Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Дегтев, Почти полурекурсивные множества, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 188–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:34:23

УДК 510.5

ПОЧТИ ПОЛУРЕКУРСИВНЫЕ МНОЖЕСТВА

А. Н. Дёгтев

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ и $a \notin A$. Назовем A почти полурекурсивным множеством, если есть двухместная общерекурсивная функция f такая, что для всех $x, y \in \mathbb{N}$ $f(x, y) \in \{x, y, a\} \wedge (\{x, y\} \subseteq A \iff f(x, y) \in A)$. Доказано, в частности, что если A и $\mathbb{N} \setminus A$ – почти полурекурсивные множества, то A – полурекурсивное множество; что существует wsr^* -множество, не являющееся ни wsr -, ни почти полурекурсивным, и другие факты.

Библиография: 5 названий.

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $A \subseteq \mathbb{N}$ и $\bar{a} \notin A$. Назовем A почти полурекурсивным множеством, если найдется двухместная общерекурсивная функция f такая, что для всех $x, y \in \mathbb{N}$

$$f(x, y) \in \{x, y, \bar{a}\} \wedge (x \in A \wedge y \in A \iff f(x, y) \in A). \quad (1)$$

Если в (1) заменим $\{x, y, \bar{a}\}$ на $\{x, y\}$, то придем к одному из возможных определений полурекурсивного множества [1], играющего заметную роль в теории рекурсии. Цель данной заметки – выяснить некоторые свойства таких множеств и сравнить их класс с другими классами множеств, близких к полурекурсивным.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *слабо полурекурсивным* (wsr -) [2], если найдется двухместная частично-рекурсивная функция f такая, что для всех $x, y \in \mathbb{N}$

$$((x \in A \wedge y \notin A) \vee (x \notin A \wedge y \in A)) \implies (f(x, y) \downarrow \wedge f(x, y) \in \{x, y\} \cap A), \quad (2)$$

– *полурекурсивно-перечислимым* (sre -), если

$$(x \in A \vee y \in A) \implies (f(x, y) \downarrow \wedge f(x, y) \in \{x, y\} \cap A),$$

и wsr^* -множеством [3], если

- а) $f(x, y) \downarrow \implies f(x, y) \in \{x, y\}$;
- б) $x \in A \wedge y \in A \implies f(x, y) \downarrow$;
- в) $f(x, y) \downarrow \wedge f(x, y) \in A \implies x \in A \wedge y \in A$.

Заметим, что ранее [4] wsr^* -множества были тоже названы слабо полурекурсивными.

Ясно, что каждое полурекурсивное множество является sre -множеством, а последнее – wsr -множествами. Легко показать также [2], что множество A полурекурсивно, если и только если $\bar{A} = \mathbb{N} \setminus A$ и A есть sre -множества, а каждое рекурсивно-перечислимое множество является sre -множеством. Отсюда следует, что если

A – рекурсивно-перечислимое неполурекурсивное множество, то $\overline{A}$ является wsr -, но не wsr^* -множеством [2]. С другой стороны, в [3] приведен пример wsr^* -, но не wsr -множества и показано, что A является sge -множеством тогда и только тогда, когда A – одновременно wsr - и wsr^* -множество. Что касается почти полурекурсивных множеств, то они являются wsr^* -множествами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Каждая нерекурсивная tt -степень содержит почти полурекурсивное множество, не являющееся слабо полурекурсивным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упорядочим множество Ω всех конечных последовательностей из 0 и 1 лексикографически:

$$0 < 1 < 00 < 01 < 10 < 11 < 000 < 010 < 011 < 100 < \dots,$$

а затем занумеруем их числами $0, 1, 2, \dots$ в порядке возрастания. Таким образом, определено эффективное взаимно однозначное соответствие между элементами из Ω их номерами.

Пусть

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in B, \\ 0, & \text{если } n \notin B, \end{cases} \quad B \subseteq \mathbb{N},$$

и $A = \{\theta_0, \theta_0\theta_1, \theta_0\theta_1\theta_2, \dots\}$. Ясно, что $A =_{\text{tt}} B$. Будем писать $\alpha \triangleleft \beta$, если α – начало последовательности β . Пусть

$$g(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \beta \triangleleft \alpha, \\ \beta, & \text{если } \alpha \triangleleft \beta, \\ \gamma & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где γ – фиксированный элемент из $\Omega \setminus A$. Легко понять, что A посредством общерекурсивной функции g оказывается почти полурекурсивным множеством. Предположим, что A – нерекурсивное множество и для A нашлась частично-рекурсивная функция f , удовлетворяющая (2). Но тогда если $\alpha \in A$, то

$$f(\alpha 0, \alpha 1) \downarrow \wedge (\alpha 1 \in A \iff f(\alpha 0, \alpha 1) = \alpha 1).$$

Это противоречит нерекурсивности множества A .

ТЕОРЕМА 1. *Существует wsr^* -множество, не являющееся ни wsr -, ни почти полурекурсивным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – гиперпростое множество с ретрассируемым дополнением. Для B найдется представляющая общерекурсивная функция h такая, что [5]

$$x \in B \iff (\exists y)(y > x \wedge h(y) \leq h(x)). \quad (3)$$

Проверим, что A является wsr^* -множеством, где $A = \{2x : x \in B\} \cup \{2x+1 : x \in \overline{B}\}$.

Пусть x, y – два четных числа, $x = 2x_1, y = 2y_1, x_1 < y_1$. Если найдется число $z, x_1 < z \leq y_1$, такое, что $h(z) \leq h(x_1)$, то $x_1 \in B$. Тогда положим $f(x, y) = y$. Иначе следует положить $f(x, y) = x$, так как из (3) вытекает, что если $x \in B$, то, тем более, $y \in B$. Считаем также, что $f(x, y) = f(y, x)$ при $y_1 \leq x_1$.

Если в случае $x = 2x_1 + 1$, $y = 2y_1 + 1$ найдется число z , $x_1 < z \leq y_1$, такое, что $h(z) \leq h(x_1)$, то положим $f(x, y) = x$, а иначе $f(x, y) = y$, считая, по-прежнему, $f(x, y) = f(y, x)$.

Наконец, пусть $x = 2x_1$, $y = 2y_1 + 1$. Перечисляем B и если x_1 вычислится в B , то положим $f(x, y) = f(y, x) = y$. Иначе считаем $f(x, y) \uparrow$. Легко проверить, что A посредством частично-рекурсивной функции f оказывается wsg^* -множеством.

Нетрудно показать, что A не является wsg -множеством [2]. Действительно, если A и f удовлетворяют условию (2), то $f(2x, 2x + 1) \downarrow$ для всех x , причем $x \in B \iff f(2x, 2x + 1) = 2x$, что противоречит нерекурсивности B . Предположим теперь, что для A нашлась общерекурсивная функция f такая, что выполнено условие (1) и

$$R = \{ \langle x_1, y_1 \rangle : y_1 < x \wedge (\forall z)(y_1 < z \leq x_1 \implies h(y_1) < h(z)) \}, \quad x = 2x_1, \quad y = 2y_1 + 1.$$

Пусть $\langle x_1, y_1 \rangle \in R$ и $f(x, y) = x$. Тогда

$$(x_1 \in B \implies x \in A \implies y \in A \implies y_1 \notin B) \wedge (x_1 \notin B \implies y_1 \notin B).$$

Итак, в обоих случаях $y_1 \notin B$. Но $\mathbb{N} \setminus B$ – иммунное множество, а множество

$$\{ y_1 : (\exists x_1)(\langle x_1, y_1 \rangle \in R \wedge f(x, y) = x) \}$$

является его рекурсивно-перечислимым подмножеством и, следовательно, конечно. Поэтому без потери общности можно считать, что $\langle x_1, y_1 \rangle \in R \implies f(x, y) \neq x$.

Пусть теперь $\langle x_1, y_1 \rangle \in R$, $y_1 \notin B$, т.е. $y \in A$. Если $x_1 \notin B$, то $x \notin A$, поэтому $f(x, y) \neq y$. Но $f(x, y) \neq x$. Значит, $f(x, y) = \bar{a}$. Если же $x_1 \in B$, то $x \in A$, поэтому $f(x, y) = y$. Это позволяет восстанавливать прямой пересчет $\{b_i\}_{i \geq 0}$ дополнения B . Действительно,

$$b_{i+1} = \min \{ x : \langle x, b_i \rangle \in R \wedge f(2x, 2b_i + 1) = \bar{a} \}.$$

Пришли к противоречию с нерекурсивностью B .

Заметим, что дополнение множества A , построенного в теореме 1, также является wsg^* -множеством, потому что оно рекурсивно изоморфно A . Отметим еще один результат из [2]: существует wsg -множество такое, что ни оно само, ни его дополнение не являются sge -множествами. В связи с этим представляет интерес

ТЕОРЕМА 2. *Если A и $\bar{A}$ – почти полурекурсивные множества, то A – полурекурсивное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A и $\bar{A}$ – почти полурекурсивные множества посредством общерекурсивных функций f_1 и f_0 соответственно, $a \in A$, $\bar{a} \in \bar{A}$. Будем писать (s, t) , если $f_1(x, y) = s$, $f_0(x, y) = t$, и определять двухместную общерекурсивную функцию f , говоря, что ее значение $f(x, y) \in \{x, y\}$ определено правильно, если выполнено условие (1). Легко проверить истинность следующих восьми импликаций, позволяющих

правильно определить значение:

$$\begin{aligned}
 (\bar{a}, x) &\implies x \in A, & f(x, y) &= y; \\
 (\bar{a}, y) &\implies y \in A, & f(x, y) &= x; \\
 (x, a) &\implies y \in A, & f(x, y) &= x; \\
 (y, a) &\implies x \in A, & f(x, y) &= y; \\
 (x, x) &\implies (x \in A \iff y \in A), & f(x, y) &= x; \\
 (y, y) &\implies (x \in A \iff y \in A), & f(x, y) &= x; \\
 (x, y) &\implies (x \in A \implies y \in A), & f(x, y) &= x; \\
 (y, x) &\implies (y \in A \implies x \in A), & f(x, y) &= y.
 \end{aligned}$$

Однако, в случае $(\bar{a}, a)$ имеем $x \in A \iff y \in \bar{A}$ и сразу правильно определить значение $f(x, y)$ затруднительно. Но очевидно, что множество R таких пар является рекурсивным. Пусть $(u, v) \in R$, а (s, t) означает, что $f_1(x, u) = s$ и $f_0(x, v) = t$. Как и выше, получаем

$$\begin{aligned}
 (x, v) &\implies v \notin A, & f(u, v) &= v; \\
 (u, x) &\implies u \notin A, & f(u, v) &= u; \\
 (u, v) &\implies x \in A, & f(x, y) &= y; \\
 (x, x) \vee (\bar{a}, \bar{a}) &\implies x \notin A, & f(x, y) &= x.
 \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$(\bar{a}, v) \implies (x \in A \iff v \in A), \quad (u, \bar{a}) \implies (x \in A \iff u \in A).$$

В этом случае отождествляем пару (x, y) с (v, u) и (u, v) соответственно. Наконец, имеем

$$(x, \bar{a}) \implies (x \in A \implies u \in A), \quad (\bar{a}, x) \implies (x \in A \implies v \in A).$$

Рассмотрим аналогичные импликации с заменой x на y . Опять, либо правильно будут определены значения $f(x, y)$ или $f(u, v)$, либо (x, y) будет отождествлена с (v, u) или (u, v) , либо

$$(y, \bar{a}) \implies (y \in A \implies u \in A), \quad (\bar{a}, y) \implies (y \in A \implies v \in A).$$

Анализируя последние четыре импликации, получаем

$$\begin{aligned}
 (x, \bar{a}) \wedge (y, \bar{a}) &\implies u \in A, & f(u, v) &= v; \\
 (\bar{a}, x) \wedge (\bar{a}, y) &\implies v \in A, & f(u, v) &= u; \\
 (x, \bar{a}) \wedge (\bar{a}, y) &\implies (x \in A \iff u \in A); \\
 (\bar{a}, x) \wedge (y, \bar{a}) &\implies (x \in A \iff v \in A).
 \end{aligned}$$

В последних двух случаях отождествляем пару (x, y) с (u, v) и (v, u) соответственно.

Итак, фиксируя (x, y) и перебирая $(u, v) \in R$, можно найти пару (u, v) , позволяющую правильно определить $f(x, y)$. Иначе пара (x, y) будет отождествлена с (u, v) или (v, u) , либо правильно будет определено значение $f(u, v)$. Тогда в зависимости от того, принадлежит x к A или нет, можно правильно определить значение $f(x, y)$ и, тем самым, $f(u, v)$ для всех пар, эквивалентных (x, y) . Можно считать $f(x, y) = f(y, x)$ и $f(x, x) = x$. Тогда A посредством общерекурсивной функции f окажется полурекурсивным множеством.

Следующее предложение обобщает один результат из [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Простое не гиперпростое множество A не может быть почти полурекурсивным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что A вместе с общерекурсивной функцией f удовлетворяют условию (1). Так как $\overline{A}$ не гипериммунно, то существует общерекурсивная функция g такая, что

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies D_{g(x)} \cap D_{g(y)} = \emptyset), \quad (\forall x)(D_{g(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset), \quad (4)$$

где D_n – конечное множество с каноническим номером n .

Случай 1. Множество R бесконечно, где

$$\langle x, y \rangle \in R \iff (\exists n)(x, y \in D_{g(n)} \wedge f(x, y) = \overline{a}).$$

Ясно, что R – рекурсивно-перечислимое множество. Если множество

$$B = \{ \langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in R \wedge (x \in A \vee y \in A) \}$$

бесконечно, то множество

$$C = \{ x : (\exists y)((\langle x, y \rangle \in R \wedge y \in A) \vee (\langle y, x \rangle \in R \wedge y \in A)) \}$$

является бесконечным рекурсивно-перечислимым подмножеством $\overline{A}$. Если же множество B конечно, то множество

$$C' = \{ x : (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R \setminus B) \}$$

является бесконечным рекурсивно-перечислимым подмножеством $\overline{A}$. Это противоречит иммунности $\overline{A}$.

Случай 2. Множество R конечно (можно считать $R = \emptyset$). Для каждого x восстанавливаем $D_{g(x)} = \{y_1, y_2, \dots, y_{m(x)}\}$, где y_i также зависят от x . Затем вычисляем

$$d_2 = f(y_1, y_2), \quad d_3 = f(d_2, y_3), \quad \dots, \quad d_{m(x)} = f(d_{m(x)-1}, y_{m(x)}).$$

Из (4) имеем $x \neq y \implies d_{m(x)} \neq d_{m(y)} \wedge d_{m(x)} \in \overline{A}$. Следовательно, множество $\{d_{m(i)} : i \geq 0\}$ опять оказывается бесконечным рекурсивно-перечислимым подмножеством $\overline{A}$.

Ясно, что почти полурекурсивное множество с рекурсивно-перечислимым дополнением является полурекурсивным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рекурсивно-перечислимое почти полурекурсивное множество является полурекурсивным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть рекурсивно-перечислимое множество A вместе с общерекурсивной функцией f удовлетворяют условию (1) и

$$B_0 = \{x : (\exists y)(y \in A \wedge f(x, y) = \bar{a})\}, \quad B_{n+1} = \{x : (\exists y)(y \in B_n \wedge f(x, y) = x)\}.$$

Ясно, что $B = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ является рекурсивно-перечислимым подмножеством $\bar{A}$ и если $\bar{A} = B$, то A – рекурсивное множество. Иначе пусть $b \in \bar{A} \setminus B$ и $R = \{x : f(b, x) \neq b\}$. Тогда R – рекурсивное множество, причем $B \subseteq R \subseteq \bar{A}$ и

$$\{x, y\} \subseteq \bar{R} \wedge f(x, y) = \bar{a} \implies y \notin A.$$

Положим по определению

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \in \{x, y\} \wedge x \notin R, \\ x, & \text{если } x \in R, \\ y, & \text{если } x \notin R \wedge f(x, y) = \bar{a}. \end{cases}$$

Легко проверить, что A посредством общерекурсивной функции g является полурекурсивным множеством.

Бесконечное множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется *слабо иммунным* [2], если для любого рекурсивно-перечислимого подмножества $B \subseteq A$ найдется рекурсивное множество R такое, что $B \subseteq R \subseteq A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если A – почти полурекурсивное множество, не являющееся рекурсивно-перечислимым, то A – слабо иммунное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A вместе с общерекурсивной функцией f удовлетворяют условию (1), B – рекурсивно-перечислимое подмножество A , $C_0 = B$ и

$$C_{i+1} = \{x : (\exists y \in C_i)(f(x, y) = y)\}, \quad C = \bigcup_{i \geq 0} C_i.$$

Так как можно считать, что $f(x, x) = x$ для всех $x \in \mathbb{N}$, то $C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C \subseteq A$. Однако, C – рекурсивно-перечислимое множество, поэтому $C \neq A$. Если $c \in A \setminus C$, а $R = \{x : f(c, x) = c\}$, то R – рекурсивное множество и $R \subseteq A$. Если же $x \in C$ и $f(c, x) = x$, то $x \in C_i$ для некоторого i . Тогда $c \in C_{i+1} \subseteq C$, что противоречит выбору c . Поэтому $x \in C$ влечет $f(c, x) = c$, т.е. $x \in R$. Итак, $B \subseteq C \subseteq R$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jockusch C. G. Semirecursive sets and positive reducibility // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. P. 420–436.
- [2] Jockusch C. G., Owings J. C. Weakly semirecursive sets and r.e. orderings // J. Symbolic Logic. 1990. V. 55. P. 637–644.
- [3] Kummer M., Stephan F. Weakly semirecursive sets and r.e. orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 1993. V. 60. P. 133–150.
- [4] Розинас М. Г., Солон Б. Я. Слабо полурекурсивные множества // Изв. вузов. Матем. 1979. № 12. С. 48–50.
- [5] Yates C. E. M. Recursively enumerable sets and retracing functions // Z. Math. Logik Grundlagen Math. 1962. V. 8. № 4. P. 331–345.

Тюменский государственный университет

Поступило

14.03.97

Исправленный вариант

10.03.98