Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Миньотт, Новое доказательство теоремы Ко Чао, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 384–395

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:03:45

УДК 511.3

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КО ЧАО

М. Миньотт

В статье приводится новое доказательство известной теоремы Ко Чао.
Библиография: 13 названий.

Уравнение $x^p - y^2 = 1$ было решено В. А. Лебегом [1] еще в 1850 г., но уравнение $x^p - y^2 = -1$ было решено Ко Чао [2] только в 1965 г. Его доказательство было элементарным, однако чрезвычайно изобретательным (см. [3]). Другое элементарное доказательство было дано Чейном [4], но оно также оказалось достаточно хитроумным (см. [5]). Наша цель – получить доказательство, которое было бы в некотором смысле наиболее естественным, даже с учетом того, что в нем используется метод Бейкера. Кроме того, наша работа по существу является независимой.

Мы приводим небольшую часть результатов, полученных Нагелем в работах [6] (1921 г.) и [7] (1934 г.), а также адаптируем результат Куммера для первого случая теоремы Ферма. В заключение, мы получаем оценку сверху для показателя p , используя линейные формы от двух логарифмов.

1. Две работы Нагеля. Сначала напомним результат, полученный Эйлером [8] в 1738 г.: уравнение $x^2 = y^3 + 1$ допускает только целые решения $(x, y) = (\pm 1, 0)$, $(0, -1)$ и $(\pm 3, 2)$.

Наша цель – доказать теорему Ко Чао [2] для случая $p \neq 3$.

ТЕОРЕМА 1 (Ко Чао, 1965). Пусть p – нечетное простое число. Тогда уравнение

$$x^p - y^2 = -1$$

имеет единственное целое решение $(x, y, p) = (2, 3, 3)$ с $xy \neq 0$.

Начнем с результатов, представленных в работе [6].

Предположим, что для некоторого нечетного простого числа существуют рациональные целые числа x и y такие, что

$$x^p - y^2 = -1, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (1)$$

Если число y четное, то $\gcd(y - 1, y + 1) = 1$ и мы получаем факторизацию $y - 1 = y_1^p$, $y + 1 = y_2^p$, где $x = y_1 y_2$. Таким образом, выполнено $y_2^p - y_1^p = 2$, что, очевидно, невозможно при $x > 0$.

Итак, число y нечетное, число x четное, $\gcd(x-1, x+1) = 2$, и найдутся $\eta = \pm 1$ и ненулевые рациональные целые числа u и v , для которых выполнено

$$y + \eta = 2^{p-1}u^p, \quad y - \eta = 2v^p, \quad \text{где } x = 2uv \text{ и } \gcd(2u, v) = 1. \quad (2)$$

Следовательно,

$$2^{p-2}u^p - v^p = \eta = \pm 1. \quad (3)$$

Чтобы доказать, что p делит y , Нагель [6] воспользовался следующей теоремой Штормера (см. [9] или [10], а также [5]).

ТЕОРЕМА 2 (Штормер, 1897). Пусть D – положительное целое число, не являющееся квадратом, и пусть (u_1, v_1) – фундаментальное решение уравнения Пелля–Ферма

$$u^2 - Dv^2 = \pm 1,$$

если оно существует. Тогда для любого другого решения (u, v) с $v > v_1$ существует простой делитель числа v , не делящий число D .

В нашем случае, если p не делит число y , то $x+1 = x_1^2$ (в силу леммы 1, доказываемой ниже, числа $x+1$ и $(x^p+1)/(x+1)$ взаимно просты) и выполняется соотношение

$$y^2 - x^p = y^2 - (x_1^2 - 1)((x_1^2 - 1)^{(p-1)/2})^2 = 1,$$

так что пара $(x_1, (x_1^2 - 1)^{(p-1)/2})$ является решением уравнения Пелля–Ферма $u^2 - (x_1^2 - 1)v^2 = 1$, удовлетворяющим условию $(u_1, v_1) = (x_1, 1)$, а это противоречит теореме Штормера. Таким образом (снова в соответствии с леммой 1), заключаем, что

$$x+1 = pw^2, \quad \frac{x^p+1}{x+1} = pz^2, \quad \text{где } y = pwz \text{ и } \gcd(2w, z) = 1.$$

Нам также понадобится другой результат Нагеля [7].

ТЕОРЕМА 3 (Нагель, 1921–1934). Если для простого числа $p > 3$ диофантово уравнение $x^p - y^2 = -1$ имеет решение (x, y) с $x, y > 0$, то x – четное число, p делит y и $p \equiv 1 \pmod{8}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже доказали свойства делимости. Остается проверить, что $p \equiv 1 \pmod{8}$. Оригинальное доказательство Нагеля [7] столь элегантно и кратко, что мы полностью его воспроизводим.

Предположим сначала, что $p = 8k + a$, где $a = 5, 7$. Тогда $x = pw^2 - 1 \equiv a - 1 \pmod{8}$. Из (1) следует, что

$$y^2 = x^p + 1 = (x^2 - 1 + 1)^{4k} x^a + 1 \equiv x^a + 1 \pmod{x^2 - 1}.$$

Поэтому символ Лежандра равен

$$\left(\frac{x^a + 1}{x - 1} \right) = \left(\frac{2}{x - 1} \right) = +1,$$

что противоречит сравнению $x - 1 \equiv 3, 5 \pmod{8}$. Следовательно, простое p должно быть сравнимо с 1, 3 $\pmod{8}$.

Теперь предположим, что $p = 8n + 3 = 24m + a$, где $a \in \{11, 19\}$ (напомним, что $p \neq 3$). Тогда $x \equiv 2 \pmod{8}$ и

$$y^2 = x^p + 1 = (x^3 - 1 + 1)^{8m} x^a + 1 \equiv x^a + 1 \pmod{x^3 - 1}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{x^a + 1}{x^3 - 1} \right) = +1.$$

Для случая $a = 11$ ввиду $x^{11} - x^2 = x^2(x^9 - 1)$ и $x + 1 \equiv 3 \pmod{8}$ получаем

$$+1 = \left(\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} \right) = \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \right) = \left(\frac{-x - 1}{x^2 + 1} \right) = \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} \right) = \left(\frac{2}{x + 1} \right) = -1;$$

противоречие. Если же $a = 19$, то

$$+1 = \left(\frac{x^{19} + 1}{x^3 - 1} \right) = \left(\frac{x + 1}{x^3 - 1} \right) = - \left(\frac{x^3 - 1}{x + 1} \right) = \left(\frac{2}{x + 1} \right) = -1,$$

и мы снова приходим к противоречию. Теорема 3 доказана.

ЛЕММА 1. Пусть p — нечетное простое число, а c — рациональное целое число такое, что $|c - 1| > 1$. Тогда

$$\gcd\left(\frac{c^p - 1}{c - 1}, c - 1\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \text{ не делит } c - 1, \\ p, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Кроме того, число $(c^p - 1)/(c - 1)$ всегда нечетное, а в случае, когда указанный наибольший общий делитель равен p , выполняется сравнение

$$\frac{c^p - 1}{c - 1} \equiv p \pmod{p^2}.$$

2. Частичное исследование уравнения $2^{p-2}u^p - v^p = \pm 1$. Снова рассмотрим диофантово уравнение, упоминавшееся в п. 1:

$$2^{p-2}u^p - v^p = \eta = \pm 1, \quad \text{где } u > 0, v > 0 \text{ и } \gcd(2u, v) = 1.$$

В силу (2) имеем $y + \eta = 2^{p-1}u^p$, $y - \eta = 2v^p$, где p делит y . Таким образом, $p \nmid uv$. Применяя еще раз лемму 1, из соотношения $v^p + \eta = 2^{p-2}u^p$ получаем

$$\frac{v^p + \eta}{v + \eta} = z^p$$

для некоторого положительного рационального целого числа z . Полагая $x = -\eta v$, мы можем заменить это уравнение на уравнение

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = z^p. \tag{4}$$

Отметим, что $p \nmid x$, так как $p \nmid v$. Однако это свойство понадобится нам позднее.

Сначала докажем элементарную лемму для уравнения (4).

ЛЕММА 2. Пусть $x \in \mathbb{Z}$ является решением диофантова уравнения

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = z^p.$$

Тогда $p \nmid z$ и выполняются следующие условия:

- (i) если $p \mid x$, то $p^2 \mid x$;
- (ii) если $p \mid (x + 1)$, то $p^2 \mid (x + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p \mid z$, то p делит $x - 1$, и по лемме 1 левая часть в (4) сравнима с p по модулю p^2 ; противоречие. Таким образом, $p \nmid z$.

Если p делит x , то из соотношения

$$z^p = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \dots + x + 1$$

следует, что $z \equiv 1 \pmod{p}$. Таким образом, $z^p \equiv 1 \pmod{p^2}$ и $p^2 \mid (x + x^2)$. Отсюда легко следует утверждение (i).

Теперь предположим, что p делит $x + 1$. Положим $x = T - 1$; тогда $p \mid T$. Имеем

$$z^p = \frac{x^p - 1}{x - 1} = (T - 1)^{p-1} + \dots + (T - 1) + 1 = 1 + aT + bT^2, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

где

$$\begin{aligned} a &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (p - 2) - (p - 1) = (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + ((p - 2) - (p - 1)) \\ &= (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -\frac{p - 1}{2}. \end{aligned}$$

Тогда $z \equiv 1 \pmod{p^2}$ и $p^2 \mid (aT + bT^2)$. Из того, что p делит T , но не делит a , следует утверждение (ii).

Теперь мы адаптируем доказательство Куммера для “регулярных” простых чисел в первом случае теоремы Ферма. Мы будем следовать изложению Вашингтона [11, гл. I].

Положим $\zeta = \zeta_p = e^{2i\pi/p}$. Будем работать в круговом поле $C = C_p = \mathbb{Q}(\zeta)$, для которого кольцом целых чисел является $\mathbb{Z}[\zeta]$. Напомним, что $(1 - \zeta)$ является простым идеалом поля C и удовлетворяет соотношению $(1 - \zeta)^{p-1} = (p)$. Отметим также соотношения между идеалами $(1 - \zeta^j) = (1 - \zeta)$ при $j = 1, 2, \dots, p - 1$ (ср. с [11, лемма 1.4]).

Представляя уравнение (4) в виде произведения

$$\prod_{j=1}^{p-1} (x - \zeta^j) = z^p,$$

рассмотрим наибольший общий делитель множителей в левой части. Докажем, что эти множители попарно взаимно просты. Предположим, что простой идеал $\mathfrak{p}$ поля C делит $(x - \zeta^j)$ и $(x - \zeta^k)$, где $j \neq k$. Исключая x , находим $\mathfrak{p} \mid (\zeta^j - \zeta^k)$, откуда $\mathfrak{p} = (1 - \zeta)$. Однако по лемме 2 выполнено $p \nmid z$ и, следовательно, $(1 - \zeta) \nmid (x - \zeta^j)$, что доказывает наше утверждение.

Следовательно, существуют идеалы $\mathfrak{a}_j$ кольца $\mathbb{Z}[\zeta]$ такие, что $(x - \zeta^j) = \mathfrak{a}_j^p$ при $1 \leq j < p$. В частности,

$$(x - \zeta) = \mathfrak{a}^p. \quad (5)$$

Далее будем предполагать, что p является регулярным простым числом, т.е. p не делит число классов поля C_p . Равенство (5) означает существование алгебраического целого числа α , для которого $x - \zeta = \text{единица} \cdot \alpha^p$. Однако теорема Куммера [11, предложение 1.5] утверждает, что для некоторого целого числа r каждая единица поля C_p имеет вид $\zeta^{-r}\varepsilon$, где $r \in \mathbb{Z}$ и ε — действительная единица поля C . Таким образом, мы можем записать

$$x - \zeta = \zeta^r \varepsilon \alpha^p, \quad r \in \mathbb{Z}, \varepsilon - \text{действительная единица}.$$

Применяя комплексное сопряжение, находим

$$x - \zeta^{-1} = \zeta^{-r} \varepsilon \bar{\alpha}^p.$$

Из этих двух соотношений следует, что

$$x - \zeta - \zeta^{2r}x + \zeta^{2r-1} = \zeta^r \varepsilon (\alpha^p - \bar{\alpha}^p).$$

Однако из разложения $\alpha = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_{p-2}\zeta^{p-2}$ с целыми $b_0, b_1, \dots, b_{p-2} \in \mathbb{Z}$ имеем $\alpha^p - \bar{\alpha}^p \equiv (b_0 + b_1\zeta^p + \dots + b_{p-2}\zeta^{p(p-2)}) - (b_0 + b_1\zeta^{-p} + \dots + b_{p-2}\zeta^{-p(p-2)}) \equiv 0 \pmod{p}$,

откуда получаем соотношение

$$x - \zeta - \zeta^{2r}x + \zeta^{2r-1} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (6)$$

Так как ζ имеет степень $p - 1$, каждое собственное подмножество множества $\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{p-1}\}$ состоит из линейно независимых над $\mathbb{Z}$ компонент. Таким образом, если все числа $1, \zeta, \zeta^{2r}, \zeta^{2r-1}$ различны, то мы приходим к противоречию: уравнение (4) не имеет решения.

Если не все числа $1, \zeta, \zeta^{2r}, \zeta^{2r-1}$ различны, то возможны следующие три случая.

(0) $\zeta^{2r} = 1$. Тогда (6) принимает вид $-\zeta + \zeta^{-1} \equiv 0 \pmod{p}$, что невозможно, так как простое число p не делит идеал $(1 - \zeta)$.

(1) $\zeta^{2r-1} = 1$. В этом случае (6) влечет $(x + 1)(1 - \zeta) \equiv 0 \pmod{p}$, откуда $x \equiv -1 \pmod{p}$. По лемме 2 имеем $p^2 \mid (x + 1)$.

(2) $\zeta^{2r-1} = \zeta$. Тогда сравнение (6) дает $x(1 - \zeta^2) \equiv 0 \pmod{p}$, откуда $x \equiv 0 \pmod{p}$. Согласно лемме 2 имеем $p^2 \mid x$.

Подытожим полученное в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 4. Пусть p — регулярное нечетное простое число. Если диофантово уравнение

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = z^p$$

имеет целое решение (x, z) , то $p \nmid z$ и $p^2 \mid x(x + 1)$.

Возвращаясь к уравнению (3), в котором используются обозначения для x и y из (1), согласно теореме 4 для регулярного простого числа p получаем следующее: либо $p \mid v$, что невозможно, так как $p \mid y$ и p не делит $x = 2uv$, либо $v \equiv \eta \pmod{p}$, откуда $y \equiv 3\eta \pmod{p}$ и $p = 3$, поскольку p делит y . Таким образом, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p > 3$ – регулярное простое число. Тогда диофантовы уравнения

$$2^{p-2}u^p - v^p = \eta = \pm 1, \quad u > 0, \quad v > 0,$$

и

$$x^p - y^2 = -1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

не имеют решений.

Из таблицы, приведенной в конце книги [11], находим множество нерегулярных простых чисел:

$$\mathcal{J} = \{37, 59, 67, 101, 103, 131, 149, 157, 233, 257, \dots\}.$$

Замечательным является то обстоятельство, что числа, которые сравнимы с 1 (mod 8), начинаются с $p = 233, 257, \dots$.

Для завершения доказательства теоремы 1 мы воспользуемся следующим результатом, который доказывается в приложении.

ТЕОРЕМА 6. Пусть p – нечетное простое число, для которого диофантово уравнение

$$2^{p-2}u^p - v^p = \eta = \pm 1, \quad u > 0, \quad v > 0,$$

имеет решение. Тогда $p < 233$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вместо критерия Нагеля, полученного в 1934 г., мы можем попытаться применить критерий, полученный им же в 1921 г. (доказательство последнего основано на использовании периодов Гаусса и квадратичных полей), для которого множество исключительных простых p имеет вид

$$\{31, 59, 73, 83, 89, 107, 113, 139, 211, 223, 233, 239, 251, 257, \dots\}.$$

Теперь его пересечение с множеством $\mathcal{J}$ имеет вид $\{59, 223, 257, \dots\}$, и проблема возникает при $p = 59$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя гипергеометрические функции, М. Беннетт смог получить оценку сверху $p < 83$ вместо нашей оценки $p < 233$; однако такая хорошая оценка нам здесь не понадобилась.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В литературе некоторые авторы также используют следующий критерий: если уравнение $2^{p-2}u^p - v^p = \eta = \pm 1$ имеет нетривиальное решение для простого числа $p > 3$, то $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ и $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Например, в работе [12] используется тот факт, что объединение этих сравнений дает неравенство $p > 100\,000$. Однако нам не хотелось бы применять этот результат ввиду недоступности и непонятности аргументов оригинальной статьи [12]. Во всяком случае подобный результат оказывается менее элементарным, чем критерий, которым воспользовались мы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Конечно, теорема Ко Чао также является тривиальным следствием подходящего обобщения теоремы Уайлса о неразрешимости уравнения Ферма. Но опять-таки подобную аргументацию нельзя отнести к элементарной.

Приложение. Оценка сверху для p . Рассмотрим диофантово уравнение из п. 1:

$$2^{p-2}u^p - v^p = \pm 1, \quad u, v > 0.$$

Нетрудно получить оценку снизу

$$v \geq 2^{p^2-2p-1}. \quad (7)$$

Рассмотрим линейную форму

$$\Lambda = p \log \frac{2u}{v} - 2 \log 2 = \log \left(1 \pm \frac{1}{v^p} \right).$$

Достаточно показать, что

$$0 < |\Lambda| < \frac{2}{v^p},$$

откуда немедленно следует, что

$$\log |\Lambda| < -p \log v + 1. \quad (8)$$

Чтобы получить хорошую оценку сверху для p , мы воспользуемся главным результатом работы [13]. Напомним его, чтобы помочь читателю проследить за нашими вычислениями.

ТЕОРЕМА А. Пусть α_1 и α_2 — два не равных нулю алгебраических числа таких, что $|\alpha_1| \geq 1$ и $|\alpha_2| \geq 1$. Пусть $\log \alpha_1$ и $\log \alpha_2$ — их логарифмы по любому основанию. Положим

$$\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1,$$

где b_1 и b_2 — положительные целые числа, и определим

$$D = \frac{[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{R}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{R}]}.$$

Пусть $K \geq 2$ — целое число, L, R_1, R_2, S_1, S_2 — положительные целые числа, и пусть $\rho > 1$ — действительное число. Предположим, что

$$R_1 S_1 \geq L, \quad R_2 S_2 > (K-1)L. \quad (9)$$

Положим $R = R_1 + R_2 - 1$, $S = S_1 + S_2 - 1$, $g = 1/4 - KL/(12RS)$, и определим

$$b = ((R-1)b_2 + (S-1)b_1) \left(\prod_{k=1}^{K-1} k! \right)^{-2/(K^2-K)}.$$

Пусть a_1 и a_2 — действительные числа такие, что

$$(\rho-1) \log \alpha_i + 2Dh(\alpha_i) \leq a_i, \quad i = 1, 2.$$

Предположим, что α_1 и α_2 мультипликативно независимы, числа $rb_2 + sb_1$, где $0 \leq r \leq R-1$ и $0 \leq s \leq S-1$, попарно различны и

$$K(L-1) \log \rho - (D+1) \log(KL) - D(K-1) \log \left(\frac{b}{2} \right) - gL(Ra_1 + Sa_2) > 0. \quad (10)$$

Тогда имеет место оценка снизу

$$|\Lambda'| \geq \rho^{-KL+0.5},$$

где

$$\Lambda' = \Lambda \cdot \max \left\{ \frac{LSe^{LS|\Lambda|/(2b_2)}}{2b_2}, \frac{LRe^{LR|\Lambda|/(2b_1)}}{2b_1} \right\}.$$

Чтобы получить наиболее точную оценку для p , предположим, что

$$p \geq 233 \quad (\text{так что } \log p = 5.451038453 \dots), \quad (11)$$

и применим теорему A, выбирая

$$a_1 = 2 \log(ev) \left(1 + \frac{2(\rho - 1)}{p^3} \right) \quad \text{и} \quad a_2 = (\rho + 1) \log 2.$$

Выбор a_2 , очевидно, возможен. Обсудим подробнее выбор a_1 . Согласно условиям теоремы A этот параметр должен удовлетворять неравенству

$$a_1 \geq (\rho - 1) \log \alpha_1 + 2h(\alpha_1).$$

Из первой оценки сверху для $|\Lambda|$ получаем $|\log \alpha_1| < (2.001/p) \log 2$ и, очевидно, выполнено $h(\alpha_1) \leq \log(ev)$, где $v > 2^{p^2-2p-1}$. Это обосновывает наш выбор a_1 .

Возьмем $22 \leq \rho \leq 24$. Имеем $a_1 > 2 \log(2^{p^2-2p})$, откуда

$$a_1 > 2(p^2 - 2p) \log 2 > 74\,614, \quad a_2 = (\rho + 1) \log p \geq 23 \log p > 15.9423.$$

Предположим, что

$$5 \leq L \leq 1.5 \log p.$$

Возьмем $K = [\mu^2 La_1 a_2] + 1$, где μ – действительное число, которое мы выберем позднее так, чтобы оно удовлетворяло неравенствам

$$0.2 \leq \mu \leq 0.4.$$

Тогда

$$K \geq [0.2^2 \cdot 5 \cdot a_1 a_2] \geq 237\,906 > 47\,000L$$

и, чтобы выполнялось условие (9), положим

$$R_1 = 1, \quad S_1 = L, \quad R_2 = [\mu La_2] + 1, \quad S_2 = [\mu La_1] + 1.$$

Если существуют два целых числа r_0 и s_0 , $|r_0| < R$ и $|s_0| < S$ таких, что $r_0 b_2 + s_0 b_1 = 0$, то p делит r_0 и, следовательно,

$$p < R \leq 1 + 1.5\mu L(\rho + 1) \log 2 < 1 + 1.5 \cdot 0.4 \cdot 25 \cdot \log p \cdot \log 2,$$

откуда следует, что $p < 40$, а это противоречит предположению о том, что $p \geq 233$. Таким образом, числа $rb_2 + sb_1$ ($0 \leq r \leq R - 1$, $0 \leq s \leq S - 1$) попарно различны.

Имеет место следующая общая оценка сверху для b (см. [13, лемма 6]):

$$b \leq \frac{((R-1)b_2 + (S-1)b_1)}{K-1} \exp \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\log(2\pi(K-1)/\sqrt{e})}{K-1} + \frac{\log K}{6K(K-1)} \right\}.$$

Сначала рассмотрим величину $(R-1)b_2 + (S-1)b_1$. Напомним, что $R = R_1 + R_2 - 1$ и $S = S_1 + S_2 - 1$. Таким образом, используя определение чисел R_1, R_2, S_1 и S_2 , получаем

$$(R-1)b_2 + (S-1)b_1 \leq b_1(\mu La_1 + L - 1) + b_2(\mu La_2) < \left(\frac{b_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_1} \right) \mu La_1 a_2 \left(1 + \frac{1}{\mu a_1} \right).$$

По определению

$$b' = (\rho + 1) \left(\frac{b_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_1} \right),$$

и предыдущая оценка может быть записана в виде

$$(R-1)b_2 + (S-1)b_1 < \frac{b'}{(\rho + 1)} \cdot \mu La_1 a_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu a_1} \right).$$

Благодаря нашим предположениям относительно L и K , отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \log b &\leq 1.5 + \log \left(\frac{\mu La_1 a_2}{(\rho + 1)(K-1)} \right) + \log b' + \frac{1}{\mu a_1} - \frac{\log(3.8K)}{K-1} \\ &\leq 1.5 - \log((\rho + 1)\mu) + \log b' + \frac{1}{\mu a_1} - \frac{\log(3.8K)}{K-1}. \end{aligned}$$

Так как

$$b' = (\rho + 1) \left(\frac{b_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_1} \right) = \frac{(\rho + 1)b_1}{a_2} \left(1 + \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} \right) \leq \frac{p}{\log 2} \left(1 + \frac{(\rho + 1)}{p^2(p-2)} \right),$$

окончательно получаем

$$\log b \leq 1.5 - \log((\rho + 1)\mu) + \log \left(\frac{p}{\log 2} \right) + \frac{(\rho + 1)}{p^2(p-2)} + \frac{1}{\mu a_1} - \frac{\log(3.8K)}{K-1}.$$

Теперь рассмотрим величину g из формулировки теоремы А. Согласно соотношениям

$$R = R_1 + R_2 - 1 \leq \mu La_2 + 1, \quad S = S_1 + S_2 - 1 \leq \mu La_1 + L$$

находим (очевидно, g – возрастающая функция от R и S)

$$\begin{aligned} gL(Ra_1 + Sa_2) &= \frac{1}{4}L(Ra_1 + Sa_2) - \frac{KL^2}{12} \left(\frac{a_1}{S} + \frac{a_2}{R} \right) \\ &\leq \frac{1}{4}L(\mu La_1 a_2 + a_1 + \mu La_1 a_2 + La_2) \\ &\quad - \frac{\mu^2 L^3 a_1 a_2 + L^2}{12} \left(\frac{a_1}{\mu La_1 + L} + \frac{a_2}{La_2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Применяя теперь соотношения (для положительных переменных)

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{(x+y)x^2} \geq \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2},$$

получаем

$$\begin{aligned} gL(Ra_1 + Sa_2) &\leq \frac{\mu L^2 a_1 a_2}{2} + \frac{La_1}{4} + \frac{L^2 a_2}{4} - \frac{\mu^2 L^2 a_1 a_2}{6} + \frac{a_2 L^2}{12} \\ &\quad + \frac{a_1 L}{12} - \frac{L}{6\mu} + \frac{L}{12\mu^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{La_2} \right). \end{aligned}$$

В силу оценок для a_1 , a_2 и μ это влечет

$$gL(Ra_1 + Sa_2) \leq \frac{\mu L^2 a_1 a_2}{3} + \frac{La_1}{3} + \frac{L^2 a_2}{3}.$$

Действительно, так как $\mu \geq 0.2$ и $a_1 > La_2 = 4(\rho + 1) \log 2 \geq 92 \log 2$, выполнено

$$\frac{L}{6\mu} > \frac{L}{12\mu^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{La_2} \right).$$

Применяя эти соображения, видим, что условие (10) выполняется, если

$$\begin{aligned} \Phi &= K(L-1)\lambda + (K-1) \log 2 - 2 \log(KL) - \frac{\mu L^2 a_1 a_2}{3} - \frac{La_1}{3} - \frac{L^2 a_2}{3} \\ &\quad - (K-1) \left(1.5 - \log((\rho+1)\mu) + \log\left(\frac{p}{\log 2}\right) + \frac{\rho+1}{p^2(p-2)} + \frac{L-1}{\mu a_1} - \frac{\log(3.8K/e)}{K-1} \right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

где положено $\lambda = \log \rho$. Тогда

$$\Phi \geq \Phi_0 + \Theta,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= K(L-1)\lambda + K \log\left(\frac{2}{\theta}\right) - (K-1) \left(1.5 - \log((\rho+1)\mu) + \log\left(\frac{p}{\log 2}\right) \right) \\ &\quad - \frac{L^{3/2}}{3} \sqrt{(K-1)a_1 a_2} \end{aligned}$$

с новым параметром $\theta > 1$, который выбирается ниже, и

$$\Theta = K \log \theta - \log(KL^2) - \frac{La_1}{3} - \frac{L^2 a_2}{3} - K \frac{\rho+1}{p^2(p-2)} - \frac{L^2 \mu}{a_2} - \frac{(L-1)K}{\mu a_1} - \log\left(\frac{e}{1.9}\right).$$

Параметр θ должен быть выбран так, чтобы $\Theta > 0$. Заметим, что в силу (7), (11) и условий на параметры имеем

$$\begin{aligned}\frac{\log(KL^2)}{K} &< \frac{\log(K^3/47\,000^2)}{K} < 0.000066, \\ \frac{La_1}{3K} &< \frac{1}{3\mu^2a_2} \leq \frac{1}{0.12(\rho+1)\log 2} \leq \frac{1}{0.12 \cdot 23 \log 2} < 0.5227156, \\ \frac{L^2a_2}{3K} &< \frac{L}{3\mu^2a_1} < 0.0009133, \quad \frac{\rho+1}{p^2(p-2)} < 0.0000012, \\ \frac{(L-1)K}{\mu a_1 K} &< \frac{L}{0.2 \cdot a_1} < 0.000548 \quad \text{и} \quad \frac{\log(e/1.9)}{K} < 0.00000151.\end{aligned}$$

Таким образом, достаточно выбрать

$$\log \theta = 0.522716.$$

Тогда, после деления Φ_0 на $\mu La_1 a_2$ видим, что условие (10) выполняется, если

$$\mu \left((L-1)\lambda + \log\left(\frac{2}{\theta}\right) - 1.5 + \log(\rho+1) - \log\left(\frac{p}{\log 2}\right) \right) + \mu \log \mu - \frac{L}{3} \geq 0.$$

В таком случае, в силу (10) и неравенства $R+S \leq K$ имеем

$$\log |\Lambda| \geq -KL \log \rho - \log(KL). \quad (12)$$

Затем, сравнивая (8) и (12), получаем

$$p \leq 2.00001\mu^2 L^2 (\rho+1) \log 2 \cdot \log \rho.$$

Так как $\lambda = \log \rho$, условие (12) эквивалентно следующему условию:

$$L \left(\mu \log \rho - \frac{1}{3} \right) \geq \mu \left(\eta - \log \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \log \left(\frac{p}{\log 2} \right) - \log \mu \right),$$

где положено $\eta = 1.5 - \log(2/\theta)$. Выберем

$$\mu = \frac{2}{3 \log \rho};$$

тогда предыдущее условие принимает вид

$$L \geq 3 \cdot \frac{2}{3 \log \rho} \cdot \left(\eta - \log \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \log \left(\frac{p}{\log 2} \right) - \log \mu \right).$$

При $\rho = 22.9$ (значит, $\mu = 0.21291520802499 \dots \in [0.2, 0.4]$) видим, что последнее неравенство выполняется, если

$$L \geq 0.63875 \cdot (\log p + 3.202),$$

так что мы можем взять

$$L = [0.63875 \cdot \log p + 3.05].$$

(Проверим условие $5 \leq L \leq 1.5 \log p$. Так как $p \geq 233$, имеем $6 \leq L \leq 1.23 \log p$. Это завершает проверку.) Тогда

$$p \leq 2.0001 \cdot \mu^2 (\rho+1) \log \rho \cdot \log 2 L^2 < 4.7032 L^2 \leq 4.7032 (0.63875 \cdot \log p + 3.05)^2,$$

откуда

$$p \leq 1.919 (\log p + 4.775)^2.$$

Это неравенство дает оценку сверху $p \leq 193$, что противоречит первоначальному предположению о том, что $p \geq 233$. Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lebesgue V. A. Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^m = y^2 + 1$ // *Nouv. Ann. Math.* 1850. V. 9. P. 178–181.
- [2] Ko Chao. On the diophantine equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$ // *Sci. Sinica.* 1965. V. 14. P. 457–460.
- [3] Mordell L. J. Diophantine equations. *Pure Appl. Math.* V. 30. London–New York: Academic Press, 1969.
- [4] Chein E. Z. A note on the equation $x^2 = y^q + 1$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1976. V. 56. P. 83–84.
- [5] Ribenboim R. Consecutive powers // *Expositiones Math.* 1984. V. 2. P. 193–221.
- [6] Nagell T. Sur l'impossibilité de l'équation indéterminée $z^p + 1 = y^2$ // *Norsk Mat. Forenings Skrifter.* 1921. V. 1. № 4. 10 pages.
- [7] Nagell T. Sur une équation à deux indéterminées // *Norsk Vid Selsk Forh.* 1934. V. 7. P. 136–139.
- [8] Euler L. Theorematum quorundam arithmeticonum demonstrationes; // *Comm. Acad. Sci. Petropolitanae.* 1738. V. 10. P. 125–146.
- [9] Størmer C. Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications // *Christiania. Videnskabens Selskabs Skifter, Math. Nat. Kl.* 1897. № 2. 48 pages.
- [10] Størmer C. Solution d'un problème curieux qu'on rencontre dans la théorie élémentaire des logarithmes // *Nyt Tidskrift für Math. (Copenhagen) Ser. B.* 1908. V. 19. P. 1–7.
- [11] Washington L. C. Introduction to Cyclotomic Fields. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [12] Inkeri K., Hyyrö S. On the congruences $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ and the diophantine equation $x^2 - 1 = y^p$ // *Ann. Univ. Turku Ser. A.* 1961. P. 27–30.
- [13] Laurent M., Mignotte M., Nesterenko Y. Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation // *J. Number Theory.* 1995. V. 55. P. 285–321.

Université Louis Pasteur, Strasbourg, France
E-mail: mignotte@math.u-strasbg.fr

Поступило
 10.10.2002