Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Веснин, А. Д. Медных, Сферические группы Коксетера и гиперэллиптические 3-многообразия, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 173–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 10:16:49

УДК 515.162+514.13

СФЕРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ КОКСЕТЕРА И ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ 3-МНОГООБРАЗИЯ

А. Ю. Веснин, А. Д. Медных

Изучаются группы отражений коксетеровских полиэдров в трехмерных геометриях Терстова. Для широкого класса групп Коксетера устанавливается существование подгрупп конечного индекса, униформизирующих трехмерные гиперэллиптические многообразия.

Библиография: 7 названий.

Пусть X^3 – одна из трехмерных геометрий: $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ или $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ [1]. В работе рассматриваются *трехмерные многообразия* M^3 , возникающие как факторпространства $M^3 = X^3/\Gamma$, где Γ – дискретная группа изометрий, действующая на X^3 без неподвижных точек. Трехмерное многообразие M^3 называется *гиперэллиптическим*, если существует изометрическая инволюция τ такая, что факторпространство $M^3/\langle \tau \rangle$ гомеоморфно трехмерной сфере $\mathcal{S}^3$. Существование гиперэллиптических многообразий для каждой из трехмерных геометрий было установлено в [2]. При этом ключевую роль при построении гиперэллиптических многообразий играют прямоугольные полиэдры, обладающие гамильтоновыми циклами. В данной работе рассматривается более широкий класс коксетеровских полиэдров и устанавливается их связь с гиперэллиптическими многообразиями.

Пусть P – коксетеровский полиэдр (т.е. полиэдр с двугранными углами вида π/n , где целое $n \geq 2$) в одной из перечисленных выше трехмерных геометрий. Его *скелетом* P^1 будем называть взвешенный граф, вершины и ребра которого совпадают соответственно с вершинами и ребрами полиэдра P . При этом вес ребра $e \in P^1$ равен n , если двугранный угол при соответствующем ребре полиэдра P равен π/n .

Напомним [3], что граф H называется *остовным подграфом* графа G , если множества их вершин совпадают, а множество ребер графа H является подмножеством множества ребер графа G .

Два взвешенных графа G и H с целыми положительными весами будем называть *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же взвешенного графа подразбиением его ребер веса 2.

Напомним некоторые факты из теории коксетеровских групп [4]. Пусть $p \subset \mathbb{S}^3$ – коксетеровский полиэдр, а $\delta(p)$ – группа, порожденная отражениями в его гранях. Отметим, что все группы $\delta(p)$ конечны и полностью классифицированы. Схемы групп Кок-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00699.

	$\delta(p)$	p^1
1		$\emptyset$
2
3
4
5
6
7
8
9
10

ТАБЛИЦА 1

сете́ра $\delta(p)$ и скелетов p^1 , соответствующих трехмерным сферическим коксетеровским полиэдрам p , приведены в табл. 1.

Для упрощения обозначений при изображении взвешенного графа p^1 мы опускаем метку 2 на его ребрах. Указанные в табл. 1 целые параметры удовлетворяют условиям $m, n \geq 3$ и $k = 3, 4, 5$.

Для заданного сферического коксетеровского полиэдра p со скелетом $p^1 \neq \emptyset$ мы будем рассматривать коксетеровские полиэдры P в пространствах X^3 , скелеты P^1 которых содержат остовные подграфы, гомеоморфные скелету p^1 . В каждом случае класс таких многогранников достаточно широк. В частности, в случае 2 табл. 1 полиэдру p соответствуют прямоугольные гамильтоновы полиэдры P .

Следующая теорема устанавливает существование подгруппы конечного индекса в группе, порожденной отражениями в гранях полиэдра P , которая униформизирует гиперэллиптическое многообразие.

ТЕОРЕМА. Пусть p – коксетеровский полиэдр в $\mathbb{S}^3$ и P – коксетеровский полиэдр в X^3 , где $X^3 = \mathbb{H}^3, \mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ или $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$, а $\delta(p)$ и $\Delta(P)$ – соответствующие им группы отражений. Предположим, что скелет P^1 полиэдра P содержит собственный остовный подграф T , гомеоморфный скелету p^1 полиэдра p , и все ребра $P^1 \setminus T$ имеют вес 2. Тогда в группе $\Delta(P)$ существует подгруппа G индекса $|\Delta(P) : G| = 2|\delta(p)|$ без кручения такая, что $M^3 = X^3/G$ – гиперэллиптическое многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что в дальнейшем мы будем использовать терминологию и основные факты теории трехмерных орбифолдов [5, гл. 13].

Пусть θ_1 и θ_2 – два орбифолда с универсальным накрывающим пространством θ и орбифолдными фундаментальными группами Γ_1 и Γ_2 соответственно. При этом имеют место канонические накрытия $\pi_1: \theta \rightarrow \theta_1 = \theta/\Gamma_1$ и $\pi_2: \theta \rightarrow \theta_2 = \theta/\Gamma_2$. Пусть $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ и $\pi: \theta_1 \rightarrow \theta_2$ – орбифолдное накрытие, индуцированное групповым включением. Порядком ветвления накрытия π в точке $x \in \theta_1$ будем называть величину $|(\Gamma_2)_{\tilde{x}} : (\Gamma_1)_{\tilde{x}}|$, где $\tilde{x} = \pi_1^{-1}(x)$, а $(\Gamma_i)_{\tilde{x}}$ – стабилизатор группы Γ_i в точке $\tilde{x}$. В частности,

если накрытие π неразветвлено в точке $x \in \mathcal{O}_1$, то $|(\Gamma_2)_{\bar{x}} : (\Gamma_1)_{\bar{x}}| = 1$ и $(\Gamma_1)_{\bar{x}} = (\Gamma_2)_{\bar{x}}$.

Пусть X, Y – метрические пространства. Для накрытия $\pi : X \rightarrow Y$ определим группу $\text{Cov}_\pi(X, Y) = \{h \in \text{Homeo}(X) : \pi \circ h = \pi\}$. Накрытие π будем называть *регулярным G -накрытием, разветвленным над взвешенным графом $T \subset Y$* , если выполнены следующие условия:

- а) $\text{Cov}_\pi(X, Y) \cong G$;
- б) отображение $\bar{\pi} : X \setminus \pi^{-1}(T) \rightarrow Y \setminus T$, индуцированное отображением π , является неразветвленным накрытием;
- в) факторпространство $X/\text{Cov}_\pi(X, Y)$ является орбифолдом с носителем Y и сингулярным множеством T .

Два накрытия $\pi : X \rightarrow Y$ и $\pi' : X' \rightarrow Y$ будем называть *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : X \rightarrow X'$ такой, что $\pi = \pi' \circ h$.

Пусть $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ – орбифолды с носителями X и Y соответственно, а T – взвешенный граф в Y . Орбифолдное накрытие $\pi : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ будем называть *регулярным G -накрытием, разветвленным над T* , если индуцированное им накрытие носителей $\pi_X : X \rightarrow Y$ удовлетворяет условиям а)–в).

Итак, обозначим через $\delta^+(p)$ и $\Delta^+(P)$ подгруппы индекса 2 в группах $\delta(p)$ и $\Delta(P)$, состоящие из всех сохраняющих ориентацию изометрий. Тогда $\Omega^3 = X^3/\Delta^+(P)$ – орбифолд, носителем которого является трехмерная сфера $\mathcal{S}^3$, а сингулярным множеством – взвешенный граф P^1 . Аналогично, $\omega^3 = \mathbb{S}^3/\delta^+(p)$ – орбифолд, носителем которого является $\mathcal{S}^3$, а сингулярным множеством – взвешенный граф p^1 .

ЛЕММА 1. Пусть p – сферический коксетеровский полиэдр, а $p^1 \subset \mathcal{S}^3$ – его скелет. Тогда с точностью до эквивалентности существует единственное регулярное $\delta^+(p)$ -накрытие $\pi : \Sigma^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$, разветвленное над p^1 . При этом Σ^3 гомеоморфно $\mathcal{S}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что универсальное накрытие

$$\pi_p : \mathcal{S}^3 \rightarrow \omega^3 = \mathbb{S}^3/\delta^+(p)$$

удовлетворяет условиям леммы. Предположим, что существует отличное от него регулярное $\delta^+(p)$ -накрытие $\pi : \Sigma^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$, разветвленное над p^1 . Покажем, что накрытия π_p и π эквивалентны. В самом деле, эти накрытия индуцируют неразветвленные $\delta^+(p)$ -накрытия $\bar{\pi}_p$ и $\bar{\pi}$ такие, что $\bar{\pi}_p : \mathcal{S}^3 \setminus \pi_p^{-1}(p^1) \rightarrow \mathcal{S}^3 \setminus p^1$ и $\bar{\pi} : \Sigma^3 \setminus \pi^{-1}(p^1) \rightarrow \mathcal{S}^3 \setminus p^1$.

Отметим, что эти накрытия определяются подходящими эпиморфизмами ϕ_p и ϕ фундаментальной группы $\Gamma = \pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus p^1)$ на группу $\delta^+(p)$. При этом $\pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus \pi_p^{-1}(p^1)) = \text{Ker } \phi_p$ и $\pi_1(\Sigma^3 \setminus \pi^{-1}(p^1)) = \text{Ker } \phi$. Поскольку накрытия π_p и π разветвлены над p^1 , эпиморфизмы ϕ_p и ϕ обладают следующим свойством: если γ_e – однократная петля вокруг ребра e графа p^1 с весом n_e , то порядки элементов $\phi_p(\gamma_e)$ и $\phi(\gamma_e)$ в группе $\delta^+(p)$ равны n_e .

Для множества $A = \{\gamma_e^{n_e} \mid e \in p^1\}$ обозначим через $\text{Ncl}(A)$ его нормальное замыкание в группе Γ и рассмотрим канонический гомоморфизм

$$\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma/\text{Ncl}(A).$$

В силу отмеченных выше свойств эпиморфизмов ϕ_p и ϕ существуют эпиморфизмы $\theta_p : \Gamma/\text{Ncl}(A) \rightarrow \delta^+(p)$ и $\theta : \Gamma/\text{Ncl}(A) \rightarrow \delta^+(p)$ такие, что $\phi_p = \theta_p \circ \varphi$ и $\phi = \theta \circ \varphi$.

В силу [6] группа $\Gamma / \text{Ncl}(A)$ является группой орбифолда с носителем $\mathcal{S}^3$, сингулярным множеством которого является взвешенный граф p^1 , т.е. орбифолда ω^3 . Таким образом, $\Gamma / \text{Ncl}(A) \cong \delta^+(p)$, а θ_p и θ являются эпиморфизмами группы $\delta^+(p)$ на себя. Поскольку группа сферических изометрий $\delta^+(p)$ конечна, θ_p и θ являются изоморфизмами. Таким образом, эпиморфизмы ϕ_p и ϕ отличаются на некоторый автоморфизм α группы $\delta^+(p)$, т.е. $\phi_p = \alpha \circ \phi$. Значит, ядра $\text{Ker } \phi_p$ и $\text{Ker } \phi$ совпадают, и накрытия $\bar{\pi}_p$ и $\bar{\pi}$ эквивалентны.

По теореме Фокса [7] каждое из накрытий $\bar{\pi}_p$ и $\bar{\pi}$ допускает единственное, с точностью до эквивалентности, пополнение до регулярного $\delta^+(p)$ -накрытия, разветвленного над p^1 . Следовательно, накрытия π_p и π эквивалентны, что завершает доказательство леммы.

Следуя [2], ориентируемый орбифолд $\mathcal{O}$ будем называть *гиперэллиптической сферой*, если его носителем является трехмерная сфера $\mathcal{S}^3$, а сингулярным множеством – зацепление (в частности, узел) в $\mathcal{S}^3$, индекс сингулярности каждой компоненты которого равен 2.

Рассмотрим собственный остовный подграф T графа P^1 , гомеоморфный графу p^1 .

ЛЕММА 2. Пусть $\pi: \Sigma^3 \rightarrow \Omega^3$ – регулярное орбифолдное $\delta^+(p)$ -накрытие, разветвленное над T . Тогда Σ^3 – гиперэллиптическая сфера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Gamma_0 = \Delta^+(P)$. Тогда $\Omega^3 = X^3/\Gamma_0$. Представим Σ^3 в виде $\Sigma^3 = X^3/\Gamma$, где $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ и $\Gamma_0/\Gamma \cong \delta^+(p)$. Для канонических накрытий $\sigma: X^3 \rightarrow \Sigma^3 = X^3/\Gamma$ и $\omega: X^3 \rightarrow \Omega^3 = X^3/\Gamma_0$ рассмотрим произвольную точку $z \in \Sigma^3$ и ее прообраз $\tilde{z} \in \sigma^{-1}(z)$. Положим $z' = \omega(\tilde{z})$.

Для достаточно малого шара $V_{\tilde{z}} = B(\tilde{z}, \varepsilon)$ орбифолдное накрытие $\pi: \Sigma^3 \rightarrow \Omega^3$ локально имеет вид $\pi: V_{\tilde{z}}/\Gamma_{\tilde{z}} \rightarrow V_{\tilde{z}}/(\Gamma_0)_{\tilde{z}}$, где $\Gamma_{\tilde{z}}$ и $(\Gamma_0)_{\tilde{z}}$ – стабилизаторы точки $\tilde{z}$ в группах Γ и Γ_0 соответственно. В частности, порядок ветвления накрытия π в точке z равен $|(\Gamma_0)_{\tilde{z}} : \Gamma_{\tilde{z}}|$.

Для точки $z' \in \Omega^3$ имеет место одна из следующих пяти возможностей:

- а) $z' \notin P^1$;
- б) z' – внутренняя точка ребра $e \in P^1 \setminus T$;
- в) z' – внутренняя точка ребра графа T ;
- г) z' – двухвалентная вершина графа T ;
- д) z' – тривалентная вершина графа T .

Изучим строение стабилизаторов $(\Gamma_0)_{\tilde{z}}$ и $\Gamma_{\tilde{z}}$ в каждом из этих случаев. В случае а) имеем $\Gamma_{\tilde{z}} = (\Gamma_0)_{\tilde{z}} = \langle 1 \rangle$. В случае б) поскольку все ребра $P^1 \setminus T$ имеют вес 2, двугранный угол при ребре e равен $\pi/2$. Накрытие $\pi: \Sigma^3 \rightarrow \Omega^3$ неразветвлено над e , поэтому $\Gamma_{\tilde{z}} = (\Gamma_0)_{\tilde{z}} \cong \mathbb{Z}_2$. В случае в) рассмотрим ребро e графа T , для которого точка z' является внутренней. Пусть двугранный угол при ребре e равен π/n , $n \geq 2$. Тогда $(\Gamma_0)_{\tilde{z}} \cong \mathbb{Z}_n$. Поскольку π является $\delta^+(p)$ -накрытием, разветвленным над T , имеем $|(\Gamma_0)_{\tilde{z}} : \Gamma_{\tilde{z}}| = n$. Следовательно, $\Gamma_{\tilde{z}} \cong \langle 1 \rangle$. В случае г) точка z' является вершиной графа T , и ровно два из трех инцидентных ей ребер принадлежат T . Поскольку T является остовным подграфом скелета P^1 , гомеоморфным p^1 , для всех трех ребер, инцидентных z' , индекс сингулярности равен 2. Следовательно, $(\Gamma_0)_{\tilde{z}} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Поскольку накрытие π разветвлено над точкой $z' \in T$, то $|(\Gamma_0)_{\tilde{z}} : \Gamma_{\tilde{z}}| = 2$; следовательно, $\Gamma_{\tilde{z}} \cong \mathbb{Z}_2$. В случае д) накрытие π в точке z имеет порядок ветвления $|(\Gamma_0)_{\tilde{z}} : \Gamma_{\tilde{z}}|$, равный порядку группы $(\Gamma_0)_{\tilde{z}}$, откуда $\Gamma_{\tilde{z}} = \langle 1 \rangle$.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях либо $\Gamma_z = \langle 1 \rangle$ и z не является сингулярной точкой, либо $\Gamma_z \cong \mathbb{Z}_2$ и z является сингулярной точкой с индексом сингулярности 2. Это означает, что локально сингулярное множество орбифолда Σ^3 гомеоморфно открытому интервалу с индексом 2. По лемме 1 носитель орбифолда Σ^3 гомеоморфен $\mathcal{S}^3$. Таким образом, орбифолд Σ^3 является гиперэллиптической сферой. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим регулярное $\delta^+(p)$ -накрытие

$$\pi: \Sigma^3 = X^3/\Gamma \rightarrow \Omega^3 = X^3/\Delta^+(P),$$

разветвленное над T . В силу леммы 2 орбифолд Σ^3 является гиперэллиптической сферой, униформизируемой группой $\Gamma \triangleleft \Delta^+(P)$. Как показано в [2], если Σ^3 – гиперэллиптическая сфера, то существует гиперэллиптическое многообразие M^3 с инволюцией τ такое, что $M^3/\langle \tau \rangle = \Sigma^3$. Накрытие $M^3 \rightarrow \Sigma^3$ индуцирует групповое включение $G \triangleleft \Gamma$, где $G = \pi_1(M^3)$ – подгруппа индекса 2 в группе Γ , не содержащая элементов конечного порядка. Как нетрудно видеть, индекс подгруппы G в группе $\Delta(P)$ равен $|\Delta(P) : G| = 2|\delta(p)|$. Теорема доказана.

Отметим, что частный случай теоремы для гамильтоновых прямоугольных полиэдров (случай 2 табл. 1) был установлен ранее в [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Scott P. The geometries of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 15. P. 401–487.
- [2] Mednykh A.D. Three-dimensional hyperelliptic manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1990. V. 8. P. 13–19.
- [3] Harary F. Graph Theory. London: Addison-Wesley Publ., 1969.
- [4] Coxeter H.M.S. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. V. 35. P. 588–621.
- [5] Thurston W. The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Lecture Notes. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980.
- [6] Haefliger A., Quach N.D. Une présentation de groupe fondamental d'une orbifold // Asterisque. 1984. V. 116. P. 98–107.
- [7] Fox R.H. Covering spaces with singularities // Algebraic Geometry and Topology / ed. R.H. Fox, D.C. Spencer, A.W. Tucker. Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. P. 243–257.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: vesnin@math.nsc.ru, mednykh@math.nsc.ru

Поступило
02.02.99