Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Б. Салимов, Н. К. Туктамышов, Решение задачи Гильберта для кольца в особом случае и его применение к одной задаче взрыва, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 135–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:32:10

УДК 517.544

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КОЛЬЦА В ОСОБОМ СЛУЧАЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЗРЫВА

Р. Б. Салимов, Н. К. Туктамышов

В статье приведен метод решения краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для аналитической и однозначной в кольце функции, когда решение может иметь степенные особенности в конечном числе точек на границе кольца. В качестве применения полученных результатов рассмотрена задача о взрыве двух шнуровых зарядов в однородной среде, когда в ней имеется круговой цилиндр, обтекаемый возникающим при взрыве течением.

Библиография: 10 названий.

Пусть в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ дано кольцо $D: q < |z| < 1$ и $L = L_0 + L_1$ – граница области D , где L_0 есть окружность $|z| = q$. За положительное направление обхода примем такое, при котором область D остается слева. Требуется определить функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в D , кроме конечного числа точек t_{j,k_j} , $k_j = 1, \dots, p_j$, $j = 0, 1$, вблизи которых $F(z)$ может иметь степенные особенности порядка не выше $m_{j,k_j} + \lambda_{j,k_j}$, где m_{j,k_j} – целое неотрицательное число, $0 \leq \lambda_{j,k_j} < 1$, $k_j = 1, \dots, p_j$, по краевому условию

$$\operatorname{Re}\{(a(t) + ib(t))F(t)\} = \frac{c(t)}{\prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{m_{j,k_j} + \mu_{j,k_j}}}, \quad (1)$$

где $0 \leq \mu_{j,k_j} < 1$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданные на L действительные функции, имеющие разрывы первого рода в точках t_{j,k_j} , $k_j = 1, \dots, p_j$, $j = 0, 1$, и удовлетворяющие условию Гёльдера на каждой из дуг t_{j,k_j}, t_{j,k_j+1} , $k_j = 0, \dots, p_j$, $j = 0, 1$, включая концы, причем $t_{j,0} = t_{j,p_j+1} = q^j$, $j = 0, 1$. Считаем, что точки $t = 1$ и $t = q$ не являются точками разрыва коэффициентов условия (1). При этом будем считать, что при положительном обходе контура L за точкой t_{j,k_j} следует точка t_{j,k_j+1} , $k_j = 0, \dots, p_j$, $j = 0, 1$. Предположим, что $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L .

Особый случай задачи Гильберта для круга рассмотрен в статье [1]. Как известно, Ф. Д. Гахов [2, с. 264–289] дал эффективное решение краевой задачи Гильберта для односвязной области, основанное на отыскании регуляризующего множителя. Используя метод построения однозначного регуляризующего множителя, Э. И. Зверович [3] получил решение этой задачи для многосвязной области.

Во всех упомянутых работах коэффициенты краевого условия предполагаются непрерывными. В настоящей статье метод, разработанный Зверовичем, с некоторыми изменениями обобщается на случай разрывных коэффициентов, когда область имеет форму кольца.

Отметим, что большое число задач из различных областей гидродинамики (в частности, теории безотрывных, струйных, кавитационных течений невязкой жидкости [4], [5], теории фильтрации [6], взрыва [7] и т.д.) в математической постановке приводятся к нахождению аналитической функции в канонических областях с краевыми условиями вида (1). Вместе с тем решение многих из них имеет довольно громоздкий вид и включает в себя большое число различных специальных функций. В данной работе приводится достаточно простой метод решения задачи (1), удобный и с точки зрения приложений. В частности, в качестве иллюстрации приведено решение одной задачи взрыва.

Решение задачи будем искать в виде

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{\prod_{k=0}^{p_0} (z - t_{0,k_0})^{m_{0,k_0}} \prod_{k=1}^{p_1} \left(\frac{z - t_{1,k_1}}{z}\right)^{m_{1,k_1}}}, \quad (2)$$

где $F_1(z)$ – аналитическая и однозначная в области D функция, имеющая, быть может, лишь интегрируемые особенности в точках t_{j,k_j} , $k_j = 1, \dots, p_j$, $j = 0, 1$.

Обозначим через $\theta_{0,k_0}(t) = \arg(t - t_{0,k_0})$ граничное значение непрерывной в D ветви $\arg(z - t_{0,k_0})$, которая при $t = \exp(i\gamma)$ принимает значение $\theta_{0,k_0} = 3\pi/2 + (\gamma + \gamma_{0,k_0})/2$ при $0 \leq \gamma < \gamma_{0,k_0}$, $\theta_{0,k_0} = \pi/2 + (\gamma + \gamma_{0,k_0})/2$ при $\gamma_{0,k_0} < \gamma \leq 2\pi$ ($\gamma_{0,k_0} = \arg t_{0,k_0}$), $\theta_{1,k_1}(t) = \arg((t - t_{1,k_1})/t)$ – граничное значение непрерывной в D ветви $\arg((z - t_{1,k_1})/z)$, которая при $t = q \exp(i\gamma)$ принимает значение $\theta_{1,k_1} = -\pi/2 + (\gamma_{1,k_1} - \gamma)/2$ при $0 \leq \gamma < \gamma_{1,k_1}$, $\theta_{1,k_1} = (\pi + \gamma_{1,k_1} - \gamma)/2$ при $\gamma_{1,k_1} < \gamma \leq 2\pi$ ($\gamma_{1,k_1} = \arg t_{1,k_1}$). Тогда с учетом формулы (2) условие (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(e^{-i(\nu(t) + \sum_{j=0,1} \sum_{k_j=1}^{p_j} m_{j,k_j} \theta_{j,k_j}(t))} F_1(t) \right) \\ &= \frac{c(t)|t|^{-\sum_{k_1=1}^{p_1} m_{1,k_1}}}{|G(t)| \prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, $\nu(t)$ – ветвь $\arg G(t)$, выбранная так, чтобы в точках разрыва выполнялось неравенство $0 \leq \nu(t_{j,k_j} + 0) - \nu(t_{j,k_j} - 0) < 2\pi$ (через $\nu(t_{j,k_j} - 0)$, $\nu(t_{j,k_j} + 0)$ обозначены пределы, к которым стремится $\nu(t)$, когда точка t стремится к t_{j,k_j} соответственно в положительном и отрицательном направлении).

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ целочисленная функция, принимающая значение β_{j,k_j} на каждой из дуг $t_{j,k_j}t_{j,k_j+1}$, $k_j = 0, \dots, p_j$, $j = 0, 1$. Положив $\beta_{j,0} = 0$, подберем β_{j,k_j} так, чтобы число $\delta_{j,k_j} = \varphi(t_{j,k_j} + 0) - \varphi(t_{j,k_j} - 0)$ удовлетворяло неравенству $-\pi < \delta_{j,k_j} \leq 0$, если ищется решение, ограниченное вблизи точки t_{j,k_j} , и неравенству $0 < \delta_{j,k_j} < \pi$, если ищется решение, неограниченное вблизи точки t_{j,k_j} . Полагая $\beta_{j,0} = 0$, $j = 0, 1$, получим определенную на всем контуре L функцию $\beta(t)$. При положительном обходе контура L_j функция $\varphi(t)$ получит приращение $\varphi(t_{j,0} - 0) - \varphi(t_{j,0} + 0) = N_j\pi$, где N_j – целое число, $j = 0, 1$.

Рассмотрим функцию $\theta(t) = \sum_{j=0,1} \sum_{k_j=1}^{p_j} m_{j,k_j} \theta_{j,k_j}(t) - \beta_1(t)\pi$, где $\beta_1(t) = 0$ на дуге $t_{j,0}t_{j,1}$, $\beta_1(t) = -\sum_{k_j=1}^{l_j} m_{j,k_j}$ на дуге $t_{j,l_j}t_{j,l_j+1}$, $l_j = 1, \dots, p_j$, $j = 0, 1$. Нетрудно убедиться, что функция $\theta(t)$ непрерывна в точках t_{j,k_j} , $k_j = 1, \dots, p_j$, $j = 0, 1$, а при обходе контура L_j получит приращение $m_j\pi$, причем $m_j = \sum_{k_j=1}^{p_j} m_{j,k_j}$, $j = 0, 1$.

Число $N = N_0 + m_0 + N_1 + m_1$ будем называть *индексом* задачи, отвечающим данному классу решений.

1. Пусть $N_0 + m_0$ и $N_1 + m_1$ – четные числа. Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t) = \varphi(t) + \theta(t) + \frac{N_1 + m_1}{2} \arg(t) - \left(\frac{N}{2} - 1\right) \arg(t - p) - \arg(t - z_1) + \sigma(t)\pi n, \quad t \in L,$$

где $z_1 = r \exp(i\alpha)$, $q < r < 1$, $0 \leq \alpha < \pi$; $q < p < 1$; $\sigma(t) = 0$ при $t \in L_0$, $\sigma(t) = 1$ при $t \in L_1$; n – целое число; $\arg(t)$ – значение на L ветви $\arg z$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль линии $y = 0$, $x \geq 1$; $\arg(t - p)$ – значение на L ветви $\arg(z - p)$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль линии $y = 0$, $x \geq p$, причем $0 \leq \arg z < 2\pi$, $0 \leq \arg(z - p) < 2\pi$; $\arg(t - z_1)$ – значение на L определенной ветви $\arg(z - z_1)$, непрерывной и однозначной в области D с разрезом вдоль линии, соединяющей точки $z = z_1$ и $z = 1$ и лежащей внутри верхнего полукольца. Здесь $z = p$ – заданная точка, $z = z_1$ – точка, положение которой будет определено ниже. Нетрудно убедиться, что функция $\psi(t)$ будет непрерывной в точках $z = 1$ и $z = q$.

С учетом введенных выше функций условие (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\psi(t)} t^{\frac{N_1+m_1}{2}} F_1(t)}{(t - z_1)(t - p)^{\frac{N}{2}-1}} \right) \\ = \frac{c(t)|t|^{\frac{N_1-m_1}{2}} \cos((\beta(t) + \beta_1(t))\pi) \cos(\sigma(t)\pi n)}{|G(t)| |t - z_1| |t - p|^{\frac{N}{2}-1} \prod_{j=0,1}^{p_j} \prod_{k_j=1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Определим однозначную и аналитическую в области D функцию $\Gamma(z)$, граничные значения мнимой части которой равны $\psi(t)$. Такая функция существует, если выполняется условие однозначности [8, с. 239]

$$\int_0^{2\pi} \psi(\exp(i\gamma)) d\gamma - \int_0^{2\pi} \psi(q \exp(i\gamma)) d\gamma \equiv \int_L \psi(t) \frac{dt}{it} = 0. \quad (5)$$

Условие (5) будет выполняться, если положить

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_L \varphi(t) \frac{dt}{it} + \frac{1}{2} \sum_{j=0,1} \sum_{k_j=1}^{p_j} m_{j,k_j} \gamma_{j,k_j} + \pi(n - m_0).$$

При этом число n следует выбрать так, чтобы $0 \leq \alpha < \pi$. Затем с помощью формулы Вилля находим

$$\Gamma(z) = iS(\psi, z), \quad (6)$$

где $S(\psi, z) \equiv \frac{\omega}{\pi^2} \int_L \psi(t) [\zeta(\frac{\omega}{i\pi} \ln \frac{z}{t}) + \sigma(t)\eta] \frac{dt}{t}$, $q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$ (см. [8, с. 238]). Умножая условие (4) на $\exp[-\Gamma_0(t)]$, где $\Gamma_0(t) = \operatorname{Re} \Gamma^+(t)$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\Gamma^+(t)} t^{\frac{N_1+m_1}{2}} F_1(t)}{(t - z_1)(t - p)^{\frac{N}{2}-1}} \right) = c_1(t) \\ \equiv \frac{c(t)|t|^{\frac{N_1-m_1}{2}} \cos[(\beta(t) + \beta_1(t))\pi] \cos(\sigma(t)\pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)| |t - z_1| |t - p|^{\frac{N}{2}-1} \prod_{j=0,1}^{p_j} \prod_{k_j=1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\Gamma^+(t)$ граничное значение функции $\Gamma(z)$ при стремлении z к t из D .

а) Пусть $\aleph \geq 2$. Используя результаты статьи [9], при $\aleph > 2$ получим формулу, дающую решение задачи (7), заменяя в ней функцию $F_1(z)$ на выражение, определяемое формулой (2),

$$F(z) = \frac{(z - z_1)(z - p)^{\frac{\aleph}{2}} z^{\frac{m_1 - \aleph_1}{2}} e^{\Gamma(z)}}{\prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} (z - t_{j,k_j})^{m_{j,k_j}}} \left\{ S(\tilde{c}_1, z \right. \\ \left. + iC_0 + \sum_{k=1}^{\frac{\aleph}{2}-1} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(z - p)^k} + \frac{\nu' + i\nu''}{z - z_1} \right\}, \quad (8)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1 - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\frac{\aleph}{2}-1} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(t - p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu' + i\nu''}{t - z_1}, \\ \mu'_1 = \frac{p}{2\pi} \int_L c_1(t) \frac{dt}{it} - \frac{p}{r} (\nu' \cos \alpha + \nu'' \sin \alpha) - \sum_{k=2}^{\frac{\aleph}{2}-1} \frac{\mu'_k}{(-p)^{k-1}},$$

$C_0, \nu', \nu'', \mu'_1, \mu'_k, \mu''_k, k = 2, \dots, \aleph/2 - 1$, — произвольные действительные постоянные. В случае $\aleph = 2$ решение будет определяться формулой (8), если в ней положить равными нулю все μ'_k, μ''_k . При этом следует принять

$$\nu' = \frac{r}{2\pi} \int_L \frac{c_1(t) dt}{it},$$

когда $\alpha = 0$, или

$$\nu'' = \frac{r}{2\pi} \int_L c_1(t) \frac{dt}{it} - \nu' \operatorname{ctg} \alpha,$$

когда $\alpha > 0$.

б) Пусть $\aleph = 0$. Условие (3) запишем в виде

$$\operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\psi(t)} (t - z_1) t^{\frac{\aleph_1 + m_1}{2}} F_1(t)}{(t - p)} \right) = c_1(t) \\ \equiv \frac{c(t) |t - z_1| |t|^{\frac{\aleph_1 - m_1}{2}} \cos((\beta(t) + \beta_1(t))\pi) \cos(\sigma(t)\pi n)}{|G(t)| |t - p| \prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}}}, \quad (9)$$

где

$$\psi(t) = \varphi(t) + \theta(t) + \frac{\aleph_1 + m_1}{2} \arg t - \arg(t - p) + \arg(t - z_1) + \sigma(t)\pi n, \quad t \in L. \quad (10)$$

Определяя, как и выше, число $\alpha = \arg z_1$ так, чтобы функция (10) удовлетворяла условию (5), найдем по формуле (6) функцию $\Gamma(z)$. После этого условие (9) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\Gamma^+(t)}(t - z_1)t^{\frac{\kappa_1 + m_1}{2}} F_1(t)}{t - p} \right) \\ &= c_1(t) \equiv \frac{c(t)|t - z_1| |t|^{\frac{\kappa_1 - m_1}{2}} \cos((\beta(t) + \beta_1(t))\pi) \cos(\sigma(t)\pi n)}{|G(t)| |t - p| \prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}} e^{\Gamma_0(t)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

б₁) Пусть $\alpha > 0$. Тогда единственное решение задачи определяется следующей формулой

$$\begin{aligned} F(z) = & \frac{(z - p)z^{\frac{m_1 - \kappa_1}{2}} e^{\Gamma(z)}}{(z - z_1) \prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} (z - t_{j,k_j})^{\mu_{j,k_j}}} \left\{ S(\tilde{c}_1, z) \right. \\ & \left. + \frac{p}{2\pi(z - p)} \int_L \frac{c_1(t)dt}{it} + iC_0 + iC_1 g(z) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \frac{p}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{t - p} \int_L \frac{c_1(t)dt}{it},$$

а

$$g(z) = \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K \ln p}{\ln q}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K \ln z}{\ln q}\right) - \operatorname{sn}^2\left(\frac{K \ln p}{\ln q}\right)}$$

– функция, конформно отображающая область D на внешность разрезом вдоль двух отрезков вещественной оси. Постоянные C_0 и C_1 определяются из условий

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S(\tilde{c}_1, z_1) + \frac{p}{2\pi} \int_L \frac{c_1(t)dt}{it} \operatorname{Re} \frac{1}{z_1 - p} + C_1 \operatorname{Re}(ig(z_1)) &= 0, \\ \operatorname{Im} S(\tilde{c}_1, z_1) + \frac{p}{2\pi} \int_L \frac{c_1(t)dt}{it} \operatorname{Im} \frac{1}{z_1 - p} + C_0 + C_1 \operatorname{Im}(ig(z_1)) &= 0. \end{aligned}$$

б₂) Пусть $\alpha = 0$. Положим в условии (11) $z_1 = p$. Тогда, если выполняется равенство

$$\int_L c_1(t) \frac{dt}{it} = 0, \quad (12)$$

решение задачи будет определяться формулой

$$F(z) = \frac{z^{\frac{m_1 - \kappa_1}{2}} \exp(\Gamma(z))}{\prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} (z - t_{j,k_j})^{m_{j,k_j}}} \{S(c_1, z) + iC_0\}.$$

При невыполнении условия (12) задача неразрешима.

в) Пусть $\aleph \leq -2$. При $\aleph < -2$ задача будет разрешима, если выполняются следующие условия

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L c_1(t) \left[\zeta \left(\frac{\omega}{\pi^2} \ln \frac{p}{t} \right) + \sigma(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + iC_0 = 0, \quad (13)$$

$$\int_L c_1(t) \zeta^{(k)} \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln \frac{p}{t} \right) \frac{dt}{t} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\frac{\aleph}{2} - 2, \quad (14)$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L c_1(t) \left[\zeta \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln \frac{z_1}{t} \right) + \sigma(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + iC_0 = 0, \quad (15)$$

$$\int_L c_1(t) \frac{dt}{t} = 0, \quad (16)$$

где

$$c_1(t) = \frac{c(t)|t - z_1||t|^{\frac{\aleph_1 - m_1}{2}} \cos[(\beta(t) + \beta_1(t))\pi] \cos(\sigma(t)\pi n)}{|G(t)||t - p|^{\frac{\aleph}{2} - 1} \prod_{j=0,1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}} \exp\{\Gamma_0(t)\}},$$

$$\Gamma_0(t) = \operatorname{Re} \Gamma^+(t), \quad \Gamma(z) = iS(\psi, z),$$

$$\psi(t) = \varphi(t) + \theta(t) + \frac{\aleph_1 + m_1}{2} \arg t$$

$$- \left(\frac{\aleph}{2} + 1 \right) \arg(t - p) + \arg(t - z_1) + \sigma(t)\pi n.$$

Выделяя в равенствах (13)–(15) действительные и мнимые части, приходим к $-\aleph$ действительным соотношениям, одно из которых можно удовлетворить подбором постоянной C_0 . Оставшиеся соотношения и соотношение (16) будут являться условиями разрешимости задачи. В случае выполнения этих условий единственное решение задачи будет определяться формулой

$$F(z) = \frac{(z - p)^{\frac{\aleph}{2} + 1} z^{\frac{m_1 - \aleph_1}{2}} \exp(\Gamma(z))}{(z - z_1) \prod_{j=0,1}^{p_j} (z - t_{j,k_j})^{m_{j,k_j}}} \{S(c_1, z) + iC_0\}.$$

При $\aleph = -2$ решение задачи будет определяться последней формулой, если выполняется условие (16) и условие, получаемое из (15) выделением действительных частей (выделяя в (15) мнимые части, приходим к соотношению, из которого находится C_0).

2. Пусть $\aleph_0 + m_0$ – нечетное, $\aleph_1 + m_1$ – четное числа. Краевое условие (3) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\psi(t)} t^{\frac{\aleph_1 + m_1}{2}} (t - 1) F_1(t)}{(t - p)^{\frac{\aleph - 1}{2}} (t - z_1)} \right]$$

$$= \frac{c(t)|t|^{\frac{\aleph_1 - m_1}{2}} |t - 1| \cos((\beta(t) + \beta_1(t))\pi) \cos(\sigma(t)\pi n)}{|G(t)| \prod_{j=0,1}^{p_j} |t - t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}} |t - z_1| |t - p|^{\frac{\aleph - 1}{2}}}. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi(t) = \varphi(t) + \theta(t) + \frac{\aleph_1 + m_1}{2} \arg t - \frac{\aleph - 1}{2} \arg(t - p) \\ + \arg(t - 1) - \arg(t - z_1) + \sigma(t)\pi n. \end{aligned} \quad (18)$$

В формуле (17) под $\arg(t - 1)$ понимается значение на L ветви $\arg(z - 1)$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль линии $y = 0$, $x \geq 1$, причем $0 \leq \arg(z - 1) < 2\pi$.

Определим число $\alpha = \arg z_1$ так, чтобы функция (18) удовлетворяла условию (5), и с помощью формулы (6) найдем функцию $\Gamma(z)$. Затем соотношение (7) представим в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-\Gamma^+(t)}(t-1)t^{\frac{\aleph_1+m_1}{2}} F_1(t)}{(t-p)^{\frac{\aleph-1}{2}}(t-z_1)} \right] = c_1(t) \\ \equiv \frac{c(t)|t|^{\frac{\aleph_1-m_1}{2}}|t-1|\cos((\beta(t)+\beta_1(t))\pi)\cos(\sigma(t)\pi n)\exp(-\Gamma_0(t))}{|G(t)|\prod_{j=0,1}\prod_{k_j=1}^{p_j}|t-t_{j,k_j}|^{\mu_{j,k_j}}|t-z_1||t-p|^{\frac{\aleph-1}{2}}}. \end{aligned}$$

а) Пусть $\aleph \geq 1$. При $\aleph > 1$ по аналогии с пунктом 1 получим

$$\begin{aligned} F_1(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{\frac{\aleph-1}{2}}e^{\Gamma(z)}}{(z-1)z^{\frac{\aleph_1+m_1}{2}}} \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\frac{\aleph-1}{2}} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(z-p)^k} + \frac{\nu' + i\nu''}{z-z_1} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) = c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\frac{\aleph-1}{2}} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu' + i\nu''}{t-z_1}, \\ \mu'_1 = \frac{pd}{2\pi} - \frac{p}{r}(\nu' \cos \alpha + \nu'' \sin \alpha) - \sum_{k=2}^{\frac{\aleph-1}{2}} \frac{\mu'_k}{(-p)^{k-1}}, \quad d = \int_L c_1(t) \frac{dt}{it}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (19)

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{\frac{\aleph-1}{2}}z^{\frac{m_1-\aleph_1}{2}}\exp(\Gamma(z))}{(z-1)\prod_{j=0,1}\prod_{k_j=1}^{p_j}(z-t_{j,k_j})^{m_{j,k_j}}} \left\{ S(\tilde{c}_1, z) \right. \\ \left. + iC_0 + \sum_{k=1}^{\frac{\aleph-1}{2}} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(z-p)^k} + \frac{\nu' + i\nu''}{z-z_1} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для того чтобы функция (20) являлась решением исходной задачи, необходимо соблюдение условия

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{\omega \ln t}{\pi i} \right) + \sigma(t)\eta' \right] \frac{dt}{it} + C_0 + \sum_{k=1}^{\frac{\aleph-1}{2}} \frac{\mu''_k}{(1-p)^k} + \operatorname{Im} \frac{\nu' + i\nu''}{1-z_1} = 0.$$

Это равенство удовлетворим подбором постоянной C_0 и из него найдем выражение для C_0 . Тогда решение исходной задачи определяется формулой (20) и будет содержать N произвольных постоянных $\nu', \nu'', \mu'_1, \mu'_k, \mu''_k, k = 2, \dots, (N-1)/2$.

При $N = 1$ формула (20) будет определять решение исходной задачи, если в ней положить $\mu'_k = \mu''_k = 0$ для $k \geq 1$,

$$\nu'' = \frac{rd}{2\pi \sin \alpha} - \nu' \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{\omega \ln t}{\pi i} \right) + \sigma(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} - \operatorname{Im} \frac{\nu' + i\nu''}{1 - z_1}$$

в случае $\alpha > 0$ и $\mu'_k = \mu''_k = 0$ для $k \geq 1$, $\nu' = rd/(2\pi)$,

$$C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{\omega \ln t}{\pi i} \right) + \sigma(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} - \frac{\nu''}{1 - r},$$

когда $\alpha = 0$. Решение будет содержать произвольную постоянную ν' при $\alpha > 0$ или ν'' при $\alpha = 0$.

б) В случае $N \leq -1$ получим

$$F(z) = \frac{(z - z_1)(z - p)^{\frac{N-1}{2}} z^{\frac{m_1-N_1}{2}} \exp(\Gamma(z))}{(z - 1) \prod_{j=0,1} \prod_{k_j=1}^{p_j} (z - t_{j,k_j})^{m_{j,k_j}}} \left\{ S(\tilde{c}_1, z) \right. \\ \left. + iC_0 + \frac{\nu' e^{i\alpha}}{z - z_1} + iC_1 \tilde{g}(z) \right\}, \quad (21)$$

где $\tilde{c}_1(t) = c_1(t) - \operatorname{Re} \nu' e^{i\alpha}/(t - z_1)$, $\nu' = pd/(2\pi)$, $\tilde{g}(z) = g(ze^{-i\alpha})$. Чтобы формула (21) определяла решение исходной задачи, необходимо соблюдение условия

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{\omega \ln t}{\pi i} \right) + \sigma(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + \nu' \operatorname{Im} \frac{e^{i\alpha}}{1 - z_1} + C_0 + C_1 \tilde{g}(1) = 0, \quad (22)$$

а также условий

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(\frac{\omega \ln p}{\pi i} - \frac{\omega \ln t}{\pi i} \right) + \sigma(t) \eta' \right] \frac{dt}{t} + iC_0 + \frac{\nu' e^{i\alpha}}{p - z_1} + iC_1 \tilde{g}(p) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \zeta^{(k)} \left(\frac{\omega \ln p}{\pi i} - \frac{\omega \ln t}{\pi i} \right) \frac{dt}{t} + \frac{\nu' e^{i\alpha} (-1)^k k!}{(p - z_1)^{k+1}} \\ + iC_1 \tilde{g}^{(k)}(p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\frac{N-1}{2} - 1. \quad (24)$$

Условие (22), а также условие, получающееся выделением мнимой части из (23), удовлетворим подбором постоянных C_0 и C_1 . Условие, получающееся из (23) выделением действительной части, а также условие (24) дают $-N$ действительных условий разрешимости. При их выполнении решение дается формулой (21).

Оставшиеся два случая, когда $N_0 + m_0$ и $N_1 + m_1$ оба нечетные либо $N_0 + m_0$ – четное, а $N_1 + m_1$ – нечетное числа, рассматриваются аналогично предыдущим.

3. В качестве примера применения вышеизложенных результатов рассмотрим задачу о взрыве двух шнуровых зарядов в однородной среде, когда в ней имеется круговой цилиндр, обтекаемый возникающим при взрыве течением. Будем считать, что заряды в плоскости $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$, перпендикулярной их осям, моделируются диполями с моментами M_0 и M_1 , расположенными на свободной поверхности $\tilde{y} = 0$. При этом используется импульсно-гидродинамическая модель [10].

В рамках этой модели жидкость ведет себя как идеальная несжимаемая жидкость во всей занимаемой ею области, а движение будет плоскопараллельным. Свободную поверхность примем за ось $\tilde{x}$, на которой в точках $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ расположены заряды, моделируемые диполями. Итак, задан цилиндр радиуса a_0 , его ось расположена на глубине h ($h > a_0$) от свободной поверхности.

Введем комплексный потенциал $\tilde{w}(\tilde{z}) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Для него имеем следующие граничные условия: $\tilde{\varphi} = 0$ на оси $\tilde{o}\tilde{x}$, $\tilde{\psi} = 0$ на границе круга. Причем в окрестности точек $\tilde{z}_0 = \tilde{x}_0$ и $\tilde{z}_1 = \tilde{x}_1$ имеем

$$\tilde{w}(\tilde{z}_1) \approx \frac{iM_1}{2\pi(\tilde{z} - \tilde{z}_1)}, \quad \tilde{w}(\tilde{z}_0) \approx \frac{iM_0}{2\pi(\tilde{z} - \tilde{z}_0)},$$

где M_0 и M_1 – моменты диполей.

Отообразим область течения на кольцо $q < |z| < 1$ функцией

$$z = \frac{(\tilde{z} + i\sqrt{h^2 - a_0^2})}{(\tilde{z} - i\sqrt{h^2 - a_0^2})}.$$

Радиус внутренней окружности q ($q < 1$) будет равен

$$q = \frac{(\sqrt{h + a_0} + \sqrt{h - a_0})}{(\sqrt{h + a_0} - \sqrt{h - a_0})}.$$

При этом отображении оси $O\tilde{x}$ соответствует окружность $|z| = 1$, точке x_0 соответствует t_0 , $\tilde{x}_1$ соответствует t_1 на окружности $|z| = 1$. Таким образом, для кольца получили задачу Гильберта $a(t)\tilde{\varphi}(t) - b(t)\tilde{\psi}(t) = c(t)$, причем $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ на $|z| = 1$ и $a = 0$, $b = -1$, $c = 0$ на $|z| = q$ или

$$\operatorname{Re}[(a + ib)\tilde{w}] = 0. \quad (25)$$

Представим $\tilde{w}(z)$ в виде $\tilde{w}(z) = w_1(z)/((z - t_0)(z - t_1))$, где $w_1(z)$ – аналитическая и однозначная в кольце $q < |z| < 1$ функция. Запишем условие (25) в виде

$$\operatorname{Re}\{e^{-i(\nu(t) + \arg(t - t_0) + \arg(t - t_1))} w_1(t)\} = 0, \quad (26)$$

где $\nu(t) = \arg(a - ib)$.

Введем, как это было сделано ранее, функцию $\varphi_1(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, причем $\beta(t)$ подберем так, чтобы $-\pi < \varphi_1(t_j + 0) - \varphi_1(t_j - 0) \leq 0$ ($j = 0, 1$), так как функция $w_1(t)$ ограничена в точках t_0, t_1 .

Здесь можно убедиться, что $\aleph_0 = \aleph_1 = 0$, $m_0 = 2$, $m_1 = 0$. Значит, индекс задачи $\aleph = 2$, причем $\aleph_0 + m_0 = 2$, $\aleph_1 = 0$. Следовательно, можно применить результаты пункта 1.

Таким образом, решение определяется формулой

$$\bar{w}(z) = \frac{(z - z_1)e^{\Gamma(z)}}{(z - t_0)(z - t_1)} \left\{ S(\bar{c}_1, z) + iC_0 + \frac{\nu' + i\nu''}{z - z_1} \right\}, \quad (27)$$

причем

$$\bar{c}_1 = c_1(t) - \operatorname{Re} \frac{\nu' + i\nu''}{t - z_1} = -\operatorname{Re} \frac{\nu' + i\nu''}{t - z_1}.$$

При этом

$$\nu'' = \frac{r}{2\pi} \int_L c_1(t) \frac{dt}{it} - \nu' \operatorname{ctg} \alpha,$$

т.е. $\nu'' = -\nu' \operatorname{ctg} \alpha$,

$$\Gamma(z) = iS(\psi, z) = i\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \psi(t) \left[\zeta\left(\frac{\omega \ln \frac{z}{t}}{\pi i}\right) + \sigma(t)\eta' \right] \frac{dt}{t},$$

$$\psi(t) = \varphi(t) + \theta(t) - \arg(t - z_1) + \sigma(t)\pi n.$$

Имея комплексный потенциал (27), легко получить в физической плоскости все интересующие гидродинамические характеристики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Комяк И. И., Усс А. Г. Особый случай задачи Гильберта // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975. №6. С. 27–29.
- [2] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1979.
- [3] Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. №1. С. 113–179.
- [4] Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
- [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
- [6] Мускат М. Течения однородных жидкостей в пористой среде. М.: Мир, 1949.
- [7] Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Краевые задачи теории взрыва. Казань: Изд-во Казанского университета, 1976.
- [8] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- [9] Салимов Р. Б., Селезнёв В. В. Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца // Труды семинара по краевым задачам. №17. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980.
- [10] Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1977.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия
E-mail: salimov@ksaba.ksn.ru

Поступило
24.08.98