Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Волков, Об одном свойстве решений уравнения Пуассона на многоугольниках, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 178–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:57:55

УДК 517.956.2

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА МНОГОУГОЛЬНИКАХ

Е. А. Волков

Доказано, что равносторонний треугольник есть единственный многоугольник, на котором решение уравнения $\Delta u = 1$ при однородных краевых условиях является алгебраическим многочленом, причем степень этого многочлена равна 3.

Библиография: 2 названия.

Пусть D – произвольный открытый многоугольник в плоскости xu , Γ – его граница. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 1 \quad \text{на } D, \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (1)$$

где $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Эта краевая задача, имеющая единственное классическое решение, часто возникает в приложениях (см. [1]).

ТЕОРЕМА. *Равносторонний треугольник есть единственный многоугольник в плоскости xu , на котором решение краевой задачи (1) является алгебраическим многочленом, причем степень этого многочлена равна 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что D – равносторонний треугольник со сторонами, расположенными на прямых $y = \pm\sqrt{3}x$ и $y = h$. Тогда, очевидно, алгебраический многочлен третьей степени

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(3x^2 - y^2) - \frac{1}{4h}(3x^2y - y^3) \quad (2)$$

является решением краевой задачи (1).

Установим теперь, что решение краевой задачи (1) на любом другом многоугольнике, в частности на квадрате, правильном шестиугольнике и т.д., не является алгебраическим многочленом. Остановимся на трех частных случаях.

1. Многоугольник D имеет угол $\pi/2$ или $3\pi/2$. Если допустить, что решение u является алгебраическим многочленом, т.е. в частности, обладает непрерывными вторыми производными вплоть до вершины рассматриваемого угла, то сразу приходим к противоречию. Действительно, сумма вторых производных, взятых вдоль сторон угла, в вершине равна 0, но $\Delta u = 1$ в сколь угодно близких точках к вершине. Таким образом,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00045.

непрерывность хотя бы одной второй производной в вершине нарушена и, следовательно, решение задачи (1) не является алгебраическим многочленом.

2. У многоугольника D имеется угол $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leq 2$, причем либо α иррационально, либо $\alpha = 2$. Предположим, что вершина угла находится в точке $x = 0, y = 0$, одна из его сторон лежит на положительной полуоси x , причем направление внутренней нормали к этой стороне совпадает с направлением положительной полуоси y . Введем полярную систему координат ρ, θ с полюсом в вершине и углом θ , отсчитываемым против часовой стрелки от положительной полуоси x . Очевидно, существует число $\rho_0 > 0$ такое, что сектор

$$T = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho < \rho_0, 0 < \theta < \alpha\pi\} \quad (3)$$

целиком расположен в D , причем ρ_0 не превышает длин сторон многоугольника, образующих рассматриваемый угол.

Представим решение u задачи (1) в следующем виде:

$$u = v + w, \quad (4)$$

где

$$w = \frac{1}{2}y(y - x \operatorname{tg} \alpha\pi) \quad (5)$$

— алгебраический многочлен от x и y , удовлетворяющий уравнению $\Delta w = 1$, а функция v является решением задачи Дирихле

$$\Delta v = 0 \quad \text{на } D, \quad v = -w \quad \text{на } \Gamma. \quad (6)$$

Функция w и, следовательно, гармоническая на D функция v обращается в 0 на сторонах сектора (3). Поэтому функция v разлагается на этом секторе в ряд (см. [2, (2.21)])

$$v(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\nu/\alpha} \sin \frac{\nu\theta}{\alpha}, \quad (7)$$

где

$$b_{\nu} = \frac{2}{\alpha\pi} \int_0^{\alpha\pi} v(\rho_0, \theta) \sin \frac{\nu\theta}{\alpha} d\theta, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Поскольку $w \not\equiv 0$ на Γ и, следовательно, $v \not\equiv 0$ на D , то в разложении (7) имеется хотя бы один коэффициент $b_{\nu} \neq 0$; причем при $\alpha = 2$ заведомо $b_1 \neq 0$, так как в этом случае $v < 0$ на всем многоугольнике D . Поэтому согласно теореме 2.1 [2] у функции (7) существует только конечное число производных по ρ в вершине сектора, т.е. эта функция и в соответствии с (4), (5) решение u задачи (1) не являются алгебраическими многочленами.

3. Многоугольник D имеет угол $\alpha\pi$, расположенный так же, как и в предыдущем случае, причем $0 < \alpha < 2$, $\alpha = p/q$ — несократимая дробь, $p \geq 2, q \geq 3$. В этом случае имеем

$$v(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\nu q/p} \sin \frac{\nu q \theta}{p} \quad \text{на } T.$$

Если существует коэффициент $b_{\nu} \neq 0$ для некоторого $\nu \not\equiv 0 \pmod{p}$, то так же, как в предыдущем случае, устанавливается, что решение u задачи (1) не является алгебраическим многочленом.

Допустим, что $b_\nu = 0$ для всех $\nu \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда

$$v(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{kq} \sin kq\theta \quad \text{на } T. \quad (8)$$

В предположении, что v является гармоническим многочленом, в (8), очевидно, может быть отлично от 0 только конечное число коэффициентов b_{kp} . При этом представление (8) для v имеет место не только на секторе (3), но и на всем замкнутом многоугольнике $\overline{D}$.

Положим

$$\theta^* = \begin{cases} \frac{\pi}{q}, & p \neq q+1, \\ \frac{2\pi}{q}, & p = q+1. \end{cases}$$

Поскольку $p \geq 2$, $q \geq 3$, то $0 < \theta^* < p\pi/q = \alpha\pi$, т.е. луч $\theta = \theta^*$ расположен внутри рассматриваемого угла многоугольника D , причем

$$w(\rho, \theta^*) \neq 0, \quad 0 < \rho < \infty,$$

где w — функция (5). В то же время,

$$v(\rho, \theta^*) = 0, \quad 0 \leq \rho < \infty,$$

где v — (по предположению) многочлен (8). Следовательно, граничное условие в (6) в некоторых окрестностях точек пересечения луча $\theta = \theta^*$ с Γ не выполнено. Из полученного противоречия вытекает, что v и, следовательно, решение u задачи (1) не являются алгебраическими многочленами.

Завершим доказательство теоремы. В пунктах 1–3 в совокупности доказано, что если у многоугольника D имеется хотя бы один угол $\alpha\pi \notin \{\pi/q : q \geq 3\}$, то решение u краевой задачи (1) не является алгебраическим многочленом. Поэтому, для того чтобы решение задачи (1) на многоугольнике D было алгебраическим многочленом, необходимо наличие у этого многоугольника углов только вида π/q , где $q \geq 3$ — некоторое целое. Таким многоугольником является только равносторонний треугольник, на котором найденное решение задачи Дирихле (1) имеет вид (2), отвечающий утверждению теоремы.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994.
- [2] Волков Е. А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках // Тр. МИАН. 1965. Т. 77. С. 113–142.