Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Бен Амара, А. А. Шкаликов, Задача Штурма–Лиувилля с физическим и спектральным параметрами в граничном условии, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 163–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:55:16

УДК 517.9

ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ФИЗИЧЕСКИМ И СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРАМИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Ж. Бен Амара, А. А. Шкаликов

В работе изучается спектральная задача

$$\begin{aligned} l(u) &= -u'' + q(x)u(x) = \lambda u(x), \\ u'(0) &= 0, \quad u'(\pi) = t\lambda u(\pi), \end{aligned}$$

где λ – спектральный, а t – физический параметры. При $t < 0$ задаче ставится в соответствие самосопряженный оператор в пространстве Понтрягина Π_1 . Используя этот факт и развивая аналитические методы теории операторов Штурма–Лиувилля, в работе находится динамика собственных значений и собственных функций задачи при $t \rightarrow -0$.

Библиография: 21 название.

1. Введение. В заметке изучается спектральная задача вида

$$l(u) = -u'' + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad (1)$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\pi) = t\lambda u(\pi). \quad (2)$$

Здесь $q(x)$ – вещественная суммируемая функция, λ – спектральный, а t – физический параметры. Мы специально ограничиваемся частным случаем, чтобы не усложнять существа дела. Задачи такого типа встречаются в механике. Пуассон в мемуаре [1] решает задачу о движении тела, подвешенного к концу нерастяжимой нити. Крылов [2] и Тимошенко [3] рассматривают задачу о продольных колебаниях стержня как одну из наиболее интересных точно решаемых моделей. Они рассматривают задачу (1), (2) при $q(x) \equiv 0$, изучая поведение собственных значений (СЗ) при малых и больших нагрузках, определяемых параметром t . Дополнительную информацию о конкретных физических задачах, приводящих к изучению (1), (2), можно найти в книге Тихонова и Самарского [4], работах Уолтера [5] и Фултона [6]. Недавно интерес к спектральным задачам (1), (2) возник в связи с теорией осреднения (см. [7]). Общую информацию и дополнительные ссылки о задачах для дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях можно почерпнуть в работах Диксмы [8], Шкаликова [9], Руссаковского [10], Байдинга, Брауна и Седдиги [11].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-01000 и № 96-15-96091.

Знак параметра m играет существенную роль. В случае $m > 0$ задачу (1), (2) можно интерпретировать как спектральную задачу для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве, а затем проследить динамику собственных значений и собственных функций при изменении параметра m , пользуясь, например, методом Вишика–Люстерника [12].

При $m < 0$ задача реализуется как спектральная задача для самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина (см., например, [13]). Цель настоящей работы – проследить динамику спектральных характеристик при изменении $m \in \mathbb{R}^-$. Мы ограничимся изучением случая $m \rightarrow -0$.

2. Операторный пучок, отвечающий задаче. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2 \times \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_0^\pi |u(x)|^2 dx + |m| \cdot |a|^2, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ a \end{pmatrix} \in \mathcal{H},$$

определим оператор

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u'' + q(x)u(x) \\ u'(\pi)/m \end{pmatrix}$$

на области

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}, u(x) \in W_1^2[0, \pi], l(u) \in L_2[0, 1], u'(0) = 0 \right\},$$

где $W_p^k[0, 1]$ – соболевское пространство функций, имеющих обобщенную k -ю производную из L_p . Очевидно, оператор $\mathbf{L}$ определен в $\mathcal{H}$ корректно. Задача (1), (2) принимает вид

$$\mathbf{L}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathbf{L}),$$

т.е. СЗ λ_k задачи (1), (2) и оператора $\mathbf{L}$ совпадают, а между собственными и присоединенными функциями имеется соответствие

$$\mathbf{u}_k(x) \leftrightarrow \begin{pmatrix} u_k(x) \\ u_k(\pi) \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \text{sign } m \end{pmatrix}$, где I – тождественный оператор в L_2 . Тогда оператор $\mathbf{T} = \mathbf{G}\mathbf{L}$ самосопряжен в $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрированием по частям получаем равенство

$$(\mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_0^\pi |u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2 dx = (\mathbf{u}, \mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{u}), \quad (3)$$

где $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$. Поэтому оператор $\mathbf{G}\mathbf{L}$ симметричен. Уравнение

$$(\mathbf{G}\mathbf{L} - \lambda)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -u'' + q(x)u(x) - \lambda u(x) &= f(x), \\ u'(0) &= 0, \quad u'(\pi) - |m|\lambda u(\pi) = a. \end{aligned}$$

Эта задача, очевидно, разрешима для всех λ , не являющихся СЗ соответствующей однородной задачи. Но однородная задача (1), (2) регулярна в смысле [9] при всех $m \in \mathbb{R}$ (и даже при комплексных $m \neq \pm i$), в частности, она имеет дискретный спектр. Следовательно, оператор $\mathbf{GL}$ симметричен и имеет дискретный спектр. Поэтому он самосопряжен.

Таким образом, задача (1), (2) эквивалентна следующей:

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{G})\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathbf{T}) = \mathcal{D}(\mathbf{L}), \quad (4)$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$, а $\mathbf{G}$ при $m < 0$ имеет вид $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Собственное значение μ задачи (4) имеет *положительный (отрицательный) тип*, если $(\mathbf{G}\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$ (соответственно $(\mathbf{G}\mathbf{y}, \mathbf{y}) < 0$) для всех $\mathbf{y} \in \text{Ker}(\mathbf{T} - \mu \mathbf{G})$. Из общих результатов теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой следует, что в рассматриваемом случае *спектр задачи (4) (или оператора $\mathbf{L}$) может иметь не более одной пары сопряженных друг к другу невещественных СЗ, а среди вещественных может быть не более одного отрицательного типа*.

3. Дефинитный случай. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q(u) = \int_0^\pi |u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2 dx, \quad u(x) \in W_2^1[0, \pi].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если квадратичная форма $Q(u)$ положительна, т.е. $Q(u) > 0$ при $0 \neq u \in W_2^1$, то все СЗ задачи (4) вещественны, причем имеется ровно одно отрицательное СЗ λ_0 отрицательного типа, а положительные СЗ $\{\lambda_k\}_1^\infty$ имеют положительный тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3) имеем $\mathbf{T} = \mathbf{GL} > 0$. Для собственных пар $\{\lambda_k, \mathbf{y}_k\}$ задачи (4) имеем

$$0 < (\mathbf{T}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k) = \lambda_k (\mathbf{G}\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k), \quad (5)$$

откуда следует, что $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Так как оператор $\mathbf{G}$ порождает метрику Понтрягина с одним отрицательным квадратом, то оператор $\mathbf{L}$ имеет одно СЗ отрицательного или нейтрального типа (см., например, [14, гл. 3]). В силу (5) СЗ должно быть отрицательным и иметь отрицательный тип.

Обозначим через $\mathcal{H}_{\mathbf{T}}$ гильбертово пространство, состоящее из элементов

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbf{T}^{1/2}),$$

с нормой $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{T}}^2 = Q(u)$. Так как при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|\sqrt{|q|}u\|_{L_2} \leq \varepsilon \|u'\|_{L_2} + M(\varepsilon) \|u\|_{L_2},$$

а W_2^1 компактно вложено в L_2 , то положительность формы $Q(u)$ эквивалентна ее равномерной положительности в W_2^1 . Поэтому $\mathcal{H}_{\mathbf{T}}$ изоморфно пространству $W_2^1[0, \pi]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В случае $Q(u) > 0$ оператор $\mathbf{L}$ самосопряжен в $\mathcal{H}_T$, причем спектр $\mathbf{L}$ в $\mathcal{H}_T$ дискретен и совпадает со спектром в пространстве $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $Q(u) > 0$ следует, что $\lambda = 0$ не есть СЗ задачи (1), (2). Поэтому оператор $\mathbf{L}$ обратим. Имеем

$$(\mathbf{L}^{-1}u, u)_T = (\mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1}u, u)_{\mathcal{H}} = (\mathbf{G}u, u)_{\mathcal{H}} \leq \text{const} \cdot \|u\|_T^2.$$

Поэтому $\mathbf{L}^{-1}$ симметричен и ограничен в $\mathcal{H}_T$. Кроме того, $\mathcal{H}_T$ компактно вложено в $\mathcal{H}$; поэтому $\mathbf{L}^{-1}$ компактен в $\mathcal{H}_T$. Так как спектры оператора $\mathbf{L}$ в обоих пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_T$ дискретны, они совпадают (см. [15]).

Обозначим через A_0 обратный к оператору, порожденному дифференциальным выражением $l(u)$ и краевыми условиями $u'(0) = u'(\pi) = 0$. Существование этого оператора (и его положительность) вытекает из условия $Q(u) > 0$. Определим в пространстве $W_2^1[0, \pi]$ оператор A_1 следующим образом. Функции $u(x) \in W_2^1$ поставим в соответствие функцию $w(x) = A_1 u(x)$, являющуюся решением уравнения $l(w) = 0$, с условиями $w'(0) = 0$, $w'(\pi) = u(\pi)$. Существование и однозначность такой функции вытекает из обратимости оператора $\mathbf{L}$. Обозначим через Γ_π оператор следа $\Gamma_\pi u(x) = u(\pi)$.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{A}_0 + m\mathbf{A}_1, \quad \text{где } \mathbf{A}_j u = \begin{pmatrix} A_j u(x) \\ \Gamma_\pi A_j u(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Здесь предполагается, что $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1$ действуют в пространстве $\mathcal{H}_T$ на элементах

$$u = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(\pi) \end{pmatrix}, \quad u(x) \in W_2^1.$$

В силу равенства

$$(\mathbf{A}_0 u, u)_T = (\mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{A}_0 u, u)_{\mathcal{H}} = (u, u)_{L_2}$$

оператор $\mathbf{A}_0$ симметричен и ограничен в $\mathcal{H}_T$. Следовательно, тем же свойством обладает $\mathbf{A}_1$.

Следующая теорема частично сформулирована в [16], хотя ее доказательство было другим.

ТЕОРЕМА 1. Пусть квадратичная форма $Q(u)$ положительна. Обозначим через $\{\lambda_k\}_0^\infty$ СЗ задачи (1), (2), занумерованные в порядке возрастания. Тогда отрицательное СЗ имеет асимптотику

$$\lambda_0 = -\frac{1}{m^2} + O(1) \quad \text{при } m \rightarrow -0, \quad (7)$$

и ему соответствует собственная функция

$$y_0(x) = \left(\text{ch} \frac{x}{|m|} \right) (1 + O(m)). \quad (8)$$

Для положительных СЗ λ_k и соответствующих им собственных функций $y_k(x)$ справедливы соотношения

$$\lambda_k = \mu_k - \mu_k \alpha_k m + O(m^2), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$y_k(x) = y_k^0(x) + O(m), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где μ_k – СЗ задачи (1), (2) при $m = 0$, а

$$\alpha_k = \frac{|y_k(\pi)|^2}{(y_k, y_k)_{\mathbf{T}}}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $y(x, \lambda)$ решение уравнения (1), подчиненное условиям $y'(0, \lambda) = 0$, $y(0, \lambda) = 1$. Известно [17, гл. 1], что эта функция удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x - \tau) q(\tau) y(\tau, \lambda) d\tau. \quad (12)$$

Из этого соотношения следует, что

$$y(x, \lambda) = [1] \cos \sqrt{\lambda} x, \quad y'_x(x, \lambda) = -[1] \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x,$$

где $[1] = 1 + O(\lambda^{-1/2})$. Собственные значения задачи (1), (2) определяются из соотношения

$$0 = y'_x(\pi, \lambda) - m \lambda y(\pi, \lambda) = -\sqrt{\lambda} [1] \sin \sqrt{\lambda} \pi - m \lambda [1] \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0.$$

Положим $\rho = \sqrt{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Последнее уравнение перепишем в виде

$$\operatorname{th} \rho \pi = -m \rho [1] = -m \rho + O(m).$$

Поэтому $\rho_0 = -1/m + O(m)$, что при $m < 0$ влечет (7). Из равенства $y(x, \rho) = [1] \operatorname{ch} x \rho$ при $\rho = \sqrt{-\lambda} \rightarrow +\infty$ получаем соотношение (8).

В равенстве (6) $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1$ – самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_{\mathbf{T}}$. Поэтому возможно применение теоремы Релиха–Надя [18] к оператору $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{A}_0 + m \mathbf{A}_1$. Из этой теоремы получаем соотношения (10) (или аналогичные соотношения для функций $y_k(x)$), а также

$$\lambda_k^{-1} = \mu_k^{-1} + \alpha_k m + O(m^2). \quad (13)$$

Найдем выражения для α_k . Из равенства

$$(\mathbf{A}_0 + m \mathbf{A}_1)(y^0(x) + m y^1(x) + \dots) = (\mu_k^{-1} + \alpha_k m + \dots)(y_k^0(x) + m y_k^1(x) + \dots)$$

находим $\mathbf{A}_0 y_k^1 = \alpha_k y_k^0 + \mu_k^{-1} y_k^{-1} = \mathbf{A}_1 y_k^0$. Умножая это равенство скалярно на y_k^0 , получаем

$$\alpha_k (y_k^0, y_k^0)_{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}_1 y_k^0, y_k^0)_{\mathbf{T}} = Q(w, y_k^0),$$

где $Q(w, y)$ – билинейная форма, соответствующая $Q(u)$.

Из определения оператора $\mathbf{A}_1$ следует, что функция w удовлетворяет условиям $l(w) = 0$, $w'(0) = 0$, $w'(\pi) = y_k^0(\pi)$. Поэтому после интегрирования формы $Q(w, y_k^0)$ по частям получаем $Q(w, y_k^0) = |y_k^0(\pi)|^2$. Следовательно, α_k определяются соотношением (11).

Обращая соотношение (13), приходим к (9), (11). Теорема доказана.

4. Общий случай. В случае, когда квадратичная форма $Q(u)$ не является положительной, предложенный выше метод не применим. В общем случае рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \frac{y'_x(\pi, \lambda)}{y(\pi, \lambda)},$$

где $y(x, \lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$. Необходимую информацию о поведении СЗ при $m \rightarrow -0$ мы получим, изучив свойства этой функции.

Спектральные задачи

$$l(u) = \lambda u, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0,$$

$$l(u) = \lambda u, \quad u'(0) = u(\pi) = 0,$$

назовем задачами А и Б соответственно. Очевидно, нулями мероморфной функции $F(\lambda)$ являются СЗ $\{\mu_k\}_1^\infty$ задачи А, а полюсами – СЗ $\{\rho_k\}_1^\infty$ задачи Б. Из свойств решений (1) вытекает [17, гл. 1], что

$$\mu_1 < \rho_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \rho_k < \mu_{k+1} < \dots.$$

Предложение 4. *Функция $F(\lambda)$ является выпуклой на интервале $(-\infty, \rho_1)$.*

Доказательство. Согласно теореме Миттаг-Лёфлера [19, гл. 6] мероморфная функция конечного порядка $F(\lambda)$ допускает представление

$$F(\lambda) = G(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho_k} \right)^s \frac{c_k}{\lambda - \rho_k}, \quad (14)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция,

$$c_k = \operatorname{res}_{\lambda=\rho_k} F(\lambda) = \frac{y'_x(\pi, \rho_k)}{y'_\lambda(\pi, \rho_k)}, \quad (15)$$

а число s выбирается так, чтобы ряд (14) сходиллся.

Покажем, что найдется константа $M > 0$ такая, что

$$0 < c_k < Mk^2; \quad (16)$$

поэтому в (14) можно положить $s = 1$. Известно [17, гл. 1], что собственная функция $y_k(x) = y(x, \rho_k)$ задачи Б имеет $k - 1$ нулей на сегменте $[0, \pi)$. Так как $y(0, \rho_k) = 1$, $y(\pi, \rho_k) = 0$, то

$$(-1)^k y'_x(\pi, \rho_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (17)$$

Здесь мы учли, что согласно теореме единственности $y'_x(\pi, \rho_k) \neq 0$.

Из (12) следует, что $y(\pi, \lambda) = [1] \operatorname{ch} \pi \sqrt{|\lambda|} > 0$ при $\lambda \rightarrow -\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Наименьший нуль функции $y(\pi, \lambda)$ совпадает с ρ_1 . Поэтому $y'_\lambda(\pi, \rho_1) < 0$. Но нули $y(\pi, \lambda)$ простые и совпадают с ρ_k . Следовательно,

$$(-1)^k y'_\lambda(\pi, \rho_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Учитывая соотношения (15), (17), получаем $c_k > 0$.

Из (12) следует асимптотика

$$F(\lambda) = -\sqrt{\lambda} \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\cos \pi \sqrt{\lambda}} [1], \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Эта асимптотика справедлива вне областей $\Omega_k(\varepsilon) = \{\lambda \mid |\sqrt{\lambda} - \rho_k| < \varepsilon\}$, причем $\{\rho_k\}_1^\infty$ – нули функции $y(\pi, \lambda)$ – имеют асимптотику $\rho_k = (k + 1/2)^2 + O(1)$ (это также вытекает из (12)). Очевидно, при $\varepsilon < 1/2$ области $\Omega_k(\varepsilon)$ асимптотически не пересекаются и содержат только один полюс ρ_k функции $F(\lambda)$. Вне областей $\Omega_k(\varepsilon)$ имеем оценку

$$|F(\lambda)| \leq M \sqrt{|\lambda|}, \quad M = \text{const}. \quad (18)$$

Следовательно,

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega_k} F(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi i} \int_{|\rho - \rho_k| = \varepsilon} \rho F(\rho) d\rho \leq M k^2.$$

Тем самым, оценка (16) доказана.

Покажем, что $G(\lambda) \equiv 0$. Пусть Γ_n – последовательность расширяющихся окружностей, не пересекающих области $\Omega_k(\varepsilon)$. Тогда

$$F(\lambda) - \sum_{\rho_k \in \text{int } \Gamma_n} \frac{\lambda c_k}{\rho_k (\lambda - \rho_k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\lambda F(\zeta)}{\zeta(\zeta - \lambda)} d\zeta.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ и замечая, что правая часть в силу оценки (18) стремится к 0, получаем $G(\lambda) \equiv 0$.

Дифференцируя (14), получаем

$$F'(\lambda) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda - \rho_k)^2}, \quad F''(\lambda) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda - \rho_k)^3}.$$

Поэтому $F'(\lambda) < 0$, а при $\lambda \in (-\infty, \rho_1)$ также $F''(\lambda) < 0$. Предложение доказано.

Заметим, что форма $Q(u)$ положительна в том и только том случае, когда $\mu_1 > 0$. Поэтому далее предполагаем $\mu_1 \leq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть первое СЗ μ_1 задачи Б неположительно. Тогда существует число $-m_0 \in (-\infty, 0)$ такое, что для всех $m \in (-m_0, 0)$ задача (1), (2) имеет только вещественные СЗ, причем наименьшее СЗ λ_0 имеет отрицательный тип и при $m \rightarrow -0$ уходит на $-\infty$, подчиняясь асимптотике (7). Этому СЗ соответствует собственная функция вида (8). Остальные СЗ $\{\lambda_k\}_1^\infty$ имеют положительный тип, при $m \rightarrow -0$ имеют асимптотику (9), а отвечающие им собственные функции подчинены соотношениям (10). При $m = m_0$ наименьшее СЗ задачи (1), (2) имеет геометрическую кратность 1 и алгебраическую кратность 2. Если $\mu_1 < 0$, то при $m \in (m_0, m_0 + \delta)$, где δ достаточно мало, задача имеет одну пару комплексных СЗ, а остальные СЗ вещественны и положительного типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, СЗ задачи (1), (2) совпадают с корнями уравнения

$$F(\lambda) = m\lambda. \quad (19)$$

Учитывая выпуклость функции $F(\lambda)$ на интервале $(-\infty, \rho_1)$ и ее положительность на интервале $(-\infty, \mu_1)$, $\mu_1 < \min(0, \rho_1)$, найдем число $-m_0 < 0$ такое, что при $m \in (-m_0, 0)$ уравнение (19) имеет на интервале $(-\infty, \mu_1)$ ровно два корня, а при $m = m_0$ — один кратный корень. Для наименьшего СЗ λ_0 и соответствующей ему собственной функции y_0 будут справедливы асимптотики (7), (8) при $m \rightarrow -0$ (рассуждения, проведенные в доказательстве предложения 4, сохраняются).

В силу (8) имеем

$$(\mathbf{G}y_0, y_0)_{\mathcal{H}} = (y_0, y_0)_{L_2} - |m| \cdot |y_0(\pi)|^2 = -\frac{1}{2}|m| \exp \frac{2\pi}{|m|} (1 + O(m)) < 0,$$

если m достаточно близко к -0 . Заметим, что число $(\mathbf{G}y_0, y_0)$ непрерывно зависит от m , причем не может обращаться в 0 при $m \in (-m_0, 0)$. Иначе соответствующее СЗ λ_0 будет кратным, а это не так. Следовательно, при всех $m \in (-m_0, 0)$ СЗ λ_0 имеет отрицательный тип. Но тогда все остальные СЗ вещественны и имеют положительный тип. При $m = -m_0$ уравнение (19) имеет кратный корень λ_0 . Геометрическая кратность СЗ λ_0 равна 1, так как все собственные функции порождаются функцией $y(x, \lambda)$. Покажем, что при $m = -m_0$ пара функций $y_0 = y(x, \lambda_0)$ и $y_1 = y'_\lambda(x, \lambda_0)$ образует цепочку собственной и присоединенной функций. Действительно, дифференцируя уравнение (1) по λ и полагая $\lambda = \lambda_0$, получим

$$-y_1'' - q(x)y_1 = \lambda_0 y_1 + y_0. \quad (20)$$

Из (19) следуют равенства

$$F(\lambda_0) - m_0 \lambda_0 = 0, \quad F'(\lambda_0) - m = 0,$$

из которых легко получаем

$$-y_1'(\pi, \lambda_0) = \lambda_0 m_0 y_1(\pi, \lambda_0) + y(\pi, \lambda_0). \quad (21)$$

Согласно определению [9], [20, гл. 1] равенства (20), (21) показывают, что y_0, y_1 – цепочка собственной и присоединенной функций задачи (1), (2).

Далее, функция $\lambda^{-1}F(\lambda)$ выпукла в окрестности точки $0 \neq \lambda_0 \in \mathbb{R}^-$ и имеет разложение

$$\lambda^{-1}F(\lambda) = -m_0 + a_2(\lambda - \lambda_0)^2 + a_3(\lambda - \lambda_0)^3 + \dots, \quad a_2 > 0.$$

Следовательно, для пары λ, m , удовлетворяющей уравнению $F(\lambda) - m\lambda = 0$, справедливо равенство

$$m + m_0 = a_2(\lambda - \lambda_0)^2(1 + O(\lambda - \lambda_0)). \quad (22)$$

Известно [21], что в окрестности точки λ_0 уравнение (22) допускает выделение алгебраических ветвей

$$\lambda = \lambda_0 + \sqrt{\frac{m + m_0}{a_2}} + O(m + m_0),$$

которые раскладываются в ряды Пьюизо.

Из последнего равенства вытекает, что в левой полуокрестности точки $-m_0$ существует два невещественных корня уравнения (19). Тогда из общих результатов теории самосопряженных операторов в пространстве Понтрягина следует, что остальные СЗ вещественны и имеют положительный тип.

В соотношениях (9) легко убедиться, решая уравнение (19) графически (мы не уточняем здесь значения $\alpha_k > 0$). Подставляя выражения (9) в $y(x, \lambda_k)$, получаем соотношения (10). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Poisson M. Sur la manière d'exprimer les fonctions par des series de quantités periodiques, et sur l'usage de cette transformation dans la resolution de differents problèmes. 18^{eme} cahier. V. XI. Paris: l'Ecole Polytechnique de Paris, 1820.
- [2] Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. М.: АН СССР, 1932.
- [3] Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементарных конструкций. М.: Наука, 1975.
- [4] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [5] Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Z. 1973. V. 133. P. 301–312.
- [6] Fulton C. T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1977. V. 77. P. 293–308.
- [7] Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А., Соболева Т. С. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. матем. ж. 1988. Т. 29. № 5. С. 70–81.
- [8] Dijknsma A. Eigenfunctions expansions for a class of Y -self-adjointed ordinary differential operator with boundary conditions containing the eigenvalue parameter // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1980. V. 86. P. 1–27.
- [9] Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 140–166.
- [10] Руссаковский Е. М. Задача Штурма–Лиувилля с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1993. Т. 18.
- [11] Binding P. A., Browne P. J., Seddighi K. Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1993. V. 37. P. 57–72.

- [12] Вишик М. И., Люстерник А. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
- [13] Lancaster P., Shkalikov A. A., Ye Q. Strongly definizable linear pencil in Hilbert space // Integral Equations Operator Theory. 1993. V. 17. P. 338–360.
- [14] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [15] Shkalikov A. A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics. Instability index formula // Oper. Theory Adv. Appl. V. 87. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 258–285.
- [16] Бен Амара Ж. Об асимптотиках собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля с малым и спектральным параметрами, входящими в граничные условия // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 609–611.
- [17] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
- [18] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [19] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
- [20] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [21] Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.: Гостехиздат, 1948.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.04.98