Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Ляпин, Трансформативная антиатомная характеристика упорядоченных множеств, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 112–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:00:37

УДК 519.513

ТРАНСФОРМАТИВНАЯ АНТИАТОМНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Е. С. Ляпин

Для упорядоченного множества с универсально максимальным элементом определена полугруппа некоторых его преобразований, обладающая некоторыми естественными свойствами, которая определяет это упорядоченное множество с точностью до изоморфизма. Система этих полугрупп преобразований оказывается минимальным элементом среди таких определяющих систем полугрупп преобразований относительно следующей упорядоченности. Первая система предшествует второй, если для каждого упорядоченного множества из рассматриваемого класса полугруппа его преобразований, принадлежащая первой системе, содержится в полугруппе преобразований этого множества, принадлежащей второй системе.

Библиография: 7 названий.

Упорядоченным множествам (т.е. множествам, в которых определено рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение) можно вполне естественным способом сопоставлять различные полугруппы их преобразований, связанных с отношением упорядоченности. В некоторых случаях оказывается, что упорядоченные множества в пределах некоторого класса определяются с точностью до изоморфизма соответствующими полугруппами их преобразований, рассматриваемыми с точностью до изоморфизма.

Первый результат в этом направлении был получен Глускиным [1] (см. также [2]), доказавшим для класса всех упорядоченных множеств определяемость их полугруппами их эндоморфизмов. В последующем были выявлены и другие подобные зависимости (например, [3]–[5]).

Естественно возникает желание установить зависимости между системами полугрупп преобразований, определяющих упорядоченные множества, и постараться выявить в каком-то смысле “меньшие” по составу такие системы.

В настоящей работе уточняется постановка такой задачи. Для достаточно широкого класса упорядоченных множеств строится одна в некотором смысле минимальная система полугрупп, определяющих упорядоченные множества.

Легко видеть, что исходные понятия и постановка проблем могли бы быть без труда перенесены и на иные системы, нежели упорядоченные множества. Также вместо преобразований могли бы рассматриваться и частичные преобразования, которые с этой точки зрения рассматривались, например, в [6] и [7].

1. Совокупность всех преобразований множества Ω будем обозначать через T_Ω . В T_Ω определено действие суперпозиции (умножения) преобразований, для которого будем употреблять значок “ $\circ$ ”;

$\varepsilon = \varepsilon_\Omega$ будет обозначать тождественное преобразование, согласно которому:

$$(\forall \xi \in \Omega) \quad \varepsilon_\Omega(\xi) = \xi.$$

При $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и $u_1 \in T_{\Omega_1}$, $u_2 \in T_{\Omega_2}$ будем называть u_1 *ограничением* u_2 на Ω_1 и обозначать через $u_1 = u_2|_{\Omega_1}$, если $u_2(\Omega_1) \subset \Omega_1$ и для всякого $\xi \in \Omega_1$ имеет место $u_1(\xi) = u_2(\xi)$.

Если $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и $S \subseteq T_{\Omega_2}$, то через $S|_{\Omega_1}$ будем обозначать множество всех таких преобразований $u_1 \in T_{\Omega_1}$, для которых существует преобразование $u_2 \in S$ такое, что $u_1 = u_2|_{\Omega_1}$.

Если S есть полугруппа, то $S|_{\Omega_1}$ будет полугруппой или пустым множеством.

Действительно, пусть $u_1, v_1 \in S_{\Omega_1}$. Тогда существуют $u_2, v_2 \in S$ такие, что $u_1(\xi) = u_2(\xi)$, $v_1(\xi) = v_2(\xi)$ для всякого $\xi \in \Omega_1$. Поскольку $v_2(\xi) \in \Omega_1$, получаем

$$(u_2 \circ v_2)(\xi) = u_2(v_2(\xi)) = u_2(v_1(\xi)) = u_1(v_1(\xi)) = (u_1 \circ v_1)(\xi).$$

Поэтому $u_1 \circ v_1 = u_2 \circ v_2|_{\Omega_1}$ и $u_1 \circ v_1 \in S|_{\Omega_1}$.

Для обозначения изоморфности двух полугрупп или двух упорядоченных множеств будем употреблять знак “ $\approx$ ”.

Множество Ω , в котором задано отношение упорядоченности θ (т.е. рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение) иногда будем обозначать как Ω^θ .

Если относительно упорядоченности θ в некотором множестве элемент β предшествует элементу α , то будем писать $\alpha \geq \beta(\theta)$.

Впрочем, значок θ иногда будем опускать, если ясно, о какой упорядоченности идет речь.

Элемент ω упорядоченного множества Ω , следующий за всеми его элементами (т.е. $(\forall \xi \in \Omega) \omega \geq \xi$), будем называть *универсально максимальным*. Аналогично определяется универсально минимальный элемент.

Для упорядоченных множеств $\Omega_1^{\theta_1}$ и $\Omega_2^{\theta_2}$ будем говорить, что $\Omega_1^{\theta_1}$ есть *ограничение* $\Omega_2^{\theta_2}$ на множестве Ω_1 и писать $\Omega_1^{\theta_1} = \Omega_2^{\theta_2}|_{\Omega_1}$, если $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и

$$(\forall \alpha, \beta \in \Omega_1) \quad \alpha \geq \beta(\theta_1) \iff \alpha \geq \beta(\theta_2).$$

Также и упорядоченность θ_1 будем называть *ограничением упорядоченности* θ_2 на Ω_1 и писать $\theta_1 = \theta_2|_{\Omega_1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Σ есть некоторый класс упорядоченных множеств.

Отображение F класса Σ в класс всех полугрупп преобразований будем называть *трансформативной характеристикой* класса Σ , если для всяких $\Omega_1^{\theta_1}, \Omega_2^{\theta_2} \in \Sigma$ выполнены условия:

- 1) $F(\Omega_1) \subset T_{\Omega_1}$;
- 2) $\Omega_1^{\theta_1} \approx \Omega_2^{\theta_2} \implies F(\Omega_1^{\theta_1}) \approx F(\Omega_2^{\theta_2})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Трансформативная характеристика F класса Σ называется *определяющей*, если для всяких $\Omega_1^{\theta_1}, \Omega_2^{\theta_2} \in \Sigma$ выполнены условия:

- 1) $F(\Omega_1^{\theta_1}) \approx F(\Omega_2^{\theta_2}) \implies \Omega_1^{\theta_1} \approx \Omega_2^{\theta_2}$;
- 2) $\Omega_1^{\theta_1} = \Omega_2^{\theta_2}|_{\Omega_1} \implies F(\Omega_1^{\theta_1}) = F(\Omega_2^{\theta_2})|_{\Omega_1}$.

ПРИМЕР 1. Для произвольного класса Σ упорядоченных множеств следующее отображение F является трансформативной характеристикой $(\forall \Omega^\theta \in \Sigma) F(\Omega^\theta) = T_\Omega$.

ПРИМЕР 2. Также трансформативной характеристикой является отображение F : $(\forall \Omega^\theta \in \Sigma) F(\Omega^\theta) = \varepsilon_\Omega$, где ε_Ω тождественное преобразование множества Ω .

В обоих случаях мы имеем трансформативные характеристики, которые для нетривиального класса Σ , очевидно, не являются определяющими.

ПРИМЕР 3. В [3] была построена определяющая трансформативная характеристика для класса упорядоченных множеств, обладающих универсально максимальным элементом, у которой все преобразования, входящие в сопоставляемые полугруппы, являются некоторыми особыми эндоморфизмами упорядоченного множества.

ПРИМЕР 4. В [4] было показано, что определяющей трансформативной характеристикой для класса упорядоченных множеств, удовлетворяющих условию Мура–Смита, является характеристика, согласно которой упорядоченному множеству Ω сопоставляется полугруппа всех его направленных преобразований, т.е. $u \in T_\Omega$ таких, что для всякого элемента $\xi \in \Omega$ выполнено $u(\xi) \geq \xi$.

2. В продолжение всего последующего изложения ω будет всегда обозначать один и тот же фиксированный элемент.

Через Γ всегда будем обозначать класс всех тех упорядоченных множеств, которые содержат ω в качестве своего универсально максимального элемента.

Для упорядоченного множества $\Omega \in \Gamma$ рассмотрим следующие его преобразования:

$$(\forall \xi \in \Omega) \quad z_\omega^\Omega(\xi) = \omega.$$

Для $\alpha, \beta \in \Omega$, где $\alpha \geq \beta$ и $\alpha \neq \omega$, определим $z_{\alpha\beta}^\Omega \in T_\Omega$, согласно которому $z_{\alpha\beta}^\Omega(\beta) = \alpha$ и $z_{\alpha\beta}^\Omega(\xi) = \omega$ для всех $\xi \in \Omega$, отличных от β .

При этом значок Ω часто будем опускать.

Множество, состоящее из z_ω и всех $z_{\alpha\beta}$, обозначим через $H(\Omega)$.

Множество, состоящее из z_ω и всех $z_{\alpha\alpha}$, обозначим через $H^*(\Omega)$. Все преобразования $z_{\alpha\beta}^\Omega$, очевидно, являются направленными (см. пример 4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Непосредственно из правила действия между преобразованиями вытекает справедливость следующих свойств элементов из $H(\Omega)$ ($\Omega \in \Gamma$):*

- 1) $z_\omega \circ z_\omega = z_\omega$;
- 2) $z_\omega \circ z_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta} \circ z_\omega = z_\omega$;
- 3) $z_{\alpha\beta} \circ z_{\beta\gamma} = z_{\alpha\gamma}$;
- 4) *при $\beta \neq \gamma$ $z_{\alpha\beta} \circ z_{\gamma\alpha} = z_\omega$;*
- 5) $z_{\alpha\alpha} \circ z_{\alpha\alpha} = z_{\alpha\alpha}$;
- 6) *при $\alpha \neq \beta$ $z_{\alpha\beta} \circ z_{\alpha\beta} = z_\omega$;*
- 7) *при $\alpha \neq \beta$ $z_{\alpha\alpha} \circ z_{\beta\beta} = z_\omega$;*
- 8) *при $\alpha \geq \beta$ $z_{\alpha\alpha} \circ z_{\alpha\beta} \circ z_{\beta\beta} = z_{\alpha\beta}$;*
- 9) *если $z_{\alpha\alpha} \circ x \circ z_{\beta\beta} \neq z_\omega$, то $\alpha \geq \beta$ и $x = z_{\alpha\beta}$;*
- 10) *$H(\Omega)$ является полугруппой относительно действия суперпозиции преобразований;*

- 11) $H^*(\Omega)$ является полугруппой относительно действия суперпозиции преобразований;
- 12) $H^*(\Omega)$ есть множество всех идемпотентных элементов полугрупп $H(\Omega)$.

Поскольку при $\Omega_1^{\theta_1} \approx \Omega_2^{\theta_2}$, очевидно, имеет место $H(\Omega_1^{\theta_1}) \approx H(\Omega_2^{\theta_2})$, из утверждения 1 следует, что H есть трансформативная характеристика класса Γ . Также трансформативной характеристикой является и H^* .

В произвольной полугруппе S , обладающей нулевым элементом $\mathbf{0}$, довольно естественно определяется отношение $\lambda = \lambda_S$, согласно которому $\mathbf{0} \geq x(\lambda_S)$ для всякого x . При $a, b \neq \mathbf{0}$ выполняется $a \geq b(\lambda_S)$ тогда и только тогда, когда найдется $x \in S$, при котором $a \cdot x \cdot b \neq \mathbf{0}$.

Для полугруппы $H(\Omega)$, где $\Omega \in \Gamma$, ограничение на $H^*(\Omega)$ отношения $\lambda_{H(\Omega)}$ для краткости часто будем обозначать просто λ^* .

ЛЕММА 1. Для упорядоченного множества $\Omega \in \Gamma$ отношение λ^* является упорядоченностью на $H^*(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 1 z_ω есть нуль полугруппы и потому является универсально максимальным элементом относительно отношения λ^* .

Для $z_{\alpha\alpha}$ имеем $z_{\alpha\alpha} \circ z_{\alpha\alpha} \circ z_{\alpha\alpha} = z_{\alpha\alpha} \neq z_\omega$, и потому $z_{\alpha\alpha} \geq z_{\alpha\alpha}(\lambda^*)$.

Если $z_{\alpha\alpha} \geq z_{\beta\beta}(\lambda^*)$ и $z_{\beta\beta} \geq z_{\gamma\gamma}(\lambda^*)$, то при некоторых $x, y \in H(\Omega)$ имеем $z_{\alpha\alpha} \circ x \circ z_{\beta\beta} \neq z_\omega, z_{\beta\beta} \circ y \circ z_{\gamma\gamma} \neq z_\omega$.

Согласно утверждению 1 в этом случае $x = z_{\alpha\beta}$ и потому $\alpha \geq \beta$, и $y = z_{\beta\gamma}$, и потому $\beta \geq \gamma$. Отсюда следует $\alpha \geq \gamma$ и $z_{\alpha\alpha} \circ z_{\alpha\gamma} \circ z_{\gamma\gamma} = z_{\alpha\gamma} \neq z_\omega$. Поэтому $z_{\alpha\alpha} \geq z_{\gamma\gamma}(\lambda^*)$.

Если одновременно $z_{\alpha\alpha} \geq z_{\beta\beta}(\lambda^*)$ и $z_{\beta\beta} \geq z_{\alpha\alpha}(\lambda^*)$, то при некоторых $x, y \in H(\Omega)$ выполняется

$$z_{\alpha\alpha} \circ x \circ z_{\beta\beta} \neq z_\omega, \quad z_{\beta\beta} \circ y \circ z_{\alpha\alpha} \neq z_\omega.$$

Но тогда согласно утверждению 1 $x = z_{\alpha\beta}$ и $y = z_{\beta\alpha}$. Это означает $\alpha \geq \beta$ и $\beta \geq \alpha$, т.е. $\alpha = \beta$, и $z_{\alpha\alpha} = z_{\beta\beta}$.

ЛЕММА 2. Выполнено соотношение $H^*(\Omega)^{\lambda^*} \approx \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\varphi: \Omega \rightarrow H^*(\Omega)^{\lambda^*}$, при котором $\varphi(\omega) = z_\omega, \varphi(\alpha) = z_{\alpha\alpha}$, является биективным; ω является универсально максимальным элементом в Ω и z_ω универсально максимальным элементом упорядоченного множества $H^*(\Omega)^{\lambda^*}$.

При $\alpha \geq \beta$ ($\alpha \neq \omega$) согласно утверждению 1 имеем $z_{\alpha\alpha} \circ z_{\alpha\beta} \circ z_{\beta\beta} = z_{\alpha\beta} \neq z_\omega$.

Поэтому $z_{\alpha\alpha} \geq z_{\beta\beta}(\lambda^*)$, т.е. $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)(\lambda^*)$.

С другой стороны, если $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)(\lambda^*)$, т.е. $z_{\alpha\alpha} \geq z_{\beta\beta}(\lambda^*)$, то существует $x \in H(\Omega)$, при котором $z_{\alpha\alpha} \circ x \circ z_{\beta\beta} \neq z_\omega$.

Отсюда согласно утверждению 1 следует, что $\alpha \geq \beta$.

3. ТЕОРЕМА 1. Трансформативная характеристика H класса Γ является определяющей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть отображение φ полугруппы $H(\Omega_1^{\theta_1})$ на полугруппу $H(\Omega_2^{\theta_2})$, где $\Omega_1^{\theta_1}, \Omega_2^{\theta_2} \in \Gamma$, является изоморфизмом.

Согласно утверждению 1 $\varphi(z_{\omega_1}^{\Omega_1}) = z_{\omega_2}^{\Omega_2}$.

Обозначим через ψ отображение Ω_1 на Ω_2 , при котором $\psi(\omega) = \omega$ и $\psi(\alpha_1) = \alpha_2$, если $\varphi(z_{\alpha_1\alpha_1}^{\Omega_1}) = z_{\alpha_2\alpha_2}^{\Omega_2}$.

Благодаря свойствам из утверждения 1 φ осуществляет биективное отображение множества $H^*(\Omega_1^{\theta_1})$ на $H^*(\Omega_2^{\theta_2})$. Поэтому ψ осуществляет биективное отображение множества Ω_1 на Ω_2 , при котором $\psi(\omega) = \omega$.

Если в упорядоченном множестве $\Omega_1^{\theta_1}$ имеет место $\alpha_1 \geq \beta_1$ ($\alpha_1 \neq \omega$), то в полугруппе $H(\Omega_1^{\theta_1})$ выполняется $z_{\alpha_1\alpha_1}^{\Omega_1} \circ z_{\alpha_1\beta_1}^{\Omega_1} \circ z_{\beta_1\beta_1}^{\Omega_1} = z_{\alpha_1\beta_1}^{\Omega_1} \neq z_{\omega}^{\Omega_1}$. Отсюда следует, что в изоморфной с ней полугруппе $H(\Omega_2^{\theta_2})$

$$\varphi(z_{\alpha_1\alpha_1}^{\Omega_1}) \circ \varphi(z_{\alpha_1\beta_1}^{\Omega_1}) \circ \varphi(z_{\beta_1\beta_1}^{\Omega_1}) = \varphi(z_{\alpha_1\beta_1}^{\Omega_1}) \neq z_{\omega}^{\Omega_2}.$$

Для элементов множества Ω_2 $\alpha_2 = \psi(\alpha_1)$ и $\beta_2 = \psi(\beta_1)$ имеем $\varphi(z_{\alpha_1\alpha_1}^{\Omega_1}) = z_{\alpha_2\alpha_2}^{\Omega_2}$, $\varphi(z_{\alpha_1\beta_1}^{\Omega_1}) = z_{\beta_2\beta_2}^{\Omega_2}$. Поэтому

$$z_{\alpha_2\alpha_2}^{\Omega_2} \circ \varphi(z_{\alpha_1\beta_1}^{\Omega_1}) \circ z_{\beta_2\beta_2}^{\Omega_2} \neq z_{\omega}^{\Omega_2}.$$

Из утверждения 1 следует, что в $\Omega_2^{\theta_2}$ имеет место $\alpha_2 \geq \beta_2$, т.е. $\psi(\alpha_1) \geq \psi(\beta_1)$.

Рассматривая обратное к ψ отображение ψ^{-1} , аналогично предыдущему доказываем, что из выполнения соотношения в Ω_2 : $\alpha_2 \geq \beta_2$, вытекает, что в Ω_1 имеет место $\psi^{-1}(\alpha_2) \geq \psi^{-1}(\beta_2)$.

Следовательно, ψ есть изоморфное отображение упорядоченного множества $\Omega_1^{\theta_1}$ на $\Omega_2^{\theta_2}$.

2) Пусть $\Omega_1^{\theta_1} = \Omega_2^{\theta_2}|_{\Omega_1}$, где $\Omega_1^{\theta_1}, \Omega_2^{\theta_2} \in \Gamma$.

Очевидно, $z_{\omega}^{\Omega_1} = z_{\omega}^{\Omega_2}|_{\Omega_1}$ и при $\alpha \geq \beta(\theta_1)$ ($\alpha, \beta \in \Omega_1, \alpha \neq \omega$) выполнено $z_{\alpha\beta}^{\Omega_1} = z_{\alpha\beta}^{\Omega_2}|_{\Omega_1}$.

Следовательно, $H(\Omega_1^{\theta_1}) \subset H(\Omega_2^{\theta_2})|_{\Omega_1}$.

3) Пусть $\Omega_1^{\theta_1} = \Omega_2^{\theta_2}|_{\Omega_1}$, $x \in H(\Omega_2^{\theta_2})|_{\Omega_1}$ и $x \neq z_{\omega}^{\Omega_1}$. Это означает, что $x = z_{\alpha\beta}^{\Omega_2}|_{\Omega_1}$, где $\alpha, \beta \in \Omega_1, \alpha \geq \beta(\theta_2)$.

Тогда из $\Omega_1^{\theta_1} = \Omega_2^{\theta_2}|_{\Omega_1}$ следует, что и в Ω_1 имеет место $\alpha \geq \beta(\theta_1)$. Поэтому $x = z_{\alpha\beta}^{\Omega_1} \in H(\Omega_1^{\theta_1})$.

Следовательно, $H(\Omega_2^{\theta_2})|_{\Omega_1} \subset H(\Omega_1^{\theta_1})$.

Что касается трансформативной характеристики H^* класса Γ , то она не является определяющей. Действительно, для любых двух упорядоченностей θ_1 и θ_2 на множестве Ω благодаря справедливости утверждения 1 имеет место $H^*(\Omega_1) \approx H^*(\Omega_2)$.

В множестве преобразований упорядоченного множества $\Omega \in \Gamma$ естественно определяется следующее ниже отношение ν .

Для $u, v \in T_{\Omega}$ полагаем

$$u \geq \nu(v) \iff (\forall \xi \in \Omega) \quad u(\xi) = v(\xi) \vee u(\xi) = \omega.$$

ЛЕММА 3. Отношение ν в T_{Ω} , где $\Omega \in \Gamma$, является упорядоченностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u \in T_{\Omega}$, очевидно, имеем $u \geq u(\nu)$.

Пусть для $u, v, w \in T_{\Omega}$ выполнено $u \geq v, v \geq w$ и $\xi \in \Omega$.

В случае $u(\xi) = \omega$ требуемое условие для $u \geq w(\nu)$ относительно ξ выполнено.

Если $u(\xi) \neq \omega$, то $u(\xi) = v(\xi)$. Но из $v(\xi) \neq \omega$ следует $w(\xi) = v(\xi)$. Поэтому $u(\xi) = w(\xi)$. Следовательно, $u \geq w(\nu)$.

Пусть одновременно $u \geq v(\nu)$ и $v \geq u(\nu)$. Если для некоторого $\xi(\Omega)$ имеем $u(\xi) = \omega$, то из $v \geq u(\nu)$ следует $v(\xi) = \omega$.

Если $u(\xi) \neq \omega$, то из $u \geq v(\nu)$ следует $u(\xi) = v(\xi)$.

Относительно упорядоченности ν преобразование z_ω является универсально максимальным элементом в T_Ω . Все преобразования $z_{\alpha\beta}$ являются антиатомами (по терминологии, принятой в теории упорядоченных множеств) относительно упорядоченности ν .

Именно благодаря этому трансформативную определяющую характеристику H класса Γ можно назвать антиатомной.

4. Для выяснения взаимоотношений между трансформативными характеристиками некоторого класса упорядоченных множеств естественно ввести следующее отношение.

Для двух трансформативных характеристик F_1 и F_2 некоторого класса упорядоченных множеств Σ определяем отношение τ , согласно которому $F_1 \leq F_2(\tau)$ означает, что для всякого $\Omega \in \Sigma$ имеет место $F_1(\Omega) \subset F_2(\Omega)$.

Непосредственно видно, что отношение τ является упорядоченностью.

Отношение τ определяет роль трансформативной характеристики H класса Γ . Она оказывается одним из минимальных элементов в упорядоченном относительно τ множестве всех определяющих трансформативных характеристики этого класса.

ТЕОРЕМА 2. *Если трансформативная характеристика F класса Γ отлична от H и $F \leq H(\tau)$, то F не является определяющей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что, сделав предположение о том, что трансформативная характеристика F является определяющей, мы приходим к противоречию. Поскольку $F \leq H(\tau)$ и $F \neq H$, должно существовать упорядоченное множество $\Omega \in \Gamma$ такое, что $F(\Omega) \subset H(\Omega)$, но $F(\Omega) \neq H(\Omega)$.

Это означает, что существует некоторое преобразование, принадлежащее $H(\Omega)$, но не принадлежащее $F(\Omega)$.

2) Ω не может состоять из одного элемента, так как в этом случае $H(\Omega)$ состоит из одного элемента. Но $F(\Omega) \neq \emptyset$ и $F(\Omega) \subset H(\Omega)$; это противоречит $F(\Omega) \neq H(\Omega)$.

3) Предположим, что для некоторого элемента $\alpha \in \Omega$, $\alpha \neq \omega$, преобразование $z_{\alpha\alpha}^\Omega$ не содержится в $F(\Omega)$.

Рассмотрим принадлежащие классу Γ два упорядоченных множества $\Omega_1 = \{\omega\}$ и $\Omega_2 = \{\alpha, \omega\}$.

Так как они не изоморфны, неизоморфными должны быть и полугруппы $F(\Omega_1)$ и $F(\Omega_2)$. Поскольку $F(\Omega_1)$ состоит из одного элемента, $H(\Omega_2)$ должна обладать более чем одним элементом. Так как $F(\Omega_2)$ состоит из двух элементов $z_{\alpha\alpha}^{\Omega_2}$ и $z_\omega^{\Omega_2}$, а $F(\Omega_2) \subset H(\Omega_2)$, отсюда вытекает $F(\Omega_2) = H(\Omega_2) = \{z_{\alpha\alpha}^{\Omega_2}, z_\omega^{\Omega_2}\}$.

Так как $\Omega_2 \subset \Omega$, согласно условию 2) определения 2 найдется преобразование $x \in F(\Omega) = H(\Omega)$ такое, что $z_{\alpha\alpha}^{\Omega_2} = x|_{\Omega_2}$. Но среди преобразований множества Ω , принадлежащих $H(\Omega)$, очевидно, только $x = z_{\alpha\alpha}^\Omega$ обладает тем свойством, что $x|_{\Omega_2} = z_{\alpha\alpha}^{\Omega_2}$. Следовательно, $z_{\alpha\alpha}^\Omega \in F(\Omega)$, что противоречит предположению.

4) Множество Ω не может состоять лишь из двух элементов.

Действительно, предположим $\Omega = \{\alpha, \omega\}$.

Имеем $H(\Omega) = \{z_{\alpha\alpha}^\Omega, z_\omega^\Omega\}$.

Для множества $\Omega_1 = \{\omega\} \in \Gamma$ имеем $F(\Omega_1) = \{z_{\omega}^{\Omega_1}\}$. Так как Ω и Ω_1 не изоморфны, то $F(\Omega)$ не изоморфна с $F(\Omega_1)$, и потому должна содержать более одного элемента. Но это противоречит тому, что $F(\Omega) \neq \emptyset$, $F(\Omega) \subset H(\Omega)$, $F(\Omega) \neq H(\Omega)$.

5) В Ω должны найтись два различных отличных от ω элемента $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$.

Согласно доказанному выше $z_{\alpha\alpha}^{\Omega}, z_{\beta\beta}^{\Omega} \in F(\Omega)$. Так как $F(\Omega)$ является полугруппой, то

$$z_{\omega}^{\Omega} = z_{\alpha\alpha}^{\Omega} \circ z_{\beta\beta}^{\Omega} \in F(\Omega).$$

6) Поскольку $F(\Omega) \subset H(\Omega)$ и $F(\Omega) \neq H(\Omega)$, учитывая доказанное выше, остается рассмотреть случай, когда для некоторых $\alpha, \beta \in \Omega$, где $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \omega$, $\beta \neq \omega$, $\alpha \geq \beta$, преобразование $z_{\alpha\beta}^{\Omega}$ не принадлежит $F(\Omega)$.

Рассмотрим принадлежащие классу Γ упорядоченные множества $\Omega_1 = \{\alpha, \beta, \omega\} \subset \Omega$ и $\Omega_2 = \{1, 2, \omega\}$. Во втором элементы 1 и 2 несравнимы относительно упорядоченности в Ω_2 .

Так как $F \leq H(\tau)$, то $F(\Omega_1) = \{z_{\alpha\alpha}^{\Omega_1}, z_{\beta\beta}^{\Omega_1}, z_{\alpha\beta}^{\Omega_1}, z_{\omega}^{\Omega_1}\}$.

Если бы $z_{\alpha\beta}^{\Omega_1} \in F(\Omega_1) \subset H(\Omega_1)$, то в $F(\Omega)$ нашелся бы элемент y такой, что $z_{\alpha\beta}^{\Omega_1} = y|_{\Omega_1}$. Но $F(\Omega) \subset H(\Omega)$, а среди элементов $H(\Omega)$ таким, как легко видеть, является лишь элемент $z_{\alpha\beta}^{\Omega}$. Но он не принадлежит к $F(\Omega)$. Следовательно, $z_{\alpha\beta}^{\Omega_1} \notin F(\Omega_1)$. Поэтому, учитывая доказанное ранее, получаем $F(\Omega_1) = \{z_{\alpha\alpha}^{\Omega_1}, z_{\beta\beta}^{\Omega_1}, z_{\omega}^{\Omega_1}\}$.

Так как элементы 1 и 2 в Ω_2 несравнимы, используя для Ω_2 рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным выше, получаем $F(\Omega_2) = \{z_{11}^{\Omega_2}, z_{22}^{\Omega_2}, z_{\omega}^{\Omega_2}\}$.

Тем самым, полугруппы $F(\Omega_1)$ и $F(\Omega_2)$ оказываются изоморфными. Но это противоречит тому, что Ω_1 и Ω_2 неизоморфны.

В связи с теоремой 2 следует отметить, что в классе определяющих трансформативных характеристик класса Γ не существует универсально минимального элемента относительно τ .

Действительно, по теореме 2 таковой могла бы быть только трансформативная характеристика H . Однако она таковой не является. Это видно из того, что, как было упомянуто в примере 3, существует трансформативная определяющая характеристика класса Γ , у которой для каждого $\Omega \in \Gamma$ все преобразования, принадлежащие $G(\Omega)$, являются эндоморфизмами упорядоченного множества Ω . Если бы H являлся универсально минимальным элементом, то для всякого $\Omega \in \Gamma$ имело бы место $G(\Omega) \supset H(\Omega)$. Однако за исключением тривиального случая среди преобразований, принадлежащих $H(\Omega)$, очевидно, имеются такие, которые не являются эндоморфизмами (почти все, за "небольшим" исключением).

Можно отметить, что не следует считать существенным ограничением то, что выше рассматривались упорядоченные множества с общим для них всех универсально максимальным элементом. Действительно, пусть Σ есть произвольный класс упорядоченных множеств, ни одно из которых не содержит фиксированного элемента ω . Каждому $\Omega \in \Sigma$ можно сопоставить упорядоченное множество Ω^* , состоящее из всех элементов множества Ω и элемента ω . Упорядоченность в Ω^* продолжает упорядоченность в Ω , а ω есть универсально максимальный элемент. Очевидно, упорядоченные множества $\Omega_1, \Omega_2 \in \Sigma$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны Ω_1^* и Ω_2^* . Но $\Omega_1^*, \Omega_2^* \in \Gamma$, и их изоморфизм может быть определен при помощи трансформативной определяющей характеристики класса Γ , которая рассматривалась выше.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16. № 5. С. 157–162.
- [2] Ljapin E. S. Semigroups: Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.
- [3] Ляпин Е. С. Некоторые эндоморфизмы упорядоченного множества // Изв. вузов. Матем. 1962. № 2. С. 87–94.
- [4] Ляпин Е. С. Полугруппы направленных преобразований упорядоченных множеств // Матем. сб. 1967. Т. 73. № 4. С. 161–168.
- [5] Ляпин Е. С. Направленные эндоморфизмы упорядоченных множеств // Сиб. матем. ж. 1970. Т. 11. № 1. С. 217–221.
- [6] Попова Л. М. Полугруппы частичных эндоморфизмов множества с отношением // Сиб. матем. ж. 1963. Т. 4. № 2. С. 309–317.
- [7] Калманович А. М. Півгрупи часткових ендоморфізмів графа // Доповіді АН УРСР. 1963. № 2. С. 141–150.

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
г. Санкт-Петербург

Поступило
26.06.97