Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Окрут, Обобщенные теоремы Хермана и голоморфные конформные субмерсии, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 120–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:46:41

УДК 514.763

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ ХЕРМАНА И ГОЛОМОРФНЫЕ КОНФОРМНЫЕ СУБМЕРСИИ

С. И. Окрут

В статье показано, что если некоторое кэлерово многообразие допускает голоморфную риманову субмерсию, то это многообразие является локально приводимым. Получено обобщение известных теорем Р. Хермана на случай конформных и голоморфных конформных субмерсий. Предложен метод конструирования кэлеровых расслоенных пространств с голоморфной конформной (неримановой) проекцией и со вполне геодезическими изоморфными слоями. Метод допускает построение полных, в том числе – компактных, кэлеровых расслоенных пространств указанного типа.

Библиография: 10 названий.

Введение. В статье [1] Р. Херманом был решен вопрос о том, при каких достаточных условиях риманова субмерсия является проекцией расслоения с изометричными между собой слоями. Как показано в теореме 1, если кэлерово многообразие допускает голоморфную риманову субмерсию, то оно необходимо локально приводимое. Однако неприводимые кэлеровы многообразия допускают голоморфные конформные субмерсии (определение 1 и примеры 1, 2). Цель этой статьи ответить на вопрос при каких достаточных условиях голоморфная конформная субмерсия кэлерова многообразия является проекцией голоморфного расслоения с изоморфными между собой слоями. Ответ на этот вопрос дается в теоремах 3, 4. Теоремы 5, 6 предоставляют эффективный способ построения расслоений указанного типа со вполне геодезическими слоями, в том числе полных. Изучение вводимых ниже (определение 2) скрещенных кэлеровых расслоений представляет интерес прежде всего в связи с возможностью строить кэлеровы аналоги скрещенных произведений [2].

Произвольно выбираемые многообразия, функции и тензорные поля предполагаются гладкими (класса C^∞). А основные понятия и обозначения соответствуют принятым (см., например, [3], [4]). Кроме того, будем предполагать, что все произвольно выбираемые многообразия являются связными.

1. Голоморфные и римановы субмерсии. Для всякой субмерсии ν риманова многообразия E на риманово многообразие M в каждой точке $\Xi \in E$ имеется прямое ортогональное разложение касательного пространства $T_\Xi E = V_\Xi + H_\Xi$ на вертикальное и горизонтальное подпространства. Субмерсия называется *плоской*, если ее горизонтальное распределение H вполне интегрируемое; получаемое в этом случае слоение называется *горизонтальным*. Символы V и H будут одновременно служить для обозначения операторов ортогонального проектирования на одноименно обозначенные расслоения. Операторы V и H стандартным образом (см. [3, гл. 1, предложение 2.13])

продолжаются на всю алгебру тензоров в каждой точке многообразия E . И тензор K , в том числе вектор или форма, будет называться *вертикальным* (*горизонтальным*), если его горизонтальная (вертикальная) компонента равна нулю $HK = 0$ ($VK = 0$ соответственно). Далее всюду в статье вертикальные векторные поля субмерсии обозначаются через U, V, W , а базисные, т.е. проектируемые и горизонтальные, – через X, Y, Z . Локальная проектируемость векторного поля P на базу эквивалентна следующему свойству:

$$L_U P = [U, P] \in V. \quad (1.1)$$

Голоморфность субмерсии немедленно влечет инвариантность относительно комплексной структуры вертикального распределения, а эрмитовость метрики g на E (т.е. $g(JP, Q) = -g(P, JQ)$) – инвариантность горизонтального распределения. Имеют место равенства

$$\nu_* J = J\nu_*, \quad JV = V, \quad JH = H. \quad (1.2)$$

ЛЕММА 1. Пусть ν голоморфная субмерсия кэлеровых многообразий. Субмерсия ν является римановой тогда и только тогда, когда она является плоской.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X, Y – базисные векторные поля, а W вертикальное векторное поле. Применим свойство замкнутости кэлеровой формы Φ многообразия E к следующей тройке полей $d\Phi(W, X, Y) = 0$. Из свойства проектируемости (1.1) следует формула:

$$W\Phi(X, Y) + \Phi(W, [X, Y]) = 0. \quad (1.3)$$

Если воспользоваться взаимосвязью между кэлеровой формой и кэлеровой метрикой, то из формулы (1.3) для голоморфной субмерсии следует равенство

$$(L_W g)(X, JY) = \Phi([X, Y], W). \quad (1.4)$$

Критерием того, что субмерсия является римановой, служит равенство нулю левой части равенства (1.4) для любых горизонтальных векторных полей X и Y . Теперь теорема следует из равенства (1.4) и теоремы Фробениуса.

ТЕОРЕМА 1. Если голоморфная плоская субмерсия ν со вполне геодезическими слоями определена на кэлеровом многообразии E , то кэлерово многообразие E локально приводимое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что субмерсия ν – римановая. На основании равенств (1.2) слои полученного горизонтального слоения $\mathcal{H}$ субмерсии ν являются комплексными подмногообразиями. Порожденная слоением локальная субмерсия χ_{loc} вдоль слоев $\mathcal{H}$ на локальный фактор (см. [5, с. 15]) $E/\mathcal{H}$ также является голоморфной. Из двойственности [6, с. 60] между римановыми и геодезическими слоениями следует локальная приводимость метрики E .

2. Когда голоморфная конформная субмерсия является проекцией расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть имеется субмерсия ν из E на M и пусть g и g_M римановы метрические тензоры в E и M соответственно. Субмерсия ν из E на M называется *конформной*, если существует функция f на E такая, что $Hg = \exp(2f)\nu^*g_M$.

При этом f называется *вертикальным показателем* конформности субмерсии, если f вертикальная функция, т.е. $Xf = 0 \quad \forall X$ – горизонтального вектора. Риманова субмерсия получается как частный случай конформной субмерсии при $f \equiv 0$. Будем в дальнейшем обозначать градиент функции через $\text{gr } f$, а $\text{gr}^c f = J \text{gr } f$, где J – это почти комплексная структура. Следующая теорема 2 является обобщением известной теоремы Р. Хермана [4, пункт 9.42].

ТЕОРЕМА 2. Если $\nu: E \rightarrow M$ – конформная субмерсия полного риманова многообразия E с вертикальным показателем конформности, то ν является проекцией локально тривиального расслоения ν , база которого также полное риманово многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X^H горизонтальный лифт векторного поля X базы. Из теоремы 3.2(i) и формулы (3.9), приведенных в [7], следует равенство

$$\nabla_{X^H} X^H = (\nabla_X X)^H - \|X^H\|^2 \text{gr } f. \quad (2.1)$$

Пусть $\gamma = x_s$ ($|s| < \varepsilon$) геодезическая базы и s ее натуральный параметр. Через $X = \{X_s = \dot{x}_s\}$ обозначим векторное поле скорости $\|X\| = 1$. Интегральные кривые Ξ_s горизонтального лифта X^H проектируются в интегральные кривые поля X , т.е. $\nu\Xi_s = x_s$. Рассмотрим систему уравнений для кривых Ξ_s в E :

$$\nabla_Z Z + \|Z\|^2 \text{gr } f = 0, \quad (2.2)$$

$$Z = \dot{\Xi}_s. \quad (2.3)$$

На основании теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и формулы (2.1) решение Ξ_s с такими начальными условиями, что $Z_0 = \dot{\Xi}_0$ – это горизонтальный вектор, является горизонтальной кривой, проектирующейся на геодезическую базу. Вычислим

$$\frac{d}{ds} \|Z\|^2 = 2g(\nabla_Z Z, Z) = -2\|Z\|^2 df(Z) = 0$$

при условии, что показатель конформности – вертикальная функция. Таким образом, норма вектора скорости величина постоянная вдоль любой интегральной кривой системы (2.2), (2.3).

Покажем, что всякая интегральная кривая Ξ_s ($0 \leq s < \varepsilon$) продолжается в точку $s = \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $s_n \rightarrow \varepsilon$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $\Xi_n = \Xi_{s_n}$. Имеем

$$\text{dist}(\Xi_m, \Xi_n) = \left| \int_{s_m}^{s_n} \|Z\| ds \right| = e^{f(\Xi_0)} |s_n - s_m|. \quad (2.4)$$

Поэтому последовательность Ξ_n является фундаментальной. Из полноты E следует, что существует $\Xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Xi_n$. Очевидно, Ξ не зависит от выбора последовательности s_n . Поэтому $\Xi = \lim_{s \rightarrow \varepsilon} \Xi_s$. Отсюда, во-первых, следует, что геодезическая

базы x_s может быть продолжена в точку $x = \lim_{s \rightarrow \varepsilon} x_s$. По теореме Хопфа–Ринова база M является полным римановым многообразием. Горизонтальный лифт геодезической, продолженной за точку $s = \varepsilon$, с началом в точке Ξ позволяет получить продолжение интегральной кривой Ξ_s за точку $s = \varepsilon$; здесь снова используется теорема о единственности решения задачи Коши для (2.2)–(2.3). Таким образом, интегральные кривые системы уравнений (2.2), (2.3) бесконечно продолжаемые. А из связности сегмента следует существование и единственность горизонтального лифта любой геодезической, соединяющей пару точек базы. Так как любую кривую базы можно аппроксимировать геодезическими дугами, то горизонтальное распределение субмерсии ν является связностью Эресмана [4, с.337]. По теореме Эресмана [4, пункт 9.40] ν является на самом деле проекцией локально тривиального расслоения.

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 горизонтальное распределение субмерсии является связностью Эресмана.*

Замечание. Из сравнения результата Номидзу–Одзэки [8] и теоремы 2 следует, что условие вертикальности показателя конформности в теореме 2 является существенным.

Говоря, E является расслоением со стандартным слоем S , когда S является *римановым* (а в частности, и *кэлеровым*) многообразием, будем подразумевать, что у каждой точки базы M имеется локальная тривиализация (O, σ) такая, что сужение σ на каждый слой является римановой изометрией слоя (относительно индуцированной из E метрики) на стандартный слой S . Это же обстоятельство будем выражать, называя E расслоением с *изометричными* между собой слоями. Естественно, все слои расслоения при этом изометричны стандартному слою S .

Лемма 2. *Пусть ν субмерсия риманова многообразия E со вполне геодезическими слоями. Если горизонтальное распределение является связностью Эресмана, то E – расслоение с изометричными между собой слоями.*

Доказательство. Из теоремы Эресмана [4, пункт 9.40], следует, что E является локально тривиальным расслоением. Предложение 3.3 из [1] означает, что диффеоморфизм слоев $\tau_\gamma: F_a \mapsto F_b$ из доказательства Эресмана в случае вполне геодезичности слоев является изометрией.

Лемма 3. *Пусть ν голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий из E на M с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда*

$$A_X U = \nabla_U X = \omega(U)X + \omega^c(U)JX, \quad (2.5)$$

где A инвариант О'Нейла субмерсии ν , а вертикальные 1-формы ω , ω^c определяются так: $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$.

Доказательство. Пусть X, Y – базисные векторные поля, а U вертикальное векторное поле. Применим свойство замкнутости кэлеровой формы Φ многообразия E к следующей тройке полей $d\Phi(JU, X, JY) = 0$. Отсюда следует, что

$$JU\Phi(X, JY) + \Phi(JU, [X, JY]) = 0. \quad (2.6)$$

Тогда

$$2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) + JU\Phi(X, JY). \quad (2.7)$$

Формула (2.7) следует из формулы (2.6) и выражения $2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) - \Phi(JU, [X, JY])$ для ковариантной производной, которая, как известно, является ковариантной производной связности Леви–Чивита. Снова используя связь между кэлеровой метрикой и ассоциированной с ней кэлеровой формой $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$, а также конформность субмерсии, определение 1, получим равенство

$$(L_U \Phi)(X, Y) = 2\omega(U)\Phi(X, Y). \quad (2.8)$$

Свойство проектируемости (1.1) полей X, Y влечет, что $L_U \Phi(X, Y) = U\Phi(X, Y)$. Поэтому, подставляя в формулу (2.7) выражение вида (2.8), получим равенство

$$\Phi(\nabla_U X, Y) = \omega(U)\Phi(X, Y) + \omega(JU)\Phi(X, JY). \quad (2.9)$$

Из эрмитовости кэлеровой формы $\Phi(X, JY) = -\Phi(JX, Y)$, ее невырожденности и определения результата действия почти комплексной структуры на 1-форму, т.е. $J\omega(U) = -\omega(JU)$, следует $H\nabla_U X = \omega(U)X + \omega^c(U)JX$. Вполне геодезичность слоев влечет равенство $H\nabla_U X = \nabla_U X$, и второе равенство леммы доказано. Первое равенство леммы теперь следует из определения инварианта О'Нейла A [4, п. 9.20].

Далее будем считать, что все произвольно выбираемые расслоенные пространства являются локально тривиальными. *Локальной тривиализацией* расслоенного пространства E со стандартным слоем S и проекцией ν называется [4, пункт 9.47] пара (O, σ) : окрестность базы O и отображение σ , диффеоморфно отображающее порцию $\nu^{-1}(O)$ на $O \times S$. Если расслоенные пространства наделены римановой метрикой, то *конформным* расслоением будет называться расслоение, проекция которого является конформной субмерсией. Учитывая результаты п. 1, среди *голоморфных* конформных субмерсий будем далее рассматривать лишь такие, показатель конформности которых не является постоянным.

Расслоение принято называть *голоморфным*, если: 1) как тотальное пространство, так и база расслоения являются комплексными многообразиями, а проекция ν – голоморфным отображением; 2) каждая точка должна обладать окрестностью O и локальной тривиализацией (O, σ) такой, что σ является голоморфным отображением. Наконец, голоморфное расслоение будет называться *кэлеровым* расслоением, если база и тотальное пространство расслоения являются кэлеровыми многообразиями. Будем говорить, что кэлерово расслоение имеет *изоморфные* между собой слои, если имеется атлас локальных тривиализаций, для которого сужение тривиализующих отображений σ на слой есть изоморфизм (т.е. голоморфная изометрия) кэлерового многообразия $\nu^{-1}(z)$ на стандартный слой S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кэлерово конформное расслоение с вертикальным (непостоянным) показателем конформности и со вполне геодезическими и изоморфными между собой слоями будет называться *скрещенным кэлеровым расслоением*.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ν голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий со вполне геодезическими слоями и вертикальным показателем конформности. Если горизонтальное распределение является связностью Эресмана, то E – скрещенное кэлерово расслоение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 2, достаточно показать, что изометрия слов τ_γ является голоморфным отображением. Для этого достаточно показать, что $(L_Z J)U = 0$, где Z – горизонтальный лифт вектора скорости геодезической γ из формулы (2.3). Так как $(L_Z J)U = J\nabla_U Z - \nabla_{JU} Z$, применив лемму 3, получим

$$(L_Z J)U = \omega(U)JZ - \omega^c(U)Z - \omega(JU)Z - \omega^c(JU)JZ = 0.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\nu: E \mapsto M$ голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий с вертикальным показателем конформности и со вполне геодезическими слоями. Если E полное многообразие, то E – скрещенное кэлерово расслоение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение есть комбинация следствия 1 и теоремы 3.

3. Локальные примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть кэлерова 2-форма Φ_M , определенная на M , обладает кэлеровым потенциалом F_M , т.е. $\Phi_M = -2i\partial\bar{\partial}F_M$. И пусть $y(t)$ вещественная функция, определенная на некотором вещественном интервале (a, b) (допустимо и $a = -\infty$, $b = +\infty$), с отрицательной производной $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$. На комплексном многообразии E из формулы (3.3) равенством (3.2) и формулой $f = y(t)$ определим пару функций t и f . Тогда 2-форма Φ

$$\Phi = e^{2f} \left(\frac{2i}{\pi} \dot{y}^{-1} \partial f \wedge \bar{\partial} f + \Phi_M \right), \quad (3.1)$$

$$\text{где} \quad t = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta}) - 2\pi F_M, \quad (3.2)$$

определенная на открытом множестве E ,

$$E = \left\{ (\zeta, z) \in \mathbb{C} \times M \mid a < \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta}) - 2\pi F_M(z, \bar{z}) < b \right\}, \quad (3.3)$$

превращает E в кэлерово многообразие. Действительно, так как Φ является формой типа $(1, 1)$, ее инвариантность относительно почти комплексной структуры $J\Phi = \Phi$ очевидна. Покажем замкнутость этой формы. Имеем

$$\begin{aligned} d\Phi &= 2e^{2f} df \wedge \left(\frac{2i}{\pi} \dot{y}^{-1} \partial f \wedge \bar{\partial} f + \Phi_M \right) \\ &\quad - \frac{2i}{\pi} e^{2f} (\dot{y}^{-3} \ddot{y} df \wedge \partial f \wedge \bar{\partial} f - \dot{y}^{-1} \bar{\partial} \partial f \wedge \bar{\partial} f + \dot{y}^{-1} \partial f \wedge \partial \bar{\partial} f) \\ &= 2e^{2f} df \wedge \Phi_M - \frac{2i}{\pi} e^{2f} \dot{y}^{-1} df \wedge \partial \bar{\partial} f = 2e^{2f} df \wedge (\Phi_M + 2i\partial\bar{\partial}F_M) = 0. \end{aligned}$$

Здесь многократно использовалось разложение $d = \partial + \bar{\partial}$ и применялось следующее преобразование

$$df \wedge \partial \bar{\partial} f = \ddot{y} df \wedge \partial t \wedge \bar{\partial} t + \dot{y} df \wedge \partial \bar{\partial} t = -2\pi \dot{y} df \wedge \partial \bar{\partial} F_M.$$

Так как для любого вектора Z типа $(1,0)$ выполняется $\bar{\partial}f(\bar{Z}) = \partial f(Z)$, положительная определенность симметрической 2-формы $g(P, Q) = \Phi(JP, Q)$, ассоциированной с формой Φ , очевидна в силу равенства

$$g(Z, \bar{Z}) = i\Phi(Z, \bar{Z}) = e^{2f} \left(-\frac{1}{\pi} \dot{y}^{-1} (Zf)^2 + g_M(Z, \bar{Z}) \right) \quad (3.4)$$

и положительной определенности эрмитовой метрики базы, ассоциированной с Φ_M . Покажем вполне геодезичность слоев построенного расслоения. Положим $W = \partial/\partial\zeta$ и $\bar{W} = \partial/\partial\bar{\zeta}$. Используя формулы (9)–(12) из [3, § 5, гл. IX], получим

$$\nabla_W \bar{W} = 0, \quad \nabla_W W = qW,$$

где $q = -2\pi (\dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y}\dot{y}^{-1})$. А так как связность кэлера, этим показано, что слои вполне геодезические.

Из способа задания кэлеровой формы Φ формулой (3.1) видно, что проекция ν на M является конформной субмерсией с показателем конформности равным f . Пусть $\xi = \operatorname{Re} \zeta$; несложно вычислить, что

$$\operatorname{gr} f = -2\pi \exp(-2f) \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \operatorname{gr}^c f = -2\pi \exp(-2f) \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (3.5)$$

и поэтому показатель конформности является вертикальным. В итоге построено кэлерово многообразие E , допускающее голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным невырожденным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. Построенное кэлерово многообразие E является глобально тривиальным скрещенным кэлеровым расслоением над M относительно проекции ν на M , стандартным слоем которого служит полоса $S := \{\theta \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re} \theta < b\}$. В качестве тривиализации (M, σ) можно выбрать голоморфное отображение $(z, \theta): E \mapsto M \times S$. Если кэлера метрика в полосе S , стандартном слое, выбирается по формуле

$$g_S = -\frac{1}{2\pi} \exp(2f(\operatorname{Re} \theta)) f d\theta d\bar{\theta},$$

то сужение тривиализации $(z, \theta): E \mapsto M \times S$, определенной формулой $\theta = t + i \operatorname{Im} \zeta$, на каждый слой является изоморфизмом кэлеровых многообразий.

ПРИМЕР 2. Здесь будет построено семейство глобально тривиальных скрещенных кэлеровых расслоений E , но в этом примере, в отличие от примера 1, показатель конформности будет иметь точки вырождения. Пусть, как и в примере 1, (M, Φ_M) – кэлерово многообразие, а F_M его кэлеров потенциал и пусть $l(s): [0; B) \mapsto \mathbb{R}$ гладкая (в нуле – справа), невырожденная (в том числе в нуле) функция. Кроме того, пусть выполняется неравенство

$$2\lambda \int_0^B \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma} \right)^2 d\sigma < p_0^2, \quad (3.6)$$

в котором λ некоторая вещественная константа. Определим гладкую положительную функцию $p(s)$:

$$p^2(s) = p_0^2 - 2\lambda \int_0^s \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma} \right)^2 d\sigma, \quad p_0 \neq 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{dp^2}{dl} = -2\lambda s \frac{dl}{ds}. \quad (3.8)$$

Пусть

$$E = \{(w, z) \in \mathbb{C} \times M \mid |w| \exp(-2\pi\lambda F_M) < B\}. \quad (3.9)$$

Многообразие E , определенное равенством (3.9), относительно проекции на M является тривиальным голоморфным расслоением. С помощью следующих формул определим на нем гладкую 2-форму Φ :

$$\Phi = -\frac{2i}{\pi} \partial l(s) \wedge \bar{\partial} l(s) + p^2(s) \Phi_M, \quad (3.10)$$

$$\text{где } s = |w| e^{-2\pi\lambda F_M} : E \mapsto \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Покажем, что если исключить из E комплексную гиперповерхность $w = 0$, на которой функция p^2 вырождается, и сделать разрез, исключив подмногообразие $\arg w = \pi$ вещественной коразмерности 1, то получим расслоенное пространство из примера 1. Вещественная функция y

$$y = \ln p(s) \quad (3.12)$$

после замены переменных по первой формуле из

$$s = \exp(\lambda t), \quad w = \exp(\lambda \zeta) \quad (3.13)$$

имеет отрицательную производную по t на вещественном интервале $(-\infty; \frac{1}{\lambda} \ln B)$. Это следует из формулы (3.7). По-прежнему будем обозначать точкой производную по t . Если теперь рассматривать t как функцию на E , определенную формулой (3.2) при замене голоморфных координат по второй формуле из (3.13), причем $|\operatorname{Im} \lambda \zeta| < \pi$, то для дифференциалов, определенных на E из формул (3.12), (3.7) и (3.8), получим (знаки $\pm$ выбираются одинаковыми и равными $\operatorname{sgn}(-\lambda dl/ds)$)

$$dl = \pm e^f (-\dot{y})^{-1/2} df, \quad d^c l = J dl = \pm e^f (-\dot{y})^{-1/2} d^c f. \quad (3.14)$$

А так как для любой функции l на комплексном многообразии выполняется равенство $2i\partial l \wedge \bar{\partial} l = dl \wedge d^c l$, последние два равенства позволяют заключить, что форма Φ в равенствах (3.10) и (3.1) – это одна и та же форма. Таким образом, E без гиперповерхности $w = 0$ есть расслоенное пространство из примера 1. Точки исключенной гиперповерхности являются предельными точками открытого множества, которое, как теперь установлено, есть кэлерово многообразие. Проекция на M является голоморфной конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности. А так как форма (3.10) гладко определена всюду на E , для того чтобы показать, что E целиком является скрещенным кэлеровым расслоением, достаточно в силу соображений непрерывности доказать лишь положительную определенность в точках гиперповерхности $w = 0$ симметрической 2-формы g , ассоциированной с Φ . Если обозначить через g_M риманову метрику на M , ассоциированную с Φ_M , то для g получаем выражение

$$g = \frac{1}{2\pi} (dl^2 + d^c l^2) + p^2(s) g_M, \quad (3.15)$$

$$g|_{w=0} = \frac{1}{2\pi} (dl^2 + d^c l^2) + p_0^2 g_M. \quad (3.16)$$

Так как $p_0 \neq 0$, из формулы (3.16) следует положительная определенность g в точках рассматриваемой гиперповерхности и конформность субмерсии. Кроме того, из выражения (3.15) становится прозрачным геометрический смысл функции l на E . С точностью до деления на константу $\sqrt{2\pi}$ она является дистанцией между гиперповерхностями $l = \text{const}$.

Точки гиперповерхности $w = 0$ соответствуют точкам, где функция s из (3.11) обращается в нуль. Из выражения f через l , полученного с помощью равенств (3.12) и (3.8), следует равенство (3.17). А так как f есть ничто иное, как показатель конформности, равенство

$$df = -\lambda s \frac{dl}{ds} p^{-2}(s) dl \quad (3.17)$$

приводит к тому, что в точках рассматриваемой гиперповерхности $w = 0$ имеется вырождение показателя конформности, т.е. $df|_{s=0} = 0$.

4. Построение скрещенных кэлеровых расслоений “в целом”. Многообразие Кэлера M , Φ_0 принято называть *ходжевым*, если все периоды кэлеровой формы Φ_0 целократны некоторому вещественному числу. Это эквивалентно тому, что кэлерова форма пропорциональна $\Phi_0 = r\Phi_M$ – некоторому образу Φ_M целочисленного когомологического класса при естественном гомоморфизме $H^2(M, \mathbb{Z})$ в $H_{dR}^2(\mathbb{C}) \simeq H^2(\mathbb{C})$. Многообразиями Ходжа являются $\mathbb{C}^n$ и CP^n . Так как всякое подмногообразие ходжева многообразия является ходжевым, все естественным образом появляющиеся кэлеровы многообразия являются ходжевными. Под *хорошим покрытием* понимается такое локально конечное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, что все элементы покрытия и их конечные пересечения являются стягиваемыми множествами. Для любой кэлеровой формы Φ_M многообразия M ее образ при изоморфизме де Рама $H_{dR}^2 \mapsto H^2(\mathbb{C})$ всегда можно представить вещественным 2-коциклом $x = (x_{\alpha\beta\gamma})$ хорошего покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$. Этот коцикл определяется [9, с. 83–85] следующими условиями:

$$x_{\alpha\beta\gamma} = F_{\alpha\beta} + F_{\beta\gamma} + F_{\gamma\alpha}, \quad (4.1)$$

$$\text{Im } F_{\alpha\beta} = F_\beta - F_\alpha, \quad (4.2)$$

$$-2i\partial\bar{\partial}F_\alpha = \Phi_\alpha = \Phi_M|_{U_\alpha}, \quad (4.3)$$

где $F_{\alpha\beta}$ – голоморфные функции, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$, а F_α вещественные функции на U_α (кэлеровы потенциалы). Пусть дано многообразие Ходжа M , Φ_M и некоторая целая, т.е. кратная образу целочисленного неделимого класса при изоморфизме де Рама, форма $\Omega = \frac{1}{m}\Phi_M$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим экспоненциальную последовательность

$$0 \mapsto \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{O} \xrightarrow{2\pi i \exp} \mathcal{O}^* \mapsto 0,$$

где $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$ – это пучки ростков: голоморфных функций на M и голоморфных функций, необращающихся в 0. Через $\mathbb{Z}$ обозначен постоянный целочисленный пучок. С одной стороны, хорошо известно, что

$$\text{Pic}(M) \simeq H^1(\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c} H^2(\mathbb{Z}) \quad (4.4)$$

группа Пикара голоморфных линейных расслоений, изоморфная 1-й группе когомологий с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}^*$ характеристическим отображением c , порожденным экспоненциальной последовательностью, отображается во 2-ю группу целочисленных когомологий. Линейное эрмитово расслоение L, h над M будем называть *присоединенным* к форме Ω , если форма кривизны эрмитовой связности совпадает с формой Ω . Как показано [9, с. 79–80], с точностью до изоморфизма де Рама характеристический класс L , определяемый с помощью связывающего гомоморфизма для экспоненциальной последовательности, совпадает с формой кривизны; $c(L) = \Omega$.

ЛЕММА 4. *Если Φ_M форма Ходжа многообразия M , то существует линейное эрмитово расслоение L, h , присоединенное к форме Φ_M , у которого локально координатные представления эрмитова скалярного произведения h_α относительно некоторого атласа $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ имеют вид*

$$h_\alpha = \exp(-4\pi F_\alpha),$$

где F_α – это вещественные кэлэровы потенциалы для Φ_M на U_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя изоморфизм де Рама, определенный формулами (4.1)–(4.3), в случае ходжевой формы Φ_M , можно заключить, что в этом случае 2-цикл $x = \{x_{\alpha\beta\gamma}\}$ когомологичен целочисленному 2-циклу $c = \{c_{\alpha\beta\gamma}\}$, т.е. существуют такие комплексные числа $P_{\alpha\beta}$, что

$$c_{\alpha\beta\gamma} = x_{\alpha\beta\gamma} + P_{\alpha\beta} + P_{\beta\gamma} + P_{\gamma\alpha} \quad (4.5)$$

для любых α, β, γ таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Покрытие при этом, если необходимо, заменяется более тонким. Как известно [9, с. 83–85], функции f_α^β , определенные формулой

$$\begin{aligned} f_\alpha^\beta &= \exp(2\pi i Q_{\alpha\beta}): U_\alpha \cap U_\beta \mapsto \mathbb{C}^*, \\ Q_{\alpha\beta} &= F_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

являются функциями перехода голоморфного линейного расслоения, характеристический класс $c(L)$ которого равен Φ_M .

Обозначим через $\mathbb{Z}$ постоянный $\mathbb{Z}$ -пучок, а через $\mathcal{O}^*$ – пучок ростков необращающихся в нуль голоморфных функций на M . Хорошо известно, например, из формулы (11) § 2 главы I в [10] то достаточно очевидное обстоятельство, что экспоненциальная последовательность является короткой точной последовательностью для любого комплексного многообразия. По построению голоморфного линейного расслоения L над M его характеристический класс $c(L)$, определенный из экспоненциальной последовательности, совпадает с целочисленным когомологическим классом c из формулы (4.5). При этом, конечно, $c(L)$ отождествляется со своим образом в комплексных когомологиях $H^2(\mathbb{C})$ при отображении в когомологиях индуцированным естественным вложением $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$.

Переходя к построению эрмитова скалярного произведения h в L , следует прежде всего отметить, что комплексные числа $P_{\alpha\beta}$ в (4.5) можно выбрать чисто вещественными. Если бы это было не так, то можно было бы сделать замену $P_{\alpha\beta} := \operatorname{Re} P_{\alpha\beta}$, отбросив мнимую часть. Так как x вещественный цикл, значение $c_{\alpha\beta\gamma}$, определенное формулой (4.5), после такой замены не изменится. Эрмитово скалярное произведение h

определим локально координатными представлениями h_α относительно использованного выше атласа $\mathcal{U}$:

$$h_\alpha = \exp(-4\pi F_\alpha), \quad (4.7)$$

где функции кэлерова потенциала F_α те же, что и прежде. Корректность так определенного эрмитова скалярного произведения следует из сравнения крайних частей в цепи равенств

$$h_\alpha |f_\alpha^\beta|^2 = h_\alpha \exp(-4\pi \operatorname{Im} F_{\alpha\beta}) = h_\beta, \quad (4.8)$$

при получении которых использовалась формула (4.2) и отсутствие мнимой части у величин $P_{\alpha\beta}$.

ЛЕММА 5. *Если Φ_M форма Ходжа многообразия M , то существует линейное эрмитово расслоение L^* , h^* , присоединенное к форме $-\Phi_M$, у которого локально координатные представления эрмитова скалярного произведения h_α^* относительно некоторого атласа $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ имеют вид*

$$h_\alpha^* = \exp(4\pi F_\alpha),$$

где F_α — это вещественные кэлеровы потенциалы для Φ_M на U_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Характеристическое отображение s из (4.4) является групповым гомоморфизмом относительно операции тензорного умножения расслоений в группе $\operatorname{Pic}(M)$ и сложения кохомологических классов в $H^2(M, \mathbb{Z})$. Поэтому из формулировки леммы следует, что голоморфное линейное расслоение L^* — двойственное к расслоению L из леммы 4. Поэтому функции перехода $\varphi_\alpha^\beta = \exp(-2\pi i Q_{\alpha\beta})$ расслоения L^* для атласа $\mathcal{U}$, определяемого формулами (4.1)–(4.3), являются обратными к голоморфным функциям перехода расслоения L из формулы (4.6). Определенное в формулировке леммы локальное представление эрмитова скалярного произведения корректно, потому что вместо формулы (4.8) выполняются следующие равенства.

$$h_\alpha^* |\varphi_\alpha^\beta|^2 = h_\alpha^* \exp(4\pi \operatorname{Im} F_{\alpha\beta}) = h_\beta^*.$$

ТЕОРЕМА 5. *Каждое ходжево многообразие M может служить базой скрещенного кэлерова расслоения E . В качестве стандартного слоя может выступать риманова поверхность, голоморфно эквивалентная одной из следующих поверхностей:*

- а) единичному кругу с выколотым центром B_1^* ;
- б) комплексной прямой с выколотой точкой $\mathbb{C}^*$;
- в) всей комплексной прямой $\mathbb{C}$;
- г) B_1 — единичному кругу в $\mathbb{C}$;
- д) $\mathbb{CP}^1$ — сфере Римана;
- е) кольцу $K = \{w \in \mathbb{C} \mid A < w < B\}$, причем $0 < A < B < +\infty$.

Причем в случаях а), б) и е) показатель конформности f всюду невырожденный, в случаях в) и г) имеет ровно одно экстремальное значение, а в случае д) — имеет ровно два экстремальных значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ_M форма Ходжа многообразия M . Воспользуемся леммами 4, 5. Пусть линейное эрмитово расслоение L, h является присоединенным к форме $\Omega = \Phi_M$, а L^*, h^* – к форме $\Omega = -\Phi_M$. Через $\|\Xi\|$ будем обозначать норму вектора Ξ как в первом, так и во втором расслоениях. Имеем

$$h_\alpha w_\alpha \bar{w}_\alpha = \|\Xi\|^2 \quad \text{или} \quad h_\alpha^* w_\alpha \bar{w}_\alpha = \|\Xi\|^2. \quad (4.9)$$

Формулами (4.10), (4.11) определим на E ($\lambda = 1$ или -1 для L или L^* соответственно) форму типа $(1,1)$, где ν – это проекция в расслоении L или L^* . Имеем

$$p^2(s) = p_c^2 - 2\lambda \int_C^s \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma} \right)^2 d\sigma > 0, \quad (4.10)$$

$$\Phi = -\frac{2i}{\pi} \partial l(s) \wedge \bar{\partial} l(s) + p^2(s) \nu^* \Phi_M, \quad \text{где} \quad s = \|\Xi\|. \quad (4.11)$$

Пусть $l = l(s)$ гладкая невырожденная на промежутке от A до B функция ($0 \leq A < B \leq +\infty$) такая, что выполняется неравенство в (4.10) для некоторого C из промежутка от A до B . Пусть равенством в (4.10) определена положительная функция $p(s)$ для $\lambda = 1$ или для $\lambda = -1$. Пусть E – подрасслоение в L или в L^* , состоящее из векторов, норма которых принадлежит промежутку от A до B . Сопоставляя выражение, полученное для s из формул (4.11), (4.9) при помощи лемм 4, 5, с выражением в (3.11), приходим к выводу, что форма Φ , заданная формулой (4.11), в каждой порции над U_α совпадает с формой Φ из примера 2. На основании примера 2 можно заключить, что расслоение E , оснащенное формой Φ , является скрещенным кэлеровым расслоением. Выбором параметров A, B и функции $l(s)$ можно реализовать каждый пункт теоремы, кроме д). Так, для функции $l(s)$, определенной на $(0; B)$, где $0 < B \leq +\infty$, реализуются пункты а), б). Для $l(s)$, определенной на $[0; B)$, реализуются пункты в), г). Для случая е) параметры выбираются так: $0 < A < B < +\infty$. Выбор указанных параметров и функции $l(s)$, очевидно, возможен для $\lambda = \pm 1$.

д) Этот случай требует отдельного рассмотрения. Пусть $l(s)$ произвольная гладкая невырожденная (в 0 справа) функция, определенная на $[0; +\infty)$. Причем $l(s)$ выберем так, чтобы порядок производной $l'(s)$ на бесконечности относительно величины $1/s$ был равен 2. Это условие обеспечивает, в частности, сходимость несобственного интеграла в (4.12):

$$\frac{dl}{ds} \sim \frac{k}{s^2} (s \rightarrow +\infty), \quad 2 \int_0^{+\infty} \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma} \right)^2 d\sigma = p_0^2 - p_\infty^2 > 0; \quad (4.12)$$

$$p^2(s) = p_1^2 - 2 \int_1^s \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma} \right)^2 d\sigma > 0. \quad (4.13)$$

Выберем произвольное положительное число p_1 таким, чтобы выполнялось неравенство в (4.13). Тогда пара равенств: (4.12) и $p_1^2 = (p_0^2 + p_\infty^2)/2$, – однозначно определяют значение p_0 ($0 < p_1 < p_0$) положительной функции $p(s)$, определяемой равенством (4.13). Причем $p_0 = p(0)$, а p_∞ есть предел этой функции при $s \rightarrow +\infty$, $p_\infty > 0$. Например, функция $l(s) = \cos(\pi/(4\sqrt{s+1}))$ удовлетворяет условию невырожденности и для нее выполняется эквивалентность из (4.12).

Теперь перейдем к построению расслоения E , слой которого сфера. Оно будет получено, образно говоря, путем заклеивания расслоения L в бесконечности. Пусть $L \oplus L^*$ — это прямая сумма голоморфных линейных расслоений, определяемая традиционным образом, как, например, в [10, с. 69]. В обоих слагаемых кэлерова структура определяется с помощью формулы (4.11), но функции $l(s)$ и $p(s)$ для первого расслоения, определенные выше формулами (4.12), (4.13), для второго экземпляра расслоения определяются иначе. Обозначим их с волной сверху:

$$\tilde{l}(r) = l\left(\frac{1}{r}\right), \quad \tilde{p}^2(r) = p_1^2 + 2 \int_1^r \rho \left(\frac{d\tilde{l}}{d\rho}\right)^2 d\rho.$$

Эквивалентность в (4.12) означает невырожденность $\tilde{l}$ в нуле. Рассмотрим отображение инверсии между указанными расслоениями с вырезанными нулевыми сечениями: L_0 и L_0^* . В ранее введенных координатах эта инверсия определяется так: $(z; w_\alpha) \mapsto (z; w_\alpha^{-1})$. Из формул (4.9) и лемм 4, 5 вытекает, что нормы векторов при таком преобразовании взаимно обратны. Так как функции l и p переходят в функции $\tilde{l}$ и $\tilde{p}$ при замене переменных r на $1/s$, инверсия осуществляет кэлеров изоморфизм между двумя кэлеровыми многообразиями L_0 и L_0^* . Выберем в качестве функции склейки инверсное отображение. Полученное после склейки многообразие обозначим через E . Из построения ясно, что E имеет своим слоем S^2 и удовлетворяет всем остальным требованиям теоремы.

Расслоенное пространство называется *полным*, если оно является полным как риманово многообразие.

ТЕОРЕМА 6. *Каждое полное ходжево многообразие M может служить базой полного скрещенного кэлерова расслоения E . В качестве стандартного слоя полного расслоения E может выступать риманова поверхность, голоморфно эквивалентная одной из следующих поверхностей:*

- а) единичному кругу с выколотым центром B_1^* ;
- б) комплексной прямой с выколотой точкой $\mathbb{C}^*$;
- в) всей комплексной прямой $\mathbb{C}$;
- г) B_1 — единичному кругу в $\mathbb{C}$;
- д) $\mathbb{C}P^1$ — сфере Римана, при этом f имеет ровно два экстремальных значения.

Причем в случаях а) и б) показатель конформности f всюду невырожденный, в случаях в) и г) имеет ровно одно экстремальное значение, а в случае д) имеет ровно два экстремальных значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем применять теорему 5, выбирая специальным образом функцию $l(s)$. Для того чтобы построенное кэлерово расслоение E оказалось полным, необходимо выбирать функцию l , удовлетворяющей дополнительному свойству:

- 1) для пунктов а), б) образ функции $\text{Im } l = (-\infty; +\infty)$;
- 2) для пунктов в), г) $A = 0$ и $\text{Im } l = [0; +\infty)$.

Эти дополнительные условия на $l(s)$ должны выполняться одновременно с прежним условием справедливости неравенства в (4.10) для любых s . Это означает, что несобственный (в силу дополнительных условий) интеграл в неравенстве

$$\int_A^B \sigma \left(\frac{dl}{d\sigma}\right)^2 d\sigma > 0 \quad (4.14)$$

при $\lambda = 1$ должен сходиться на верхнем пределе, а при $\lambda = -1$ – на нижнем. При таком выборе $l(s)$ слой S расслоения E является полным римановым многообразием. В пункте д) слой является полным римановым многообразием по построению, более того, здесь слой – компакт. Случай а) реализуется, например, для функции $l(s)$, заданной равенством

$$l(s) = \ln \ln(s/A): (A; +\infty) \mapsto \mathbb{R} \quad (4.15)$$

для $\lambda = 1$. Очевидно, что кольцо с внешним радиусом, равным бесконечности, голоморфно эквивалентно кругу с выколотым центром. Случай б) реализуется, например, для функции $l(s)$, заданной равенством

$$l(s) = \ln \ln(1 + s): (0; +\infty) \mapsto \mathbb{R} \quad (4.16)$$

для $\lambda = 1$. Случай в) реализуется, например, для функции $l(s)$, заданной равенством

$$l(s) = \ln(1 + \ln(1 + s)): [0; +\infty) \mapsto \mathbb{R} \quad (4.17)$$

для $\lambda = 1$. Случай г) реализуется, например, для функции $l(s)$, заданной равенством

$$l(s) = \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2B}: [0; B) \mapsto \mathbb{R} \quad (4.18)$$

для $\lambda = -1$.

Итак, во всех пунктах а)–д) построено скрещенное кэлерово расслоение E с полным слоем. Порция E над некоторой окрестностью любой точки изоморфна расслоению из примера 2. В (3.15) имеется выражение для римановой метрики g , ассоциированной с Φ . Отображение, сопоставляющее вектору Ξ вещественное число $l(\|\Xi\|)/\sqrt{2\pi}$, является римановой субмерсией из E на $\mathbb{R}$ относительно канонической метрики прямой. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность векторов Ξ_k в E относительно дистанции, порожденной g . Числовая последовательность $l(\|\Xi_k\|)$ также является фундаментальной и, следовательно, ограниченной. Так как $p^2(l)$ гладкая функция от l , существуют такие положительные числа c и r , что неравенства

$$r \geq p^2(\|\Xi\|) \geq c \quad (4.19)$$

выполняются при $\Xi = \Xi_k \forall k$. Пусть замкнутое в E подмножество Q состоит из векторов Ξ , норма которых удовлетворяет неравенствам в (4.19), т.е. $\{\Xi_k\} \subset Q$. Рассмотрим риманову метрику на Q , определенную формулой

$$q = \frac{1}{2\pi}(dl^2 + d^c l^2) + c \cdot \nu^* g_M. \quad (4.20)$$

Из формулы (3.15) и второго неравенства в (4.19) следует, что $q \leq g$, поэтому Ξ_k является фундаментальной последовательностью и относительно дистанции, порожденной q . Из первого неравенства в (4.19) следует, что спроектированная на базу последовательность $\nu_* \Xi_k$ является фундаментальной последовательностью в M относительно дистанции, порожденной g_M . Из полноты базы следует, что при $k \rightarrow \infty$ $\nu_* \Xi_k \rightarrow z \in U$, где U – некоторое замкнутое множество базы, которое допускает тривиализацию. Обозначим $P = Q \cap \nu^{-1}(U)$. Риманово многообразие (P, q) является прямым произведением полных римановых многообразий: замкнутого подмногообразия полного риманова пространства S и базы с римановой метрикой cg_M . Поэтому (P, q) также является полным римановым многообразием и относительно дистанции, порожденной q , рассматриваемая последовательность сходится. Из первого неравенства в (4.19) следует, что $g \leq r \cdot q$ и последовательность Ξ_k сходится и относительно дистанции, порожденной g . Таким образом, E является полным кэлеровым многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулой (4.15) в расслоении E определяется кэлера метрика, слоями которой служат псевдосферы Бельтрами кривизны -2π .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. № 2. P. 236–242.
- [2] Окрут С. И. Скрещенное произведение в кэлеровой геометрии // Матем. физика, анализ, геометрия. 1997. Т. 4. № 1/2.
- [3] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. В 2-х т. М.: Наука, 1981.
- [4] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. В 2-х т. М.: Мир, 1990.
- [5] Molino P. Riemannian Foliations. Boston: Birkhäuser, 1988.
- [6] Tonder Ph. Foliations on Riemannian manifolds. N. Y.: Springer-Verlag, 1988.
- [7] Gray A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions // J. Math. Mech. 1967. V. 16. № 7. P. 715–737.
- [8] Nomizu K., Ozeki H. The existence of complete Riemannian metrics // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. № 6. P. 889–891.
- [9] Чжэнь Шэн-шэнь Комплексные многообразия. М.: ИЛ., 1961.
- [10] Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.

Харьковский государственный университет

Поступило
21.05.98