* y_1^*, \quad (41)$$

$$y_1^* = y_1^*(h) \in K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp \cap \{F'(x_*)h\}^\perp. \quad (42)$$

В частности, согласно замечанию 9 это всегда будет так, если множество D регулярно в точке x_* . В последнем случае согласно тому же замечанию 9 под действие теоремы 5 всегда попадает элемент $h = 0$, для которого (42) принимает вид

$$y_1^* \in K^* \cap \{F(x_*)\}^\perp. \quad (43)$$

Соотношения (41), (43) дают содержательную форму классического принципа Лагранжа для задачи (1), (2). В правой части (43) стоит нормальный конус к конусу K в точке

$F(x_*) \in K$. В терминологии стандартных задач с ограничениями-неравенствами включение $y_1^* \in K^*$ суть условие “неотрицательности” множителей Лагранжа, а включение $y_1^* \in \{F(x_*)\}^\perp$ — условие дополняющей нежесткости [1], [9], [11]. Таким образом, теорема 5 содержит в себе и классические необходимые условия первого порядка оптимальности. Отметим, что если $h \notin \text{Ker } F'(x_*)$, то согласно (42) на множитель накладывается дополнительное нетривиальное условие $y_1^*(h) \in \{F'(x_*)h\}^\perp$, и представление (41) для $f'(x_*)$ в этом случае становится более точным.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}_+^2$. Рассмотрим семейство линейных функций

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax_1 + bx_2,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ — параметры, и отображение

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Тогда для точки $x_* = 0 \in \mathbb{R}^2$ имеем: $F(0) = 0$, т.е. $0 \in D$, где множество D задано в (2), причем это множество не регулярно в точке 0. Принцип Лагранжа [1], [9], [11] для задачи (1), (2) в этой точке выполняется при любых значениях параметров a и b тривиальным образом (с нулевым множителем, отвечающим минимизируемой функции). С помощью замечания 11 нетрудно убедиться, что здесь

$$D = TD(0) = \overline{H}_2(0) = H_2(0)$$

(что иллюстрирует теорему 2). Рассмотрим некоторые характерные значения параметров.

Если $a = 1$, $b = -1$, то 0 — (неизолированный) локальный минимум задачи (1), (2). Очевидно,

$$\langle f'(0), h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in D \quad (44)$$

(что иллюстрирует теорему 3), причем, например, для элемента $h = (1, 1) \in D$ в (44) реализуется равенство. При удовлетворяющих (38), (39) множителях

$$y_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad y_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

для указанного h имеет место представление (40) (что иллюстрирует теорему 5). Чтобы множитель y_1^* определялся однозначно, нужно наложить на него естественное дополнительное требование $y_1^* \in (\text{Ker}(F'(0))^*)^\perp = \text{Im } F'(0)$. Подчеркнем, что для $h \in D \setminus \text{lin}\{(1, 1)\}$ соответствующее представление не имеет места. Это объясняется тем, что для таких элементов h в (44) реализуется строгое неравенство.

Если $a = 1$, $b = 0$, то в (44) реализуется строгое неравенство для всякого $h \in D \setminus \{0\}$, и 0 — изолированный локальный минимум задачи (1), (2) (что иллюстрирует теорему 4).

Наконец, если $a = 0$, $b = 1$, то условие (44) очевидно нарушается для тех элементов $h \in D$, у которых $h_2 < 0$. Для элемента $h = (1, 0) \in D$ в (44) реализуется равенство, но представление (40) не имеет места ни при каких множителях $y_1^*, y_2^* \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, как из теоремы 3, так и из теоремы 5 следует, что точка 0 в этом случае не является локальным минимумом задачи (1), (2).

В заключение отметим, что в отличие от регулярного случая распространение проведенных построений на задачи с ограничениями-равенствами и неравенствами, связанное с отказом от условия (7), весьма затруднительно (если вообще возможно).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [2] Измаилов А. Ф., Третьяков А. А. Факторанализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
- [3] Арутюнов А. В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
- [4] Третьяков А. А. Необходимые и достаточные условия оптимальности P -го порядка // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24. № 2. С. 203–209.
- [5] Аваков Е. Р. Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25. № 5. С. 680–693.
- [6] Белаш К. Н., Третьяков А. А. Методы решения вырожденных задач // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28. № 7. С. 1097–1102.
- [7] Аваков Е. Р. Необходимые условия экстремума для гладких анормальных задач с ограничениями типа равенств и неравенств // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 6. С. 3–11.
- [8] Измаилов А. Ф. Условия оптимальности для вырожденных экстремальных задач с ограничениями типа неравенств // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. № 6. С. 837–854.
- [9] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [10] Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.
- [11] Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

Вычислительный центр РАН, г. Москва

Поступило
22.09.97