Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Скубачевский, Р. В. Шамин, Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 145–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:34:01

УДК 517.95.956.4, 517.929

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Л. Скубачевский, Р. В. Шамин

Рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным. Доказаны однозначная разрешимость этой задачи и гладкость обобщенных решений в некоторых цилиндрических подобластях. Показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться на границах соседних подобластей.

Библиография: 7 названий.

Введение. Параболические функционально-дифференциальные уравнения возникают при исследовании нелинейных оптических систем с двумерной обратной связью [1]–[3]. В отличие от параболических дифференциальных уравнений эти уравнения обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри цилиндрической области даже при бесконечно гладкой правой части уравнения.

В настоящей работе рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным. Доказаны однозначная разрешимость этой задачи и гладкость обобщенных решений в некоторых цилиндрических подобластях. Показано также, что гладкость обобщенных решений может нарушаться на границах соседних подобластей.

1. Постановка задачи. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup_i \overline{M_i}$ ($i = 1, \dots, N_0$), где M_i – $(n - 1)$ -мерные многообразия класса C^∞ , которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q . Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup_i M_i$ область Q – диффеоморфна n -мерному двугранному углу, если $n \geq 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Мы будем обозначать через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k -го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |D^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Конкурсного Центра по фундаментальным и естественным наукам при Санкт-Петербургском Государственном университете (№ 97–14.3–37).

Через $\overset{\circ}{W}_2^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$, а через $W_2^{-1}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$.

Введем ограниченный дифференциально-разностный оператор $A_R: \overset{\circ}{W}_2^1(Q) \rightarrow W_2^{-1}(Q)$ по формуле

$$A_R u = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n R_{iQ} u_{x_i} + R_{0Q} u. \quad (1.1)$$

Здесь $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q$, $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$,

$$\begin{aligned} R_{ij} u(x) &= \sum_{h \in M} a_{ijh}(x) u(x+h) \quad (i, j = 1, \dots, h), \\ R_i u(x) &= \sum_{h \in M} a_{ih}(x) u(x+h) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \end{aligned}$$

$M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами, a_{ijh} , $a_{ih} \in C^\infty(\overline{Q})$; $I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ – оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; $P_Q: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$ – оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $-A_R$ мы будем называть *сильно эллиптическим*, если существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$ такие, что для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$-\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|_{W_2^1(Q)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (1.2)$$

Необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в алгебраической форме будут сформулированы в конце этого пункта.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x, t) - A_R u(x, t) = f(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega_T) \quad (1.3)$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \quad ((x, t) \in \Gamma_T) \quad (1.4)$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (x \in Q), \quad (1.5)$$

где $\Omega_T = Q \times (0, T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что оператор $-A_R$ – сильно эллиптический. В этом случае задачу (1.3)–(1.5) естественно называть первой смешанной задачей для параболического дифференциально-разностного уравнения. Не ограничивая общности, мы будем считать, что в неравенстве (1.2) $c_2 = 0$. Действительно, стандартная замена неизвестной функции $u = \exp(c_2 t) w$ сводит уравнение (1.3) к виду $(-A_R + c_2 I) w + w_t = \exp(-c_2 t) f(x, t)$ $((x, t) \in \Omega_T)$.

Для того чтобы сформулировать условия сильной эллиптичности оператора $-A_R$, введем некоторые вспомогательные обозначения. Эти обозначения понадобятся нам также в п. 4 для исследования гладкости обобщенных решений задачи (1.3)–(1.5). Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M , а через Q_r открытые связанные компоненты множества

$$Q \setminus \left(\bigcup_{h \in G} (\partial Q + h) \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r – *разбиением* множества Q .

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl} , где s – номер класса ($s = 1, 2, \dots$), а l – порядковый номер подобласти в s -м классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leq ([\text{diam } Q] + 1)^n$.

Для того чтобы сформулировать необходимые условия сильной эллиптичности в алгебраической форме, мы введем матрицы $R_{ijs}(x)$ ($x \in \overline{Q}_{s1}$) порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x + h_{sk}) & (h = h_{sl} - h_{sk} \in M), \\ 0 & (h_{sl} - h_{sk} \notin M). \end{cases} \quad (1.6)$$

В силу теоремы 9.1 из [3] если оператор $-A_R$ сильно эллиптический, то для всех $s = 1, 2, \dots$, $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ijs}(x) + R_{ijs}^*(x)) \xi_i \xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x \in \overline{Q}_{s1}$ – произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l \in \overline{Q}$ такие, что $x^l - x \in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s, x)$ ($I \geq N(s)$). Перенумеруем точки x^l так, что $x^l = x + h_{sl}$ для $l = 1, \dots, N = N(s)$, $x^1 = x$, где h_{sl} удовлетворяет условию $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$. Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ с элементами $a_{lk}^{ijs}(x)$ по формуле

$$a_{lk}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x^l) & (h = x^k - x^l \in M), \\ 0 & (x^k - x^l \notin M). \end{cases}$$

В силу теоремы 9.2, из [3] если для всех $s = 1, 2, \dots$, $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^n (A_{ijs}(x) + A_{ijs}^*(x)) \xi_i \xi_j$$

положительно определены, то оператор $-A_R$ – сильно эллиптический.

Очевидно, если $I = N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N < I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I - N$ строк и столбцов.

2. Существование и единственность обобщенного решения. Обозначим через $W_2^{k,0}(\Omega_T)$ пространство Соболева комплекснозначных функций $u \in L_2(\Omega_T)$, имеющих обобщенные производные $u_{x_i} \in L_2(\Omega_T)$ ($i = 1, \dots, n$) с нормой

$$\|u\|_{W_2^{k,0}(\Omega_T)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega_T} |\mathcal{D}^\alpha u(x, t)|^2 dx dt + \int_{\Omega_T} |u(x, t)|^2 dx dt \right\}^{1/2}.$$

Положим $\mathcal{V} = L_2((0, T); \overset{\circ}{W}_2^1(Q))$. Легко видеть, что $\mathcal{V} = \{v \in W_2^{1,0}(\Omega_T) : v|_{\Gamma_T} = 0\}$, а сопряженное пространство имеет вид $\mathcal{V}' = L_2((0, T); W_2^{-1}(Q))$. Введем ограниченный оператор $L_R: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ по формуле $L_R v(\cdot, t) = -A_R v(\cdot, t)$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Введем также неограниченный оператор $\Lambda_t: \mathcal{V}' \supset D(\Lambda_t) \rightarrow \mathcal{V}'$, действующий в смысле распределений со значениями в $\mathcal{V}'$ по формуле $\Lambda_t v(\cdot, t) = \partial v(\cdot, t)/\partial t$ с областью определения $D(\Lambda_t) = \{v \in \mathcal{V}' : \Lambda_t v \in \mathcal{V}'\}$.

Отметим, что если функция $u \in \mathcal{V}$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\Lambda_t u + L_R u = f, \quad (2.1)$$

где $f \in \mathcal{V}'$, то в силу теоремы 3.1 и предложения 2.1 из [4, гл. 1] $u \in C^0([0, T]; L_2(Q))$. Поэтому $u|_{t=0}$ имеет смысл.

Пусть $f \in \mathcal{V}'$, $\varphi \in L_2(Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть функцию $u \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda_t)$ *обобщенным решением задачи* (1.3)–(1.5), если она удовлетворяет операторному уравнению (2.1) и начальному условию (1.5).

ТЕОРЕМА 1. Пусть дифференциально-разностный оператор $-A_R$ — сильно эллиптический. Тогда для любых $f \in \mathcal{V}'$ и $\varphi \in L_2(Q)$ задача (1.3)–(1.5) имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda_t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, разностные операторы $R_{ijQ}: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ являются ограниченными. Следовательно, существует константа $c_0 > 0$ такая, что

$$|(A_R u, v)_{L_2(Q)}| \leq c_0 \|u\|_{W_2^1(Q)} \|v\|_{W_2^1(Q)} \quad (2.2)$$

для любых $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$. Из неравенств (1.2), (2.2) данной работы, а также из теоремы 4.1 и замечания 4.3 [4, гл. 3] вытекает существование и единственность обобщенного решения задачи (1.3)–(1.5).

Предположим теперь, что $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$. В этом случае мы дадим определение обобщенного решения задачи (1.3)–(1.5) в смысле интегрального тождества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мы будем называть функцию $u \in \mathcal{V}$ *обобщенным решением задачи* (1.3)–(1.5), если для любых $v \in \{v \in W_2^1(\Omega_T) : v|_{\Gamma_T} = 0, v|_{t=T} = 0\}$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \left(-u \bar{v}_t + \sum_{i,j=1}^n R_{ijQ} u_{x_j} \bar{v}_{x_i} \right) dx dt = \int_{\Omega_T} f \bar{v} dx dt + \int_Q \varphi \bar{v}|_{t=0} dx. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор $-A_R$ — сильно эллиптический и пусть $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$. Тогда определения 3 и 4 эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность определений 3, 4 будет следовать из теорем 4.1, 4.2, [4, гл. 3], если показать, что множество $\mathcal{V}_1 = \{v \in W_2^1(\Omega_T) : v|_{\Gamma_T} = 0, v|_{t=T} = 0\}$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{V}_2 = \{v \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda_t) : v|_{t=T} = 0\}$.

Действительно, пусть $v \in \mathcal{V}_2$. Рассмотрим последовательность вещественнозначных функций $\xi_n \in C^\infty[0, T]$ таких, что $\xi_n(t) = 1$ ($0 \leq t \leq T - 2/n$), $\xi_n(t) = 0$ ($T - 1/n \leq t \leq T$); $0 \leq \xi_n(t) \leq 1$, $|\xi_n'(t)| \leq Cn$ ($0 \leq t \leq T$). Очевидно, $\xi_n v \rightarrow v$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $\mathcal{V}_2$. Сглаживая функции $\xi_n v$ по t , получим последовательность функций $v_n(t)$ со значениями в $\dot{W}_2^1(Q)$, которые бесконечно дифференцируемы по t и имеют носители на $[0, T)$. По построению $v_n \rightarrow v$ в пространстве $\mathcal{V}_2$, при этом $v_n \in \mathcal{V}_1$.

3. Аналитические полугруппы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть X — банахово пространство. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_t : X \rightarrow X$ ($t \geq 0$) называется *сильно непрерывной полугруппой* или C_0 -полугруппой, если

- 1) $T_0 = I$;
- 2) $T_{t+s} = T_t T_s$ ($t, s \geq 0$);
- 3) $\lim_{t \searrow 0} T_t x = x$ (для любого $x \in X$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Полугруппа класса C_0 называется *сжимающей*, если $\|T_t\| \leq 1$ ($t \geq 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Линейный оператор $A : X \supset D(A) \rightarrow X$, определенный по формуле

$$Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \quad \left(x \in D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ существует} \right\} \right)$$

называется *инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы* $\{T_t\}$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R : L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \rightarrow L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $D'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_R u = A_R u$ ($u \in D(\mathcal{A}_R) = \{u \in \dot{W}_2^1(Q) : A_R u \in L_2(Q)\}$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор $-A_R$ — сильно эллиптический. Тогда оператор $\mathcal{A}_R$ является инфинитезимальным производящим оператором сжимающей полугруппы T_t в $L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (1.2) с константой $c_2 = 0$ и теоремы 10.1 из [5] следует, что оператор $\mathcal{A}_R$ — замкнутый, а спектр $\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, при этом для любых $u \in D(\mathcal{A}_R)$

$$-\operatorname{Re}(\mathcal{A}_R u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|_{W_2^1(Q)}^2. \quad (3.1)$$

Из (3.1) и неравенства Коши–Буняковского следует, что для $u \in D(\mathcal{A}_R)$ и $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - \mathcal{A}_R)u\|_{L_2(Q)} \|u\|_{L_2(Q)} \geq \lambda \|u\|_{L_2(Q)}^2.$$

Таким образом,

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}_R)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому в силу теоремы Хилле–Иосиды (см., [6, § 1.3]) оператор $\mathcal{A}_R$ является инфинитезимальным производящим оператором сжимающей полугруппы T_t в $L_2(Q)$.

Обозначим $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, где $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_z: X \rightarrow X$ ($z \in \Delta$) называется *аналитической полугруппой* в Δ , если

- 1) функция $z \rightarrow T_z$ является аналитической в Δ ;
- 2) $T_0 = I$ и $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta} T_z x = x$ (для любого $x \in X$);
- 3) $T_{z_1+z_2} = T_{z_1} T_{z_2}$ (для любых $z_1, z_2 \in \Delta$).

Полугруппа T_t называется *аналитической*, если она аналитическая в некотором секторе Δ , содержащем положительную вещественную полуось.

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор $-A_R$ — сильно эллиптический и, следовательно, оператор A_R является инфинитезимальным производящим оператором сжимающей полугруппы T_t в $L_2(Q)$. Тогда полугруппу T_t можно продолжить до аналитической полугруппы T_z в некотором секторе $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится стандартными методами, основанными на использовании оценки нормы резольвенты инфинитезимального производящего оператора полугруппы. В свою очередь, указанная оценка выводится из неравенства типа Гординга (1.2) (см. теорему 2.7 из [6, § 7.2] или теорему 1 из [7, гл. 14, § 1]).

4. Гладкость обобщенных решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Обобщенное решение задачи (1.3)–(1.5) при $f \in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi \in L_2(Q)$ мы будем называть *сильным решением*, если $u_t \in L_2(\Omega_T)$.

Для исследования вопроса о гладкости обобщенных решений задачи (1.3)–(1.5) введем некоторые дополнительные обозначения. Рассмотрим множества

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in G} \{\bar{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\},$$

а также

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Обозначим через $W_2^{2k,k}(D \times (0, T))$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(D \times (0, T))$, имеющих все обобщенные производные $D_x^\alpha D_t^\beta u \in L_2(D \times (0, T))$ ($|\alpha| + 2\beta \leq 2k$), с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2k,k}(D \times (0, T))} = \left\{ \sum_{|\alpha| + 2\beta \leq 2k} \int_{\Omega_T} |D_x^\alpha D_t^\beta u(x, t)|^2 dx dt \right\}^{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\partial Q \setminus \bigcup_i M_i \subset \mathcal{K}$ и пусть дифференциально-разностный оператор $-A_R$ — сильно эллиптический. Тогда для любых $\varphi \in D(A_R)$ и $f \in L_2(\Omega_T)$ таких, что $f_t \in L_2(\Omega_T)$, задача (1.3)–(1.5) имеет единственное сильное решение, которое определяется по формуле

$$u(x, t) = T_t \varphi(x) + \int_0^t T_{t-s} f(x, s) ds. \quad (4.1)$$

Более того, для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $s = 1, 2, \dots$; $l = 1, \dots, N(s)$ $u(x, t) \in W_2^{2,1}((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0, T))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность решения задачи (1.3)–(1.5) и формула (4.1) следуют из теоремы 3 настоящей работы и следствия 2.10 из [6, § 4.2]. Из определения сильного решения и уравнения (1.3) следует, что

$$-A_R u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \quad (4.2)$$

где $F(\cdot, t) = f(\cdot, t) - u_t(\cdot, t) \in L_2(Q)$ для почти всех $t \in (0, T)$. В силу теоремы 11.2 из [5] о гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений для любого $\varepsilon > 0$

$$u(\cdot, t) \in W_2^2(Q_{sl} \setminus K^\varepsilon)$$

и

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sl} \setminus K^\varepsilon)} \leq c \|F\|_{L_2(Q)} \quad (4.3)$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и $s = 1, 2, \dots$; $l = 1, \dots, N(s)$, где $c > 0$ не зависит от t .

Возводя обе части неравенства (4.3) в квадрат и интегрируя от 0 до T , получим

$$\|u\|_{W_2^{2,0}((Q_{sl} \setminus K^\varepsilon) \times (0, T))} \leq c_1 (\|f\|_{L_2(\Omega_T)} + \|u_t\|_{L_2(\Omega_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in W_2^{2,1}((Q_{sl} \setminus K^\varepsilon) \times (0, T))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выполнении условий теоремы 5 в силу теорем 1, 5 обобщенное решение задачи (1.3)–(1.5) является сильным решением и, следовательно, принадлежит пространству $W_2^{2,1}((Q_{sl} \setminus K^\varepsilon) \times (0, T))$.

Как показывает следующий пример, гладкость сильных решений задачи (1.3)–(1.5) может нарушаться на границе соседних цилиндров $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$, а также вблизи множества $K \times (0, T)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим первую смешанную задачу (1.3)–(1.5), предполагая, что $Q = (0, 4/3) \times (0, 4/3)$, $A_R = \Delta R_Q$, $R_Q = P_Q R I_Q$, $Ru(x) = u(x) + au(x_1 + 1, x_2 + 1) + au(x_1 - 1, x_2 - 1)$, $0 < a < 1$. Очевидно, разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей: 1) $Q_{11} = (0, 1/3) \times (0, 1/3)$, $Q_{12} = (1, 4/3) \times (1, 4/3)$ и 2) $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$. Множество K принадлежит границе ∂Q и состоит из четырех точек: $g^1 = (1/3, 0)$, $g^2 = (4/3, 1)$, $g^3 = (0, 1/3)$, $g^4 = (1, 4/3)$.

Матрицы $A_s(x)$ ($x \in \overline{Q}_{s1}$; $s = 1, 2$), определенные по формуле (1.8), имеют вид

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (x \in \overline{Q}_{11}),$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (x \in \overline{Q}_{21} \cap K), \quad A_2(x) = (1) \quad (x \in \overline{Q}_{21} \setminus K).$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ ($x \in \overline{Q}_{s1}$; $s = 1, 2$) положительно определены (ср. (1.9)). Следовательно, оператор $-A_R$ — сильно эллиптический.

Положим

$$v_1(r, \varphi) = \xi(r) r^\lambda \sin \lambda \varphi, \quad v_2(r, \varphi) = \xi(r) r^\lambda \sin \lambda \varphi \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi \right),$$

где $\xi(r) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \xi(r) \leq 1$, $\xi(r) = 1$ при $r \leq 1/8$, $\xi(r) = 0$ при $r \geq 1/6$, $\lambda = (2/\pi) \arccos(a/2)$, r, φ – полярные координаты.

Введем функцию $v(x)$ по формуле

$$v(x) = \begin{cases} \frac{v_1(x_1 - 1/3, x_2) - av_2(x_1 - 1/3, x_2)}{1 - a^2}, & x \in Q_{11}, \\ \frac{-av_1(x_1 - 4/3, x_2 - 1) + v_2(x_1 - 4/3, x_2 - 1)}{1 - a^2}, & x \in Q_{12}, \\ v_1(x_1 - 1/3, x_2) + v_2(x_1 - 4/3, x_2 - 1), & x \in Q_{21}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Очевидно,

$$R_Q v(x) = v_1\left(x_1 - \frac{1}{3}, x_2\right) + v_2\left(x_1 - \frac{4}{3}, x_2 - 1\right).$$

Поскольку $0 < \lambda < 1$, легко видеть, что $v \in \dot{W}_2^1$, $-\Delta R_Q v \in L_2(Q)$, но $v \notin W_2^2(Q_{s_1} \cap S_\delta(g^1))$ для любого $\delta > 0$. Следовательно, функция $u(x, t) = tv(x)$ является сильным решением задачи (1.3)–(1.5) для $f(x, t) = v(x) - t\Delta R_Q v(x) \in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi(x) = 0$. Однако, $u \notin W_2^{2,0}((Q_{s_1} \cap S_\delta(g^1)) \times (0, T))$ для любого $\delta > 0$. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ теорема 5, вообще говоря, не верна.

Покажем теперь, что

$$u_{x_1}|_{x_1=1/3+0, x_2 \leq 1/8} \neq u_{x_1}|_{x_1=1/3-0, x_2 \leq 1/8}.$$

В силу (4.4) для этого достаточно убедиться, что

$$v_1\varphi|_{\varphi=\pi/2, r \leq 1/8} \neq \frac{1}{1-a^2} \left\{ v_1\varphi|_{\varphi=\pi/2, r \leq 1/8} - av_2\varphi|_{\varphi=\pi/2, r \leq 1/8} \right\}. \quad (4.5)$$

Соотношение (4.5) эквивалентно следующему

$$\lambda \cos \frac{\lambda\pi}{2} \neq \frac{1}{1-a^2} \left(\lambda \cos \lambda \frac{\pi}{2} - \lambda \cos \lambda\pi \right). \quad (4.6)$$

Приводя подобные и используя равенство $\cos(\lambda\pi/2) = a/2$, мы можем переписать (4.6) в виде

$$a^3 - a^2 + 2 \neq 0. \quad (4.7)$$

Поскольку корни уравнения $a^3 - a^2 + 2 = 0$ имеют вид $a_{1,2} = 1 \pm i$, $a_3 = -1$, условие (4.7) выполняется при $0 < a < 1$. Поэтому $u \notin W_2^{2,0}(S_\sigma(y))$ для любых $y = (y_1, y_2)$ и $\sigma > 0$ таких, что $y_1 = 1/3$, $0 < y_2 < 1/8$, $\sigma < y_2$. Таким образом, гладкость сильных решений задачи (1.3)–(1.5) может нарушаться на границе соседних подобластей $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vorontsov M. A., Ricklin J. C., Carhart G. W. Optical simulation of phase-distorted imaging systems: nonlinear and adaptive optics approach // Optical Engineering. 1995. V. 34. № 11. P. 3229–3238.
- [2] Скубачевский А. Л. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 169–170.
- [3] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Anal. 1998. V. 32. № 2. P. 261–278.
- [4] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [5] Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997.
- [6] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York–Berlin–Heidelberg: Springer, 1983.
- [7] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Московский государственный авиационный институт

Поступило

20.07.98