Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Заика, Устойчивые дискретные программы наблюдений в аналитических динамических системах, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 194–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:47:16

УДК 517.9

УСТОЙЧИВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПРОГРАММЫ НАБЛЮДЕНИЙ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ю. В. Заика

Рассматривается задача выбора таких дискретных программ наблюдения в аналитических динамических системах, которые обеспечивают однозначность восстановления движения и устойчивы к малым возмущениям. Установлена их связь с конечными базисами наблюдаемых функций. В основе полученных результатов – описание идеалов кольца ростков аналитических функций в точке и теория комплексных аналитических множеств.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Рассмотрим в области $\Omega = (t_1, t_2) \times U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ нелинейную систему наблюдения

$$\dot{x} = f(t, x), \quad y = g(t, x), \quad (1)$$

моделирующую соответственно закон движения и доступную информацию о движении. Вектор-функции f, g считаем вещественными аналитическими: $f \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^\omega(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Задан отрезок наблюдения $[0, T] \subset (t_1, t_2)$ и неопределенность в начальных данных: $x(T) \in U_T \subseteq U$ (U_T, U – области в $\mathbb{R}^n$). Продолжимость решений $x(\cdot; x(T), T)$, $x(T) \in U_T$, векторного дифференциального уравнения в (1) на отрезок $[0, T]$ предполагается. Задача наблюдения состоит в определении по любой возможной реализации $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y(t) = g(t, x(t; x(T), T))$, неизвестного априори вектора $x(T) \in U_T$. По $x(T)$ уже можно однозначно восстановить движение. Речь идет о “континуально-многоточечной” нелинейной граничной задаче. Ее необходимо решать систематически, поэтому нас интересуют операции восстановления $x(T)$ для всей области U_T .

Непосредственное обращение отображения $x(T) \mapsto y(\cdot)$ в области U_T в нелинейном случае – труднообозримая проблема. Часто ограничиваются конечным дискретным набором измерений и анализируют $x(T) \mapsto (y(t_1), \dots, y(t_k))$. Это продиктовано и соображениями реализации вычислений. Набор моментов времени $P = \{t_1, \dots, t_k\}$ ($0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq T$) называют *программой наблюдений*. Она фиксируется одной и той же для всех возможных $y(\cdot)$. Инъективность полученного отображения $U_T \rightarrow \mathbb{R}^{mk}$ влечет наблюдаемость: $y(\cdot) \leftrightarrow x(T) \in U_T$.

Для упрощения обозначений и без существенного ограничения общности считаем $m = 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00355.

Можно ли P выбрать так, чтобы сужение информации $y(\cdot)$ до значений конечного числа функционалов $y(t_i)$ не приводило к потере информации об искомом $x(T)$ (в смысле взаимно однозначного соответствия $y(\cdot) \leftrightarrow (y(t_1), \dots, y(t_k)), x(T) \in U_T$)?

Если U_T – достаточно малая окрестность некоторой опорной точки $\bar{x} \in U$ и линейное приближение (1) в окрестности движения $x(\cdot; \bar{x}, T)$ наблюдаемо, то пара (f, g) (система (1)) также наблюдаема, и можно взять $k = n$ [1], [2]. Вырожденность линейного приближения приводит к значительному усложнению задачи даже в локальной постановке. Достаточно провести аналогию с классической задачей обращения отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (пусть и локального), когда вырождена матрица Якоби. В [3] К.В. Козеренко показал, что для стационарной аналитической наблюдаемой пары (f, g) можно ограничиться $2n + 1$ замерами: $(y(t_1), \dots, y(t_{2n+1})) \leftrightarrow x(T) \in U_T$. Но в общем случае множество “удачных” программ наблюдений не является открытым в $[0, T]^{2n+1}$. Систематический анализ дискретной наблюдаемости аналитических систем в вырожденных случаях проведен К.Е. Старковым (упомянем лишь работы [4], [5], имеющие дальнейшие ссылки).

Данная статья посвящена, в частности, следующему вопросу. Можно ли для наблюдаемой пары (f, g) $(y(\cdot) \leftrightarrow x(T) \in U_T)$ выбрать программы наблюдений $P = \{t_1, \dots, t_k\}$ со свойствами:

- 1) $(y(t_1), \dots, y(t_k)) \leftrightarrow x(T) \in U_T$;
- 2) любая достаточно близкая программа $\tilde{P} (|\tilde{t}_i - t_i| < \delta)$ также дает биекцию $(y(\tilde{t}_1), \dots, y(\tilde{t}_k)) \leftrightarrow x(T) \in U_T$?

В этом смысле и будем говорить об устойчивых программах наблюдения. Область неопределенности U_T считаем малой – вряд ли можно рассчитывать на глобальную устойчивость для произвольных аналитических вектор-функций f, g . В работе рассмотрена более общая задача $(y(\cdot) \leftrightarrow (y(t_1), \dots, y(t_k)))$ без предположения наблюдаемости пары (f, g) .

2. Программы наблюдений и базисы наблюдаемых функций. Получим необходимое в дальнейшем представление выхода

$$y(\cdot; x(T), T) = g(\cdot, x(\cdot; x(T), T)): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Его смысл станет ясным после формальных преобразований. Область U_T определена как окрестность некоторой опорной точки $\bar{x} \in U$.

Фиксируем произвольный момент времени $t_* \in [0, T]$ и воспользуемся разложением в степенной ряд

$$y(t; x(T), T) = y(t; z, t_*) = \sum_{j=0}^{\infty} L_j(z) \frac{t - t_*}{j!}. \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} z &= x(t_*; x(T), T) \in U_* = x(t_*; U_T, T), \quad |t - t_*| < \varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon(z) > 0, \\ L_j(z) &= L_f^j g(t_*, z), \quad L_f^0 g(t, x) = g(t, x), \\ L_f^{i+1} g(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t}(L_f^i g) + \frac{\partial}{\partial x}(L_f^i g) \cdot f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = (t_1, t_2) \times U. \end{aligned}$$

Пусть (2) справедливо в $\{(t, z)\} = (t_* - \varepsilon_0, t_* + \varepsilon_0) \times U_*$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_0 \neq \varepsilon_0(z)$. Это выполнено, в частности, когда окрестность U_T точки $\bar{x}$ достаточно мала.

Локально, начиная с некоторого номера $j \geq p$, функции L_j можно выразить через предыдущие. Это позволит произвести необходимую перегруппировку слагаемых в (2).

ТЕОРЕМА 1 [6, с. 44]. *Для любого идеала J кольца $\mathcal{H}_n$ ростков в точке $z_0 \in \mathbb{C}^n$ аналитических функций от n комплексных переменных можно указать*

- а) *в некоторой открытой окрестности $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}^n$ точки z_0 конечное множество аналитических функций $h_1, \dots, h_r$ с ростками в z_0 из J ;*
- б) *(базис векторов в $\mathbb{C}^n$ и) последовательность ограниченных открытых поликругов $\{P_i, i \geq 1\}$ с центром в z_0 и радиусами, монотонно стремящимися к 0 (замыкание $\text{cl } P_1 \subset \mathcal{O}$);*
- в) *числа $\rho_i, i \geq 1$, со следующим свойством: для каждой аналитической в P_i функции h с ростком $\hat{h} \in J$ существуют функции $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, аналитические в P_i , такие, что*

$$h(z) = \sum_{j=1}^r \alpha_j(z) h_j(z), \quad (3)$$

$$\|\alpha_j\|_{P_i} = \sup_{z \in P_i} |\alpha_j| \leq \rho_i \|h\|_{P_i}, \quad j = \overline{1, r}. \quad (4)$$

Функции L_j вещественны и аналитичны в U_* , и по лемме Абеля о сходимости степенных рядов можем считать, что L_j определены и аналитичны в области $U_*^c \subseteq \mathbb{C}^n$ (комплексной окрестности U_*). Эти аналитические продолжения обозначим через L_j^c . Полагаем, что область U_*^c не зависит от j : функции L_j являются последовательными производными. Рассмотрим идеал J в кольце $\mathcal{H}_n$ ростков аналитических функций в точке $\bar{z} = x(t_*; \bar{x}, T)$, порожденный $\{L_i^c: U_*^c \rightarrow \mathbb{C}, i \geq 0\}$. Элементы J – конечные линейные комбинации ростков $\hat{L}_j^c$ с коэффициентами из $\mathcal{H}_n$. Пусть окрестности $\mathcal{O}_i$ точки $z_0 = \bar{z}$ (поликруги P_i в подходящем базисе $\mathbb{C}^n$), базисные функции $h_1, \dots, h_r$, константы $\rho_i, i \geq 1$, выбраны согласно теореме 1. Фиксируем $s \geq 1, p \geq 1$, исходя из условий $\text{cl } \mathcal{O}_s \subset U_*^c$ и справедливости в $\mathcal{O}_s$ представлений

$$L_j^c(z) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \beta_{j\nu}(z) L_\nu^c(z), \quad \|\beta_{j\nu}\|_{\mathcal{O}_s} \leq \rho \|L_j^c\|_{\mathcal{O}_s}, \quad (5)$$

$$\beta_{j\nu} \in C^\omega(\mathcal{O}_s, \mathbb{C}), \quad \nu = \overline{0, p-1}, \quad j \geq p, \quad \rho > 0.$$

Это возможно, поскольку согласно (3) все функции L_j^c в $\mathcal{O}_i, i \geq 1$, являются линейными комбинациями $h_1, \dots, h_r$. Последние, в свою очередь, в окрестности $\bar{z}$ представимы комбинациями конечного числа L_ν^c по определению идеала J (коэффициенты – аналитические функции). Существование ρ , не зависящего от ν и j , следует из оценок (4).

Заменим в представлении (2) при $|t - t_*| < \varepsilon_0$ и $z \in \mathcal{O}_s \cap U_*$ производные $L_j, j \geq p$, линейными комбинациями согласно (5) и “соберем коэффициенты” при $L_0, \dots, L_{p-1}$. Получим

$$y(t; z, t_*) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i(t, z) L_i(z), \quad z \in \mathcal{O}_s \cap U_*, \quad |t - t_*| < \varepsilon_1 < \varepsilon_0. \quad (6)$$

Абсолютная и равномерная сходимость комплексных рядов, обеспечивающая возможность перегруппировки слагаемых и вещественную аналитичность функций $\gamma_i(t, z)$, следует из неравенств Коши

$$\frac{|L_j^c(z)|}{j!} \leq \frac{N}{\varepsilon_2^j}, \quad z \in \mathcal{O}_s, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0, \quad N = \text{const},$$

и оценок в $\mathcal{O}_s$ коэффициентов $\beta_{j\nu}$ из (5) с $\rho \neq \rho(\nu, j)$.

Поскольку наши рассмотрения локальны, то, фиксируя $\mathcal{O}_s$ и дополнительно уменьшая при необходимости исходную область неопределенности U_T , будем считать $U_* \subseteq \mathcal{O}_s \cap \mathbb{R}^n$ (U_T – достаточно малая окрестность опорной точки $\bar{x}$).

Результат обобщает следующие построения. При $f = F \cdot x$, $g = G \cdot x$ (стационарная линейная задача)

$$y(t; z, t_*) = G \exp\{F \cdot (t - t_*)\} z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t - t_*)^j G F^j z}{j!}.$$

Для $j \geq p$, $p \geq \text{rank}(G', F'G', \dots, F'^{n-1}G')$, можно последовательно выразить GF^j как линейные комбинации $G, GF, \dots, GF^{p-1}$. Меняя порядок суммирования (в числителе – степени, в знаменателе – факториалы), получаем для любых $t \in \mathbb{R}^1$ и $z \in \mathbb{R}^n$

$$y(t; z, t_*) = \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_j(t) GF^j z = \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_j(t) L_j(z).$$

Такие коэффициенты $\gamma_j(t)$ обладают свойством

$$\begin{aligned} \gamma(t_*) &= (\gamma_0(t_*), \dots, \gamma_{p-1}(t_*))' = e_1 = (1, 0, \dots, 0)', \\ \dot{\gamma}(t_*) &= e_2, \quad \dots, \quad \gamma^{(p-1)}(t_*) = e_p, \end{aligned}$$

как и $\gamma_j(t, z)$, построенные в (6):

$$\gamma(t_*, z) = e_1, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_*, z) = e_2, \quad \dots$$

Впрочем, суммированием рядов заниматься необязательно. Достаточно воспользоваться конечным представлением матричной экспоненты

$$\exp\{Ft\} = \alpha_0(t)E + \dots + \alpha_{p-1}(t)F^{p-1}.$$

Здесь, как и при $m \geq 1$, в качестве p можно взять степень характеристического или минимального аннулирующего полинома матрицы F . Поиск $\alpha_j(t)$ сводится к решению линейного скалярного уравнения p -го порядка.

Когда f, g заданы элементарными функциями, определенными и при комплексных значениях фазовых переменных, L_j^c можно выписать явно, в отличие от $y(t; \cdot, t_*)$ как

функций $z \in U_*(U_*^c)$. Если в Ω (или хотя бы в окрестности пучка интегральных кривых $s(x(T)) \in U_T$) какая-либо производная выражается через предыдущие в форме

$$L_f^r g(t, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \alpha_\nu(t, x) L_f^\nu g(t, x), \quad (7)$$

то в (6) можно считать $p = r$. При $p > r$ представления $L_{r+1}, \dots, L_{p-1}$ через $L_0, \dots, L_{r-1}$ получаются дифференцированием (7) по t в силу дифференциального уравнения в (1) ($x = x(t)$). Достаточно требовать лишь необходимой гладкости коэффициентов α_ν . При наличии двух различных общих нулей в U_* функций $L_0, \dots, L_{p-1}$ пара (f, g) заведомо неполностью наблюдаема. Теоретически работать не с функционалами $y(t_j)$, а с производными $L_f^i g$ гораздо удобнее. В частности, можно исследовать систему уравнений $L_f^i g(T, x) = y^{(i)}(T)$, $i = \overline{0, n-1}$, с точки зрения однозначной разрешимости относительно x в области U_T . Допустим и любой другой набор производных. Но дифференцирование реальных измерений достаточное число раз даже при незначительных по амплитуде шумах нельзя считать корректной операцией. Представление (6) означает возможность конечного представления более надежных функционалов $y(t_j)$ через более удобные в аналитическом отношении объекты $L_f^i g$. Это позволит доказать основной результат статьи – теорему 2. Последовательное дифференцирование (7) по t (при $x = x(t)$) q раз, замена в (2) L_j , $r \leq j \leq r+q$, комбинациями $L_0, \dots, L_{r-1}$ и отбрасывание $o(|t - t_*|^{r+q})$ дает приближенное представление вида (6) с $p = r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $\varphi: U_T \rightarrow \mathbb{R}^1$ назовем *наблюдаемой* (в U_T), если существует функционал Λ из условия $\varphi(x(T)) = \Lambda(y(\cdot; x(T), T))$, $x(T) \in U_T$.

Наблюдаемость φ означает, что по $y(\cdot)$ однозначно восстанавливаются значения $\varphi(x(T))$ функции φ на неизвестном априори $x(T)$. Наблюдаемость (f, g) эквивалентна наблюдаемости всех координатных функций $\varphi(x) = x_i$, $i = \overline{1, n}$, в области U_T . Такое определение мотивируется тем, что не всегда нужно восстанавливать полный фазовый вектор. Как правило, часть фазовых координат можно измерить и требуется восстанавливать лишь оставшиеся.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Базисом множества $\Phi(U_T)$ всех наблюдаемых в U_T функций φ назовем конечную совокупность $\varphi_i \in \Phi$, $i = \overline{1, k}$, такую, что имеет место функциональная зависимость*

$$\varphi(x) = H_\varphi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)) \quad \text{для всех } \varphi \in \Phi, x \in U_T.$$

Образно говоря, базисность означает, что, вычислив по $y(\cdot)$ значения $\varphi_i(x(T)) = \Lambda_i(y(\cdot))$, $i = \overline{1, k}$, никакой дополнительной информации об $x(T)$ извлечь уже невозможно: $(\varphi_1(x(T)), \dots, \varphi_k(x(T))) \leftrightarrow y(\cdot; x(T), T)$, $x(T) \in U_T$. При необходимости определения 1, 2 можно переформулировать для подмножества $M \subseteq U_T$.

Будем искать базисы $\Phi(U_T)$, ограничившись функционалами $\Lambda_j(y(\cdot)) = y(t_j)$.

Представление вида (6) даже в линейном случае неединственно. Фиксируем в (6) именно те коэффициенты $\gamma_j(t, z)$, $j = \overline{0, p-1}$, которые существуют согласно теореме 1:

$$\gamma_j(t, z) = \frac{(t - t_*)^j}{j!} + \sum_{\nu=p}^{\infty} \eta_{\nu j}(z) \frac{(t - t_*)^\nu}{\nu!}, \quad \eta_{\nu j}(z) = \operatorname{Re} \beta_{\nu j}(z), \quad |t - t_*| < \varepsilon_1, \quad z \in U_*.$$

Рассмотрим произвольную последовательность различных моментов времени $t_i \in [t^-, t^+]$ ($t_* - \varepsilon_1 < t^- < t_* < t^+ < t_* + \varepsilon_1$) и наблюдаемые в U_T функции $\varphi_i(x(T)) = \Lambda_i(y(\cdot)) = y(t_i; x(T), T)$. В силу (6) для $z = x(t_*; x(T), T)$ имеем

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x(T)) \\ \varphi_2(x(T)) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0(t_1, z) & \dots & \gamma_{p-1}(t_1, z) \\ \gamma_0(t_2, z) & \dots & \gamma_{p-1}(t_2, z) \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0(z) \\ \dots \\ L_{p-1}(z) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

ЛЕММА. Среди строк матрицы Γ в (8) с элементами $\gamma_j(t_i, z)$ при любом фиксированном $z \in U_*$ ($x(T) \in U_T$) можно найти p линейно независимых строк.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, это не так: $\Gamma \cdot c = 0$, $z = \hat{z} \in U_*$, $c = (c_0, \dots, c_{p-1})' \neq 0$ (нули всегда обозначаем одним символом). Тогда $c' \gamma(t_i, \hat{z}) = 0$ для всех $i \geq 1$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1})'$. В силу аналитичности $c' \gamma(t, \hat{z}) = 0$ ($|t - t_*| < \varepsilon_1$):

$$c_0 + c_1(t - t_*) + \dots + c_{p-1} \frac{(t - t_*)^{p-1}}{(p-1)!} + O(|t - t_*|^p) = 0.$$

Следовательно, все $c_j = 0$. Противоречие.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пара (f, g) аналитична в $\Omega = (t_1, t_2) \times U$. Фиксируем любую последовательность различных моментов времени $t_i \in [0, T]$, $i \geq 1$. Если область неопределенности начальных данных U_T достаточно мала (окрестность некоторой опорной точки $\bar{x} \in U$), то можно выделить программы наблюдений $P = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\}$ такие, что

- 1) функции $\varphi_\nu(x(T)) = y(t_{i_\nu}; x(T), T)$, $\nu = \overline{1, k}$, образуют базис $\Phi(U_T)$ ($(y(t_{i_1}), \dots, y(t_{i_k})) \leftrightarrow y(\cdot)$ и все наблюдаемые φ имеют представление $\varphi(x(T)) = H(y(t_{i_1}), \dots, y(t_{i_k}))$ в U_T);
- 2) базис $\Phi(U_T)$ образуют и $\tilde{\varphi}_\nu(x(T)) = y(\tilde{t}_{i_\nu})$, $\nu = \overline{1, k}$, когда программа $\tilde{P}$ достаточно близка к P ($|t_{i_\nu} - \tilde{t}_{i_\nu}| < \delta$).

СЛЕДСТВИЕ. Если, кроме того, пара (f, g) наблюдаема в U_T , то по значениям $y(t_{i_\nu})$, $\nu = \overline{1, k}$, вектор $x(T) \in U_T$ определяется однозначно, и эта однозначность сохраняется при малом возмущении программы наблюдений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Считаем, что $t_i \rightarrow t_* \in [0, T]$, иначе ограничимся сходящейся подпоследовательностью. Рассмотрим идеал $\tilde{J}$ в кольце $\mathcal{H}_{2n}$ ростков аналитических функций в точке $(\bar{z}, \bar{z}) \in U_* \times U_*$ ($\bar{z} = x(t_*; \bar{x}, T)$), порожденный множеством $\{\Delta L_i^c: U_*^c \times U_*^c \rightarrow \mathbb{C}, i \geq 0\}$, где $\Delta L_i^c(z^1, z^2) = L_i^c(z^1) - L_i^c(z^2)$. Мы используем введенные выше обозначения. Представления

$$\Delta L_j^c(z^1, z^2) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \tilde{\beta}_{j\nu}(z^1, z^2) \Delta L_\nu^c(z^1, z^2), \quad (9)$$

$$\|\tilde{\beta}_{j\nu}\|_{\tilde{\theta}_s} \leq \tilde{\rho} \|\Delta L_j^c\|_{\tilde{\theta}_s}, \quad \tilde{\rho} \neq \tilde{\rho}(\nu, j), \quad j \geq k,$$

справедливые в некоторой комплексной окрестности $\tilde{\theta}_s$ точки $(\bar{z}, \bar{z})$ в $U_*^c \times U_*^c$, доказываются аналогично (5). Фиксируем $\tilde{\theta}_s$ и, уменьшив при необходимости U_T , считаем $U_* \times U_* \subset \tilde{\theta}_s \cap \mathbb{R}^{2n}$.

Точно так же (только удваивая размерность) приходим к (8) с заменой $\varphi_i(x)$ на $\Delta\varphi_i(x^1, x^2) = \varphi_i(x^1) - \varphi_i(x^2) = y(t_i; x^1, T) - y(t_i; x^2, T)$, $L_\nu(z)$ на $\Delta L_\nu(z^1, z^2) = L_\nu(z^1) - L_\nu(z^2)$, p на k . При этом $x^j \in U_T$, $z^j = x(t_*; x^j, T)$, $\gamma_\nu = \gamma_\nu(t, z^1, z^2)$, а моменты времени t_i , $i \geq 1$, принадлежат отрезку $[\tilde{t}^-, \tilde{t}^+]$, соответствующему этому аналогу (8) (иначе отбросим конечное число моментов). Схема не меняется: в

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(t; x^1, T) - y(t; x^2, T) = y(t; z^1, t_*) - y(t; z^2, t_*) \\ &= \Delta L_0 + \Delta L_1 \cdot (t - t_*) + \Delta L_2 \cdot \frac{(t - t_*)^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

следует заменить ΔL_j , $j \geq k$, линейными комбинациями $\Delta L_0, \dots, \Delta L_{k-1}$ в силу (9) и поменять порядок суммирования.

Фиксируем теперь номера $i_1, \dots, i_k$ линейно независимых в точке $(\bar{z}, \bar{z})$ строк соответствующей матрицы Γ (таких наборов номеров бесконечно много):

$$(\Delta\varphi_{i_1}, \dots, \Delta\varphi_{i_k}) = (\Delta L_0, \dots, \Delta L_{k-1}) \cdot R, \quad (z^1, z^2) \in U_* \times U_*, \quad \det R(\bar{z}, \bar{z}) \neq 0.$$

Элементы матрицы R имеют вид $\gamma_\mu(t_{i_\nu}, z^1, z^2)$, $\mu = \overline{0, k-1}$, $\nu = \overline{1, k}$. Поэтому при достаточно малых возмущениях ($|\tilde{t}_{i_\nu} - t_{i_\nu}| < \delta$) матрица $\tilde{R}$ с элементами $\gamma_\mu(\tilde{t}_{i_\nu}, z^1, z^2)$ остается невырожденной в точке $(\bar{z}, \bar{z})$ и некоторой ее окрестности $U_* \times U_*$. Здесь, если необходимо, снова уменьшаем область $U_T = U_T(\bar{x}, f, g, \{t_i\})$. Окончательно получаем

$$(\Delta\tilde{\varphi}_{i_1}, \dots, \Delta\tilde{\varphi}_{i_k}) = (\Delta L_0, \dots, \Delta L_{k-1}) \cdot \tilde{R}, \quad \det \tilde{R} \neq 0. \quad (10)$$

Слева в качестве аргумента выступает произвольная точка $(x^1, x^2) \in U_T \times U_T$, справа – соответствующая $(z^1, z^2) \in U_* \times U_*$. Из $\Delta\tilde{\varphi}_{i_\nu} = y(\tilde{t}_{i_\nu}; x^1, T) - y(\tilde{t}_{i_\nu}; x^2, T) = 0$, $\nu = \overline{1, k}$, следует $\Delta L_j(z^1, z^2) = 0$, $j = \overline{0, k-1}$. Но тогда из (9) $\Delta L_j(z^1, z^2) = 0$, $j \geq 0$, т.е. $y(\cdot; x^1, T) = y(\cdot; x^2, T)$ на $[0, T]$ в силу аналитичности. Поэтому $(y(\tilde{t}_{i_1}), \dots, y(\tilde{t}_{i_k})) \leftrightarrow y(\cdot)$ и функции $\tilde{\varphi}_{i_\nu}$ образуют базис $\Phi(U_T)$:

$$\varphi \in \Phi \implies \varphi(x(T)) = H(\tilde{\varphi}_{i_1}(x(T)), \dots, \tilde{\varphi}_{i_k}(x(T))) = H(y(\tilde{t}_{i_1}), \dots, y(\tilde{t}_{i_k})), x(T) \in U_T.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если f, g заданы в элементарных функциях и для $\Delta L_f^r g = L_f^r g(t, x^1) - L_f^r g(t, x^2)$ удалось получить разложение вида (7) по $\Delta L_f^0 g, \dots, \Delta L_f^{r-1} g$, то можно выбрать $k = r$. Для справедливости указанного в доказательстве аналога леммы достаточно, чтобы коэффициенты $\gamma_i(t, x^1, x^2)$ имели вид $(t - t_*)^i / i! + O(|t - t_*|^r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Область U_T можно выбрать не зависящей от $\{t_i, i \geq 1\}$. Но при этом, возможно, придется увеличивать k ($k = k(\{t_i\})$). Действительно, для достаточно малой U_T фиксируем конечное число моментов t_* , чтобы $\cup(\tilde{t}^-, \tilde{t}^+) \supset [0, T]$. Выделим из $\{t_i, i \geq 1\}$ подпоследовательность с пределом в одном из $(\tilde{t}^-, \tilde{t}^+)$. Покроем замыкание соответствующего $U_* \times U_*$ конечной системой окрестностей, в которых будут выполняться представления вида (10). Объединяя векторы слева в один, вместо квадратной матрицы $\tilde{R}$ получим прямоугольную матрицу $\hat{R}$, $\text{rank } \hat{R} = k$, в $U_* \times U_*$, $\delta \ll 1$. Нулевое значение объединенного вектора слева, по-прежнему, влечет $\Delta L_j(z^1, z^2) = 0$, $j = \overline{0, k-1}$, и $y(\cdot; x^1, T) = y(\cdot; x^2, T)$.

В заключение отметим следующее. Пусть U_T ограничена и решения $x(\cdot; x(T), T)$ продолжимы на $[0, T]$ для $x(T)$ из области $\tilde{U}_T$, $\text{cl } U_T \subset \tilde{U}_T$. Тогда из произвольной последовательности различных моментов времени $t_i \in [0, T]$ можно выделить бесконечно много программ $P = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_q}\}$, для которых $(y(t_{i_1}), \dots, y(t_{i_q})) \leftrightarrow y(\cdot), x(T) \in U_T$, и соответствующие функции φ_{i_ν} , $\nu = \overline{1, q}$, образуют базис $\Phi(U_T)$. Действительно, обозначим через Z_i множество нулей $\Delta\varphi_i(x^1, x^2) = y(t_i; x^1, T) - y(t_i; x^2, T)$ в области $\tilde{U}_T^c \times \tilde{U}_T^c$ ($\tilde{U}_T^c$ – малая комплексная окрестность $\tilde{U}_T$, в которую аналитически продолжаются $y(t_i; \cdot, T)$). Тогда согласно теории комплексных аналитических множеств [7, с. 53] следует, что найдутся номера $i_1, \dots, i_q$ из условия

$$\left(\bigcap_{i \geq 1} Z_i \right) \cap (U_T \times U_T) = \left(\bigcap_{\nu=1}^q Z_{i_\nu} \right) \cap (U_T \times U_T).$$

Эти номера i_ν и определяют указанные программы, поскольку $y(\cdot) \leftrightarrow \{y(t_i), i \geq 1\} \leftrightarrow \{y(t_{i_\nu}), \nu = \overline{1, q}\}$, $x(T) \in U_T$. Однако, автор не берется утверждать, что какую-либо из этих программ можно “шевелить” с сохранением требуемой биекции глобально в изначально фиксированной области U_T (не оговаривая, что U_T достаточно мала).

Случай многомерных измерений ($m > 1$) можно интерпретировать как m задач анализа наблюдаемости пар (f, g_i) , $g = (g_1, \dots, g_m)'$. По существу, формулировка и доказательство теоремы 2 не изменятся.

Полученный результат носит качественный характер и в определенной степени оправдывает корректность задачи наблюдения (нелинейной обратной) по конечным дискретным программам. Иначе без специальных методов регуляризации было бы в принципе не обойтись.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
- [2] Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
- [3] Козеренко К. В. О числе замеров // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 5. С. 1069–1071.
- [4] Старков К. Е. Построение программ наблюдений для полиномиальных систем // Автоматика и телемеханика. 1993. № 2. С. 91–100.
- [5] Старков К. Е. Определение множества программ наблюдений, гарантирующих наблюдаемость нелинейной системы // Автоматика и телемеханика. 1995. № 7. С. 32–42.
- [6] Эрве М. Функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1965.
- [7] Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.

Петрозаводский государственный университет
E-mail: zaika@mainpgu.karelia.ru

Поступило
04.04.97