Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Рууге, Вариационный принцип для квазиклассических фермионов, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:56:22

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ

А. Э. Руге

В работе [1] В. П. Маслов предложил следующий вариационный принцип

$$\delta \int dx_1 \dots dx_N \Psi_{\Phi}^* (\hat{H} - E) \Psi_{\Phi} = 0, \quad (1)$$

где

$$\Psi_{\Phi}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(x_i, x_j), \quad \Phi(\xi, x) = -\Phi(x, \xi), \quad x_i \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

для оценки основного антисимметрического состояния гамильтониана вида

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(- \left(\frac{h^2}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + u(x_i) \right) + \left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i < j} V(x_i, x_j),$$

символ которого как h -псевдодифференциального [2] оператора является гладкой функцией, имеющей невырожденную стационарную точку $\Lambda = \{x_i = 0, p_i = 0\}$. На функцию Ψ_{Φ} накладывается при этом дополнительное условие сосредоточенности вблизи точки $\{x_i = 0\}$ при $h \rightarrow 0$. Подобная постановка задачи соответствует некоторым задачам ядерной физики.

Пробная функция Ψ_{Φ} представляет из себя произведение из $N(N-1)/2$ членов, взятое по *всем* возможным сочетаниям пар. Этим ее структура отличается от структуры волновых функций [3], возникающих в другом известном вариационном принципе – вариационном принципе Боголюбова [4], применяемом в теории сверхпроводимости. В последнем N -частичная волновая функция (при определенных условиях) имеет вид проекции на антисимметрическое подпространство произведения $N/2$ волновых функций различных пар частиц (куперовские пары).

Вариационному принципу (1), (2) соответствует точно решаемая задача [5]: $d = 1$, $u(x) = \eta^2 x^2/2$, $V(x, \xi) = \omega^2(x - \xi)^2/2$, где $\eta > 0$, $\omega > 0$ – некоторые параметры. В этом случае точная формула для основного антисимметрического состояния оператора $\hat{H}$ может быть записана в виде (2), и, следовательно, вариационный принцип (1), (2) также определяет точный ответ. Интересно отметить, что если $\eta = 0$, то соответствующая функция $\Phi(x, \xi) = \varphi(x - \xi)$ имеет “самостоятельный” смысл: $\varphi(\sqrt{N/2}(x_1 - x_2))$ является основным антисимметрическим состоянием гамильтониана $\hat{H}' = -(h^2/2)(\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2) + \omega^2(x_1 - x_2)^2/2$.

В общем случае, когда $d \geq 1$, вариационный принцип (1), (2) относится к весьма узкому классу задач, в которых $h \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ (при некоторых соотношениях между h и N , определяемых по разному в зависимости от конкретного вида гамильтониана $\hat{H}_N$). Поэтому представляет интерес сформулировать аналог этого вариационного принципа, который имел бы более широкую область применимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС–РФФИ, грант № 95-0091.

Предельные переходы по $h \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ не коммутируют, и поэтому соотношение между h и N при вычислении предела существенно. В данном сообщении формулируется обобщение (1), (2), отвечающее следующей постановке задачи: сначала рассматривается предельный переход по $h \rightarrow 0$, а лишь затем число частиц N устремляется к бесконечности. Схема рассуждений, приводящих к этому обобщению, выглядит следующим образом. Сначала рассматривается квазиклассическая ($h \rightarrow 0$) асимптотика основного антисимметрического состояния гамильтониана задачи. Ее удастся выразить в виде, аналогичном (2), с помощью конечного, не зависящего от N числа функций. Сами эти функции зависят от N , но имеют предел при $N \rightarrow \infty$, что и дает возможность сформулировать обобщение вариационного принципа (1), (2).

Введем следующие обозначения. Пусть $T(\xi)$ и $V(\xi, \zeta)$ – некоторые гладкие действительные функции, $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^{2d}$. Для всех $M, N \in \mathbb{N}$, $1 \leq M \leq N$, определим функции $H_{MN}(\xi_1; \dots; \xi_M)$, $\xi_l \equiv (\xi_{l,1}, \dots, \xi_{l,2d}) \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$H_{MN} = \sum_{i=1}^N T \left(\sum_{l=1}^M a_{il} \xi_l \right) + \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} V \left(\sum_{l=1}^M a_{il} \xi_l; \sum_{r=1}^M a_{jr} \xi_r \right), \quad (3)$$

где $a_{il} = 1/\sqrt{MN} + \theta_{iM}(\delta_{il} - 1/M)$, $\theta_{ij} \equiv \sum_{k=1}^j \delta_{ik}$. Отметим, что если $M = N$, то $a_{il} = \delta_{il}$. Обозначим через $\hat{H}_{MN} h$ псевдодифференциальный оператор, получающийся из H_{MN} квантованием по Вейлю: $\xi_{l,\alpha} \rightarrow \hat{x}_{l,\alpha}$, $\xi_{l,\alpha+d} \rightarrow -(ih/2)(\partial/\partial x_{l,\alpha} + \partial/\partial x_{l,\alpha})$ ($\alpha = 1, \dots, d$), где индексы над операторами обозначают порядок их действия.

Пусть $\{\omega_k\}_{k=1}^d$ – некоторый несоизмеримый набор положительных чисел, занумерованных в порядке возрастания, $\omega_1 < \dots < \omega_d$. Сопоставим каждому такому набору последовательность $\{p_s\}_{s=1}^\infty$ целочисленных d -мерных векторов $p_s = (p_{s,1}, \dots, p_{s,d})$, $p_{s,k} \equiv p_{s,k}(\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, однозначно определяемую из условий $p_{1,k} = 0$, $p_{s+1} \neq p_1, \dots, p_s$, $\sum_{k=1}^d \omega_k p_{s+1,k} = \min (s = 1, \dots, \infty)$. Определим множества $I_{l_d, \dots, l_k}^{N,k} = \{s \leq N : p_{s,k'} = l_{k'}, k' = \overline{k, d}\}$, $\tilde{I}_{l_d, \dots, l_k}^{N,k} = \bigcup_{l' \geq l_k} I_{l_d, \dots, l_{k+1}, l'}^{N,k}$. Для любого набора функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, определим обозначение

$$R_{\omega_1, \dots, \omega_d}^N [\varphi_1, \dots, \varphi_d](x_1, \dots, x_N) = \prod_{k=1}^d \prod_{l_d, \dots, l_{k+1}} \prod_{l_k < l'_k} \prod_{j \in I_{l_d, \dots, l_{k+1}, l'_k}^{N,k}} \prod_{i \in I_{l_d, \dots, l_k}^{N,k}} \times \varphi_k \left(\left(\frac{|I_{l_d, \dots, l_k}^{N,k}|}{N} \prod_{s=k+1}^d \frac{|\tilde{I}_{l_d, \dots, l_s}^{N,s}|}{|I_{l_d, \dots, l_s}^{N,s}|} \right)^{1/2} \left(x_j - \frac{1}{|I_{l_d, \dots, l_k}^{N,k}|} \sum_{i \in I_{l_d, \dots, l_k}^{N,k}} x_i \right) \right),$$

где $|\cdot|$ – число элементов множества.

Предположим, что в точке $\xi = 0$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(T(\xi) + \left(\frac{N-1}{N} \right) V(\xi; \xi) \right) = 0 (\alpha = 1, \dots, 2d).$$

Рассмотрим системы уравнений на собственные значения

$$\frac{1}{i} \sum_{\beta=1}^{2d} J_{\alpha\beta} \sum_{\beta'=1}^{2d} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_\beta \partial \xi_{\beta'}} + \frac{N-1}{N} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_\beta \partial \xi_{\beta'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_\beta \partial \zeta_{\beta'}} \right] \right\} f_{\beta'} = \tilde{\omega} f_\alpha, \quad (4)$$

$$\frac{1}{i} \sum_{\beta=1}^{2d} J_{\alpha\beta} \sum_{\beta'=1}^{2d} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_\beta \partial \xi_{\beta'}} + \frac{N-1}{N} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_\beta \partial \xi_{\beta'}} - \frac{1}{N} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_\beta \partial \zeta_{\beta'}} \right\} g_{\beta'} = \omega g_\alpha, \quad (5)$$

где $J_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha, \beta+d} - \delta_{\alpha+d, \beta}$, производные функций T и V вычисляются при значениях аргументов $\xi = \zeta = 0$. Предположим, что каждая из систем (4) и (5) имеет набор из d линейно независимых решений (собственных векторов), соответствующих положительным собственным значениям.

Обозначим их через $f_{\alpha}^{(N,1)}, \dots, f_{\alpha}^{(N,d)}$ и $g_{\alpha}^{(N,1)}, \dots, g_{\alpha}^{(N,d)}$ соответственно. Введем также обозначение $\omega_{\nu}^{(N)}$ для собственного значения, которое соответствует вектору $g_{\alpha}^{(N,\nu)}$. В этом случае можно показать [6], что существуют $d \times d$ матрицы $L^{(N)}$ и $M^{(N)}$ с положительно определенной мнимой частью, однозначно определяемые требованиями $f_{\alpha+d}^{(N,\nu)} = \sum_{\alpha'=1}^d L_{\alpha\alpha'}^{(N)} f_{\alpha'}^{(N,\nu)}$, $g_{\alpha+d}^{(N,\nu)} = \sum_{\alpha'=1}^d M_{\alpha\alpha'}^{(N)} g_{\alpha'}^{(N,\nu)}$, где $\alpha, \nu = 1, \dots, d$. Следовательно, определены функции $F_N(x, h) = \exp \left\{ (i/(2h)) \sum_{\alpha, \alpha'=1}^d L_{\alpha\alpha'}^{(N)} x_{\alpha} x_{\alpha'} \right\}$, $\Phi_{N,\nu}(x, h) = \exp \left\{ (i/(2h)) \sum_{\alpha, \alpha'=1}^d M_{\alpha\alpha'}^{(N)} x_{\alpha} x_{\alpha'} \right\} \times \sum_{\alpha=1}^d \tilde{g}_{\alpha+d}^{(N,\nu)} x_{\alpha}$, где $x \in \mathbb{R}^d$, $h > 0$, $\tilde{g}_{\alpha+d}^{(N,\nu)} = g_{\alpha+d}^{(N,\nu)} - \sum_{\alpha'=1}^d M_{\alpha\alpha'}^{(N)} g_{\alpha'}^{(N,\nu)}$. В приведенных выше обозначениях имеет место

ТЕОРЕМА. Для любого $M = 1, 2, \dots, N$ справедливо следующее:

- 1) Функция Гамильтона H_{MN} (3) имеет невырожденную стационарную точку $\Lambda_{MN} \in \mathbb{R}^{2dM}$ с координатами $\xi_{l,\alpha} = 0$;
- 2) в точке Λ_{MN} существует инвариантный комплексный росток r_{MN} ;
- 3) если $\omega_1^{(N)}, \dots, \omega_d^{(N)}$ составляют несоизмеримый набор величин и занумерованы в порядке возрастания, то основное антисимметрическое относительно перестановок $x_1, x_2, \dots, x_M$ состояние серии асимптотических с точностью $O(h^{3/2})$ функций оператора $\hat{H}_{MN}$, соответствующей $[\Lambda_{MN}, r_{MN}]$, представимо в виде

$$\Psi_{MN}(x_1, \dots, x_M; h) = c_{MN}(h) F_N \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M x_i, h \right) \times \mathcal{A} \{ R_{\omega_1^{(N)}, \dots, \omega_d^{(N)}}^M [\Phi_{N,1}(\cdot, h), \dots, \Phi_{N,d}(\cdot, h)](x_1, \dots, x_M) \}, \quad (6)$$

где $\mathcal{A}$ – проектор на подпространство антисимметрических функций, $c_{MN}(h)$ – нормировочный множитель.

Уравнения (4), (5) имеют предел при $N \rightarrow \infty$. Подчеркнем, что наличие этого предела связано с тем, что при потенциале V в формуле (3) стоит малый параметр $1/N$. Следовательно, функции F_N и $\Phi_{N,\nu}$ также имеют пределы при $N \rightarrow \infty$. Функция, получающаяся при подстановке этих пределов в (6) вместо F_N и $\Phi_{N,\nu}$, отличается от Ψ_{MN} на бесконечно малую при $N \rightarrow \infty$ величину. В результате возникает следующее обобщение вариационного принципа (1), (2): $\delta \int dx_1 \dots dx_N \times \Psi_N^* (\hat{H}_{NN} - E) \Psi_N = 0$, где

$$\Psi_N = F \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N x_i, h \right) \mathcal{A} \{ R_{\omega_1, \dots, \omega_d}^N [\Phi_1(\cdot, h), \dots, \Phi_d(\cdot, h)](x_1, \dots, x_N) \},$$

экстремум функционала ищется по всем гладким функциям F и Φ_{ν} таким, что функция Ψ_N сосредоточена при $h \rightarrow 0$ вблизи точки $x_1 = \dots = x_N = 0$, и по всем несоизмеримым наборам $\{\omega_{\nu}\}$, $0 < \omega_1 < \dots < \omega_d$, т.е. по всем возможным множествам $\{l_d^{N,k}, \dots, l_k^{N,k}\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 4. С. 633–634.
2. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматлит, 1963.
4. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. М.: Изд. АН СССР, 1958.
5. Koval' G. V. // Russ. J. Math. Phys. 1998. V. 5. № 4. P. 527–528.
6. Маслов В. П. Комплексный ВКБ метод в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.