Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кановей, М. Реекен, Расширение стандартных моделей **ZFC** до моделей нестандартной теории множеств Нельсона **IST**, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 202–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:57:10

УДК 510.223

РАСШИРЕНИЕ СТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЕЙ ZFC ДО МОДЕЛЕЙ НЕСТАНДАРТНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ НЕЛЬСОНА IST

В. Г. Кановей, М. Реекен

Предлагается характеристика тех стандартных моделей теории множеств ZFC , которые вкладываются, как класс стандартных множеств, в модели теории внутренних множеств IST и некоторых ее вариантов.

Библиография: 7 названий.

Введение. Теория внутренних множеств IST была введена Нельсоном [1] как унифицированный аксиоматический базис “нестандартной” математики. Теория IST описывает универсум всех множеств V таким образом, что помимо “стандартных” множеств (которые отождествляются с обычными объектами “стандартной” математики и подчиняются аксиомам теории Цермело–Френкеля ZFC) существуют объекты такие, как бесконечно большие и бесконечно малые числа и т.п., несовместимые с современной “стандартной” системой оснований математики. Несмотря на то, что позже были предложены более совершенные нестандартные теории множеств, в частности, устраняющие некоторые недостатки системы IST (см., например, [2]–[7]), IST остается наиболее часто используемой нестандартной аксиоматической теорией.

Аксиомы IST приведены ниже.

Одним из важнейших свойств теории Нельсона является *консервативность*: IST доказывает те и только те предложения о классе S стандартных множеств, которые “стандартная” теория ZFC доказывает о всех множествах. Однако, взаимосвязь между этими двумя теориями намного сложнее, чем могло бы показаться из этого результата [1]. Например, как установлено в [2], не всякая ϵ -модель ZFC расширяется (т.е. вкладывается как класс S всех стандартных множеств) до модели IST : в частности, *минимальная* модель ZFC не допускает такого расширения.

Это приводит к задаче описания тех транзитивных ϵ -моделей ZFC , которые допускают расширение до модели IST . Настоящая заметка посвящена этой задаче. Мы получим удобные достаточные условия существования такого расширения, одновременно являющиеся и необходимыми для теории IST^+ , полученной присоединением к IST некоторой естественной формы аксиомы выбора.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00045 и № 98-01-00790, а также фонда DFG, грант № 436-RUS-17/66/97.

1. Теория внутренних множеств. Теория **IST** формулируется в языке $\mathcal{L}_{\in, \text{st}}$, т.е. языке, содержащем два атомарных предиката: принадлежность $\in$ (бинарный) и стандартность st (унарный; $\text{st } x$ понимается как x – стандартное множество). Для класса всех стандартных множеств используется обозначение $\mathbf{S} = \{x : \text{st } x\}$. Список аксиом **IST** включает все аксиомы **ZFC** (в $\in$ -языке), а также три дополнительных “принципа”:

- а) (перенос) $\exists x \Phi(x) \implies \exists^{\text{st}} x \Phi(x)$ для всех $\in$ -формул $\Phi(x)$ со стандартными параметрами;
- б) (идеализация) $\forall^{\text{st fin}} A \exists x \forall a \in A \Phi(a, x) \iff \exists x \forall^{\text{st}} a \Phi(a, x)$ для всех $\in$ -формул $\Phi(x)$ с любыми параметрами;
- в) (стандартизация) $\forall^{\text{st}} X \exists^{\text{st}} Y \forall^{\text{st}} x (x \in Y \iff x \in X \wedge \Phi(x))$ для всех $\text{st-}\in$ -формул $\Phi(x)$ с любыми параметрами.

Кванторы $\exists^{\text{st}} x$ и $\forall^{\text{st}} x$ понимаются естественным образом: “существует стандартное x ” и “для любого стандартного x ”; квантор $\forall^{\text{st fin}} A$ означает “для всех стандартных конечных множеств A ”.

2. Аксиома стандартного полного упорядочения. Рассмотрим расширение **IST**⁺ теории **IST**, полученное за счет:

- i) присоединения бинарного предикатного символа $<$ к языку **IST** и аксиомы о том, что $<$ вполне упорядочивает класс **S** всех стандартных множеств, в частности, что каждое стандартное $X \neq \emptyset$ имеет $<$ -наименьший стандартный элемент, к аксиомам **IST**;
- ii) разрешения употреблять $<$ в формуле Φ в схеме стандартизации (но не в схемах переноса, идеализации, выделения, подстановки).

Взаимосвязь **IST**⁺ с **IST** не вполне ясна. С одной стороны, **IST**⁺ обеспечивается присоединением к **IST** любой “стандартной” теоретико-множественной аксиомы, гарантирующей определимое полное упорядочение универсума (например, аксиомы конструктивности по Гёделю), и выполняется в обычных моделях **IST** типа ультрапроизведений, а также гарантируется некоторыми “нестандартными” аксиомами в языке **IST** (см. ниже п. 8). С другой стороны, остается открытым вопрос о том, не выводится ли **IST**⁺ в **IST** [2, проблема 6].

Чтобы сформулировать главный результат нашей заметки, введем дополнительную терминологию. Допустим, что M – транзитивная $\in$ -модель системы Цермело **Z**. Скажем, что семейство множеств $P_1, \dots, P_n$ (где $P_i \subseteq M^{P_i}$, $i = 1, \dots, n$) *сохраняет выделение в M* , если схема выделения в языке $\mathcal{L}_{\in, P_1, \dots, P_n}$ верна в $\langle M; \in, P_1, \dots, P_n \rangle$. Фраза “сохраняет подстановку в M ” имеет аналогичный смысл.

Заметим, что $\in$ -формулы с параметрами из M могут рассматриваться как элементы M . Пусть $\text{Truth}_{\in}^M$ есть множество всех замкнутых $\in$ -формул с параметрами из M , истинных в $\langle M; \in \rangle$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – транзитивная $\in$ -модель **ZFC**. Тогда существование полного упорядочения $<$ множества M такого, что пара множеств $\text{Truth}_{\in}^M$ и $<$ сохраняет выделение в M , необходимо и достаточно для того, чтобы M вкладывалась как класс всех стандартных множеств в модель **IST**⁺.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 1 существование указанного полного упорядочения достаточно для того, чтобы M вкладывалась как класс всех стандартных множеств в модель **IST**.

Этот результат представляется намного лучше, чем полученный Нельсоном в [1] (где установлено, что для M достаточно быть моделью **ZFC** вида $M = V_{\aleph}$, где $\aleph$ – несчетный кардинал).

Ниже мы доказываем необходимость (п. 3) и достаточность (п. 4–6) в теореме 1. Одновременно с доказательством достаточности будут установлены некоторые метаматематические особенности теории $\mathbf{IST}^+$, в частности, что она разделяет с $\mathbf{IST}$ свойство *консервативности над ZFC*, упомянутое во введении.

3. Необходимость. Рассмотрим модель $\mathbf{I} = \langle \mathbf{I}; \varepsilon, \text{st}, \triangleleft \rangle$ теории $\mathbf{IST}^+$. Допустим, что $M = \mathbf{S}$ (совокупность всех стандартных элементов $\mathbf{I}$) есть транзитивное множество и $\varepsilon \upharpoonright M = \varepsilon \upharpoonright M$. Тогда $\langle M; \varepsilon \rangle \models \mathbf{ZFC}$, так что нам остается найти полное упорядочение $\prec$ множества M такое, что множества $\text{Truth}_{\varepsilon}^M$ и $\prec$ сохраняют выделение в M .

Напомним, что теоретико-множественный *ранг* $\text{rk } x$ множества x равен наименьшему ординалу α такому, что x принадлежит α -му уровню V_α иерархии фон Неймана. Благодаря переносу для любого множества $x \in M = \mathbf{S}$ $\text{ранг rk } x$, определенный в $\langle \mathbf{I}; \varepsilon \rangle$, совпадает с рангом $\text{rk } x$, определенным в M , и, тем самым, с рангом $\text{rk } x$ в смысле базового универсума **ZFC**.

Теперь мы полагаем $x \prec y$ для $x, y \in M$, когда либо $\text{rk } x < \text{rk } y$, либо $\text{rk } x = \text{rk } y$ и $x \triangleleft y$. Из сказанного выше следует, что отношение $\prec$ определимо в структуре $\langle \mathbf{I}; \varepsilon, \text{st}, \triangleleft \rangle$.

С другой стороны, множество $\text{Truth}_{\varepsilon}^M$ также определимо в структуре $\langle \mathbf{I}; \varepsilon, \text{st} \rangle$ согласно следующему результату.

ЛЕММА 1 [2]. *Существует формула $\tau(x)$ языка $\mathcal{L}_{\varepsilon, \text{st}}$ такая, что для любой ε -формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ следующее высказывание является теоремой $\mathbf{IST}$:*

$$\forall^{\text{st}} x_1 \dots \forall^{\text{st}} x_n (\varphi^{\text{st}}(x_1, \dots, x_n) \iff \tau(\ulcorner \varphi(x_1, \dots, x_n) \urcorner)).$$

Здесь $\ulcorner \psi \urcorner$ обозначает формулу ψ , рассматриваемую как конечная последовательность символов ε -языка и множеств, фигурирующих в ψ в качестве параметров.

Поскольку формула Φ в схеме стандартизации в $\mathbf{IST}^+$ может содержать $\prec$ (вместе с ε и st), пара множеств $\text{Truth}_{\varepsilon}^M$ и $\prec$ сохраняет выделение в M .

Остается проверить, что $\prec$ вполне упорядочивает M (с точки зрения универсума всех множеств). Заметим, что так как по построению всякий начальный сегмент M в смысле $\prec$ покрывается множеством из M , достаточно убедиться, что $\prec$ вполне упорядочивает в универсуме любое $X \in M$, а поскольку свойство “быть полным упорядочением” абсолютно для транзитивных моделей **ZFC**, остается проверить, что всякое непустое множество $Y \in M$ имеет $\prec$ -наименьший элемент. Но это обеспечивается выбором $\triangleleft$ и определением $\prec$ из $\triangleleft$.

4. Достаточность: преобразование порядка. Зафиксируем транзитивное множество $M \models \mathbf{ZFC}$, вполне упорядоченное отношением $\triangleleft$ так, что пара множеств $\mathbf{T} = \text{Truth}_{\varepsilon}^M$ и $\triangleleft$ сохраняет выделение в M . Как показывает рассуждение из п. 3, не ограничивая общности можно предполагать, что *всякий собственный начальный сегмент M в смысле $\triangleleft$ принадлежит M* .

Цель этого пункта – некоторое улучшение порядка $\triangleleft$. Именно, в сделанных предположениях доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Найдется полное упорядочение $\prec$ множества M такое, что всякий начальный сегмент M в смысле $\prec$ принадлежит M и, кроме того, $\prec$ сохраняет подстановку в M , а пара, состоящая из $\prec$ и множества $T' = \text{Truth}_{\in, \prec}^M$ всех формул языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ с параметрами из M , истинных в $\langle M; \in, \prec \rangle$, сохраняет выделение в M .*

Доказательство теоремы начнем с некоторых определений.

Через Σ обозначим множество всех структур вида $\sigma = \langle X; \prec \rangle$, где $X \in M$ – транзитивное множество вида $X = M_\alpha = V_\alpha \cap M$ для некоторого ординала $\alpha \in M$, а $\prec \in M$ – полное упорядочение X .

Структура $\sigma' = \langle X'; \prec' \rangle$ *продолжает* $\sigma = \langle X; \prec \rangle$, когда $X \subseteq X'$ и $\prec'$ есть концевое продолжение $\prec$ (т.е. $\prec$ совпадает с $\prec' \upharpoonright X$, а X есть начальный сегмент X' в смысле $\prec'$).

Определим отношение $\sigma \text{ forc } \Phi(x_1, \dots, x_n)$, где $\sigma \in \Sigma$, Φ является $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ -формулой и $x_1, \dots, x_n \in X$, индукцией по сложности Φ :

- 1) если Φ – элементарная формула языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$, т.е. $x < y$, $x = y$ или $x \in y$, то $\sigma \text{ forc } \Phi$, когда Φ истинна в σ (здесь и далее запись $\sigma = \langle X; \prec \rangle \in \Sigma$ понимается как $\langle X; \in, \prec \rangle$);
- 2) $\sigma \text{ forc } (\Phi \wedge \Psi)$, когда $\sigma \text{ forc } \Phi$ и $\sigma \text{ forc } \Psi$;
- 3) $\sigma \text{ forc } (\neg \Phi)$, когда не существует ни одной структуры $\sigma' \in \Sigma$, продолжающей σ , такой, что $\sigma' \text{ forc } \Phi$;
- 4) $\sigma \text{ forc } \exists x \Phi(x)$, когда существует $x \in X$ такое, что $\sigma \text{ forc } \Phi(x)$.

Пусть Φ – формула языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$. Будем говорить, что структура $\sigma = \langle X; \prec \rangle \in \Sigma$ является Φ -*полной*, если для любой подформулы $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ формулы Φ и любых параметров $x_1, \dots, x_n \in X$ имеем $\sigma \text{ forc } \Psi(x_1, \dots, x_n)$ или $\sigma \text{ forc } \neg \Psi(x_1, \dots, x_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если Φ – замкнутая формула языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ с параметрами из X , а структура $\sigma = \langle X; \prec \rangle \in \Sigma$ Φ -полна, то $\sigma \text{ forc } \Phi$ и $\sigma \models \Phi$ равносильны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по сложности Φ .

Нашей ближайшей целью является построение возрастающей последовательности структур $\sigma_\gamma = \langle X_\gamma; \prec_\gamma \rangle \in \Sigma$, $\gamma < \lambda$, такой, что $M = \bigcup_{\gamma < \lambda} X_\gamma$, а значит, отношение $\prec = \bigcup_{\gamma < \lambda} \prec_\gamma$ вполне упорядочивает M . Структуры σ_γ будут достаточно “полны” (в указанном выше смысле), чтобы обеспечить нужные свойства $\prec$.

Скажем, что структура $\sigma \in \Sigma$ *тотально полна*, если она является Φ -полной для любой формулы Φ языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$. Построение зависит от частоты тотально полных структур в Σ :

- 1) все $\sigma \in \Sigma$ продолжаются до тотально полных $\sigma' \in \Sigma$;
- 2) иначе.

В случае 1) построим последовательность структур $\sigma_\gamma = \langle X_\gamma; \prec_\gamma \rangle \in \Sigma$, где $\gamma < \lambda$, так, что $X_\delta = \bigcup_{\gamma < \delta} X_\gamma$, $\prec_\delta = \bigcup_{\gamma < \delta} \prec_\gamma$ для всех предельных ординалов $\delta < \lambda$ и $\sigma_{\gamma+1}$ является $\prec$ -наименьшей тотально полной структурой в Σ , которая собственно продолжает σ_γ . Здесь λ – наибольший ординал такой, что σ_γ определено (и принадлежит Σ , а значит и M) для всех $\gamma < \lambda$; понятно, что λ не больше наименьшего из ординалов, не принадлежащих M .

В случае 2) фиксируем рекурсивное перечисление $\{\Phi_n : n \in \omega\}$ всех формул языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$. Структура $\sigma \in \Sigma$ будет называться n -*полной*, когда она Φ_k -полна для любого $k \leq n$. В этом случае полагаем $\lambda = \omega$, произвольно выбираем структуру $\sigma_0 \in \Sigma$,

не продолжаемую до totally полной структуры, и определяем последовательность структур $\sigma_n = \langle X_n; <_n \rangle \in \Sigma$ так, что для любого $n \in \omega$ σ_{n+1} есть $\triangleleft$ -наименьшая n -полная структура в Σ , собственно продолжающая σ_n .

В каждом из рассмотренных случаев $\langle \sigma_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ – последовательность элементов M , определяемая в $\langle M; \in, \triangleleft, T \rangle$ по построению (напомним, что $T = \text{Truth}_\in^M$).

ЛЕММА 2. *Ординал λ предельный и $\bigcup_{\gamma < \lambda} X_\gamma = M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\lambda = \omega$ в случае 2). Если $\lambda = \gamma + 1$ в случае 1), то мы могли бы определить σ_λ . Итак, λ – предельный ординал, а отношение $\triangleleft = \bigcup_{\gamma < \lambda} <_\gamma$ вполне упорядочивает X .

Предположим, что $X = \bigcup_{\gamma < \lambda} X_\gamma \neq M$. Тогда $X \in M$, поскольку все множества X_γ имеют вид $M_\alpha = V_\alpha \cap M$. Следовательно, $\triangleleft$ принадлежит M , так как $\triangleleft$ и T сохраняют выделение в M . Поэтому $\sigma = \langle X; \triangleleft \rangle \in \Sigma$. Более того, σ totally полна (как предел возрастающей последовательности totally полных структур в случае 1) и по аналогичной причине в случае 2)). Это сразу противоречит выбору σ_0 в случае 2), а в случае 1) добавляет еще один член к последовательности, что противоречит выбору λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Итак, $\triangleleft = \bigcup_{\gamma < \lambda} <_\gamma$ – полное упорядочение M . Проверим, что пара множеств $\triangleleft$ и $T' = \text{Truth}_{\in, \triangleleft}^M$ сохраняет выделение в M . Достаточно убедиться, что $\triangleleft$ и T' определимы в структуре $\langle M; \in, \triangleleft, T \rangle$, где $T = \text{Truth}_\in^M$.

То, что порядок $\triangleleft$ определим в $\langle M; \in, \triangleleft, T \rangle$, очевидно следует из построения. Займемся множеством T' .

Рассмотрим замкнутую формулу $\Phi(p_1, \dots, p_k)$ языка $\mathcal{L}_{\in, \triangleleft}$ с параметрами $p_1, \dots, p_k \in M$. Пусть n – номер формулы $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ (см. случай 2) выше). Рассмотрим наименьший ординал $\gamma < \lambda$ такой, что $p_1, \dots, p_k \in X_\gamma$ и в случае 2) $\gamma \geq n$. Нетрудно с помощью предложения 1 проверить, что σ_γ – элементарная подструктура $\langle M; \in, \triangleleft \rangle$ по отношению к формуле Φ ; в частности, $\Phi(p_1, \dots, p_k)$ либо одновременно истинна, либо одновременно ложна в σ_γ и $\langle M; \in, \triangleleft \rangle$. Однако, последовательность структур σ_γ определима в $\langle M; \in, \triangleleft, T \rangle$.

Этот же аргумент (т.е. наличие элементарных подструктур модели $\langle M; \in, \triangleleft \rangle$ вида σ_γ) показывает, что отношение $\triangleleft$ сохраняет подстановку в M . Теорема 2 доказана.

5. Ультрафильтр. Продолжая доказательство достаточности в теореме 1, зафиксируем для дальнейшего полный порядок $\triangleleft$ на множестве M , задаваемый теоремой 2. В частности, предполагается, что

- 1) все собственные начальные сегменты M в смысле $\triangleleft$ принадлежат M ;
- 2) пара множеств $\triangleleft$ и $T' = \text{Truth}_{\in, \triangleleft}^M$ сохраняет выделение в M ;

однако, с целью сделать рассуждение пригодным для метаматематического анализа теории IST^+ в п. 7 мы не будем до определенного момента, предполагать, что $\langle M; \in \rangle$ удовлетворяет подстановке.

Нам необходимо построить модель $\mathbf{I} \models \text{IST}^+$ с M в качестве класса всех стандартных множеств. Эта модель будет получена, как *адекватное ультрапроизведение* M по Нельсону [1] (в модификации [2]). Займемся выбором подходящего ультрафильтра.

Через $\text{Def}_{\in, \triangleleft}^M$ обозначим семейство всех множеств $X \subseteq M$, определимых в $\langle M; \in, \triangleleft \rangle$ формулой языка $\mathcal{L}_{\in, \triangleleft}$ с параметрами из M . Положим $I = \mathcal{P}_{\text{fin}}(M) = \{i \subseteq M : i \text{ конечно}\}$ (собственный класс в M) и рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ всех множеств $X \subseteq I$, $X \in \text{Def}_{\in, \triangleleft}^M$.

ЛЕММА 3. Существует ультрафильтр $U \subseteq \mathcal{A}$ такой, что

- а) если $a \in M$, то множество $\{i \in I : a \in i\}$ принадлежит U ;
- б) если $P \subseteq M \times I$, $P \in \text{Def}_{\in, \prec}^M$, то множество

$$\{x \in M : \text{сечение } P_x = \{i : \langle x, i \rangle \in P\} \text{ принадлежит } U\}$$

принадлежит $\text{Def}_{\in, \prec}^M$;

- в) существует определяемое в $\langle M; \in, \prec, \mathbf{T} \rangle'$ множество $\mathcal{U} \subseteq M$ такое, что $U = \{\mathcal{U}_x : x \in M\}$, где $\mathcal{U}_x = \{i \in I : \langle x, i \rangle \in \mathcal{U}\}$ для всех x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство U_0 , состоящее из всех множеств вида

$$I_{a_1 \dots a_m} = \{i \in I : a_1, \dots, a_m \in i\},$$

где $a_1, \dots, a_m \in M$, очевидно, удовлетворяет FIP (*finite intersection property*), т.е. все пересечения конечного числа множеств из U_0 непусты.

Допустим, что уже определено FIP-семейство $U_n \subseteq \mathcal{A}$; через $\chi_n(x, i)$ обозначим n -ю формулу в заранее фиксированном рекурсивном перечислении всех формул $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ с двумя свободными переменными. Положим $U_{n+1} = U_n \cup \{B_x : x \in M\}$, где B_x есть множество

$$A_x = \{i \in I : \langle M; \in, \prec \rangle \models \chi_n(x, i)\},$$

если семейство $U_n \cup \{B_y : y \prec x\} \cup A_x$ все еще удовлетворяет FIP, и $B_x = I \setminus A_x$ в противном случае.

Легко видеть, что $U = \bigcup_n U_n$ – искомый ультрафильтр; условие в) обеспечивается проведением всей конструкции в $\langle M; \in, \prec, \mathbf{T}' \rangle$.

Зафиксируем для дальнейшего такой ультрафильтр $U \subseteq \mathcal{A}$.

Фразу “множество $\{i \in I : \Phi(i)\}$ принадлежит U ” будем записывать в виде $\bigcup i \Phi(i)$ (квантор $\bigcup$ означает “существует U -много”). Тогда согласно выбору U имеем

- а) $\bigcup i (a \in i)$ для всех $a \in M$;
- б) каково бы ни было отношение $P(i, \dots)$ в $\text{Def}_{\in, \prec}^M$, отношение $\bigcup i P(i, \dots)$ также принадлежит $\text{Def}_{\in, \prec}^M$.

6. Модель. Для $r \geq 1$ определим $I^r = I \times \dots \times I$ (r раз I) и

$$F_r = \{f \in \text{Def}_{\in, \prec}^M : f \text{ отображает } I^r \text{ в } M\};$$

положим $I^0 = \{0\}$ и $F_0 = \{\{\langle 0, x \rangle\} : x \in M\}$. Наконец, пусть $F_\infty = \bigcup_{r \in \omega} F_r$. Для $f \in F_\infty$ через $r(f)$ будем обозначать то единственное r , для которого $f \in F_r$.

Допустим, что $f \in F_\infty$, $q \geq r = r(f)$ и $i = \langle i_1, \dots, i_r, \dots, i_q \rangle \in I^q$. В этом случае положим $f[i] = f(\langle i_1, \dots, i_r \rangle)$. В частности, $f[i] = f(i)$ при $r = q$. Кроме того, $f[i] = x$ для всех i , если $f = \{\langle 0, x \rangle\} \in F_0$.

Пусть $f, g \in F_\infty$ и $r = \max\{r(f), r(g)\}$. Определим $f^* = g$, если

$$\bigcup i_r \bigcup i_{r-1} \dots \bigcup i_1 (f[i] = g[i]) \quad (1)$$

(где $i = \langle i_1, \dots, i_r \rangle$, порядок кванторов в формуле (1) является существенным), и $f^* \in g$, $f^* \prec g$ аналогично. Легко проверяется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Отношение $*=$ есть эквивалентность на F_∞ . Отношения $*\in$ и $*\prec$ на F_∞ $*=$ -инвариантны по каждому аргументу.

Пусть $[f] = \{g \in F_\infty : f * = g\}$. Рассмотрим фактормножество $\mathbf{I} = \{[f] : f \in F_\infty\}$. Для $[f], [g] \in \mathbf{I}$ определим $[f] * \in [g]$, если $f * \in g$, и $[f] * \prec [g]$ аналогично. Для $x \in M$ положим $*x = [\{\langle 0, x \rangle\}]$ – образ x в $\mathbf{I}$. Пусть $\mathbf{S} = \{*x : x \in M\}$.

Наконец, определим $\text{st}[f]$ в случае $[f] = *x$ для некоторого $x \in M$.

ТЕОРЕМА 3. Отображение $x \mapsto *x$ есть 1-1-функция из M на $\mathbf{S}$, переводящая $\in$ в $*\in$ и $\prec$ в $*\prec$ соответственно, а элементарное вложение $\langle M; \in, \prec \rangle$ в $\langle \mathbf{I}; * \in, * \prec \rangle$. Кроме того, $\langle \mathbf{I}; * \in, * \prec, \text{st} \rangle$ удовлетворяет идеализации и стандартизации, причем формула Φ в каждой из схем может включать предикат $*\prec$ вместе с $*\in$.

Эта теорема влечет достаточность в теореме 1. В самом деле, допустим, что в дополнение к предположениям в начале п. 4 M – модель **ZFC**. Тогда из теоремы 3 следует, что $\langle \mathbf{I}; * \in, \text{st} \rangle$ – модель **IST**, а вместе с ограничением $*\prec \restriction \mathbf{S}$ порядка $*\prec$ – даже модель **IST**⁺, класс $\mathbf{S}$ стандартных множеств которой изоморфен M .

Доказательство теоремы 3 начнем с определений.

Пусть $\Phi(f_1, \dots, f_m)$ – формула языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ с функциями $f_1, \dots, f_m \in F$ в качестве параметров. Положим $r(\Phi) = \max\{r(f_1), \dots, r(f_m)\}$. Если $r \leq q$ и $i \in I^q$, то через $\Phi[i]$ обозначим формулу $\Phi(f_1[i], \dots, f_m[i])$ (языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ с параметрами из M), а через $[\Phi]$ формулу $\Phi([f_1], \dots, [f_m])$ (с параметрами из $\mathbf{I}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (теорема Лося). Для любой формулы $\Phi = \Phi(f_1, \dots, f_m)$ языка $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ с параметрами $f_1, \dots, f_m \in F$ и условием $r = r(\Phi)$ выполнено

$$\langle \mathbf{I}; * \in, * \prec \rangle \models [\Phi] \iff \bigcup_{i_r} \bigcup_{i_{r-1}} \dots \bigcup_{i_1} (\langle M; \in, \prec \rangle \models \Phi[i])$$

(i обозначает $\langle i_1, \dots, i_r \rangle$ в выделенной строке).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальность состоит в том, что так как индексное множество I является собственным классом в M , полное упорядочение M необходимо для корректности обычного рассуждения по индукции в теореме Лося. Вот почему нам необходим базовый язык $\mathcal{L}_{\in, \prec}$, а не просто $\in$ -язык, и соответственно необходима модель $\langle M; \in, \prec \rangle$, а не просто $\langle M; \in \rangle$, в качестве начальной структуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В сущности, нам остается выполнить проверку идеализации и стандартизации в $\langle \mathbf{I}; * \in, * \prec, \text{st} \rangle$.

Идеализация. Рассмотрим $\mathcal{L}_{\in, \prec}$ -формулу $\Phi(a, x)$ с двумя свободными переменными a, x и функциями из F в качестве параметров. Необходимо доказать, что

$$\forall^{\text{stfin}} A \exists x \forall a \in A [\Phi](a, x) \implies \exists x \forall^{\text{st}} a [\Phi](a, x) \quad (2)$$

в $\mathbf{I}$ (известно [1], что импликация “ $\Leftarrow$ ” в (2) вытекает из других аксиом **IST**). Согласно предложению 3 левая часть (2) влечет

$$\forall_{\text{finite}} A \subseteq M \bigcup_{i_r} \bigcup_{i_{r-1}} \dots \bigcup_{i_1} \exists x \forall a \in A \Phi[\langle i_1, \dots, i_r \rangle](a, x)$$

в M , где $r = r(\Phi)$. Чтобы упростить эту формулу, заметим, что самый левый квантор имеет I в качестве своей области. Следовательно, определив функцию $\alpha \in F_{r+1}$ соотношением $\alpha(i_1, \dots, i_r, i) = i$, получаем

$$\forall i \in I \bigcup_{i_r} \bigcup_{i_{r-1}} \dots \bigcup_{i_1} (\exists x \forall a \in A \Phi)[\langle i_1, \dots, i_r, i \rangle](a, x),$$

откуда следует $\exists x \forall a \in [\alpha] [\Phi](a, x)$ в $\mathbf{I}$ по предложению 3. Теперь по определению предиката st достаточно проверить, что $*x \in [\alpha]$ в $\mathbf{I}$ для любого $x \in M$, иными словами $U_i U_{i_r} \dots U_{i_1} (x \in i)$. Последнее выполнено согласно выбору U .

Стандартизация. Напомним, что U определимо в $\langle M; \in, \prec, T' \rangle$ в смысле условия в) леммы 3. Поэтому модель $\langle \mathbf{I}; * \in, \text{st} \rangle$ также определима в $\langle M; \in, \prec, T' \rangle$. Следовательно, остается проверить, что любое множество $y \subseteq x$, где $x \in M$, определяемое в $\langle M; \in, \prec, T' \rangle$ (разрешены параметры из M), принадлежит M . Но это следует из того, что пара множеств $\prec$ и T' сохраняет выделение в M .

7. Метаматематические свойства теории IST^+ . Покажем, что теории IST^+ и IST относятся к ZFC достаточно одинаково, в частности, IST^+ и ZFC равнонепротиворечивы.

ТЕОРЕМА 4. *Теория IST^+ является консервативным расширением теории ZFC в том смысле, что любая замкнутая $\in$ -формула выводима в IST^+ в том и только том случае, когда она выводима в ZFC .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что предложение φ $\in$ -языка является теоремой IST^+ , и докажем, что φ выводится также и в ZFC . Пусть Φ – тот конечный фрагмент IST^+ , который участвует в выводе φ . Следующее рассуждение является выводом φ в ZFC .

Зафиксируем предельный ординал λ такой, что $M = V_\lambda$ удовлетворяет всем тем примерам подстановки, которые имеются в Φ , и дополнительно является элементарной подмоделью универсума относительно нашей формулы φ . Пусть $\prec$ – любое полное упорядочение M , обладающее тем свойством, что любой начальный сегмент M в смысле $\prec$ принадлежит M . В этом случае, поскольку M содержит все подмножества множеств из M , мы находимся в ситуации, описанной в начале п. 5. Значит, существуют структура $\langle \mathbf{I}; * \in, * \prec, \text{st} \rangle$ и вложение $x \mapsto *x$ из M в $\mathbf{I}$, удовлетворяющие теореме 3.

Тогда структура $\langle \mathbf{I}; * \in, * \prec \restriction \mathbf{S}, \text{st} \rangle$ является моделью Φ , т.е. формула φ истинна в $\langle \mathbf{I}; * \in \rangle$. Следовательно, φ истинна и в M , а значит, и в универсуме согласно выбору M .

8. О некоторых других расширениях IST . Метод расширения IST , использованный нами для построения теории IST^+ , предоставляет средства, минимально достаточные для рассуждения, проведенного в п. 6. Однако, достаточность в теореме 1 распространяется и на некоторые более сильные и, пожалуй, более естественные усиления IST . Остановимся на двух из них.

Определим IST' как расширение IST в языке $\mathcal{L}_{\in, \text{st}}$ при помощи всего одной аксиомы:

существуют множество D и отношение полного порядка $<$ на D такие, что $\mathbf{S} \subseteq D$ и $<$ -наименьший элемент любого стандартного множества стандартен.

Понятно, что IST' влечет IST^+ , т.е. необходимость в теореме 1 сохраняет силу и для IST' . Чтобы разобраться с достаточностью, рассмотрим еще одну теорию.

Напомним, что ZF GC (или ZF плюс *Global Choice*) есть расширение ZFC в языке $\mathcal{L}_{\in, <}$ посредством аксиомы:

отношение $<$ вполне упорядочивает класс всех множеств, и любой начальный сегмент в смысле $<$ есть множество.

При этом $<$ может участвовать в схемах выделения и подстановки. Обозначим через IST GC теорию, которую можно назвать *IST -расширением ZF GC* , т.е. теорию в язы-

ке $\mathcal{L}_{\in, <, st}$, включающую **ZF GC** (в языке $\mathcal{L}_{\in, <}$) и схемы идеализации, стандартизации, переноса, в каждой из которых Φ может быть формулой $\mathcal{L}_{\in, <}$ (ср. с определением **IST** в п. 1).

С одной стороны, **IST GC** влечет **IST'**, а значит, и **IST**⁺. С другой стороны, очевидная модификация рассуждения п. 6 показывает, что если в рассмотренной там ситуации дополнительно известно, что $\langle M; \in, < \rangle$ – модель **ZF GC**, т.е. что $<$ сохраняет подстановку в M , то $\langle I; * \in, * <, st \rangle$ является моделью **IST GC**. Отсюда следует, что достаточность в теореме 1 распространяется на теорию **IST GC**, а следовательно, и на **IST'**.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 1165–1198.
- [2] Кановей В.Г. Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Эдварда Нельсона // УМН. 1991. Т. 46. № 6. С. 3–50.
- [3] Hrbáček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math. 1978. V. 98. P. 1–19.
- [4] Kanovei V., Reeken M. Internal approach to external sets and universes. 1 // Studia Logica. 1995. V. 55. № 2. P. 227–235.
- [5] Kanovei V., Reeken M. Mathematics in a nonstandard world // Math. Japon. 1997. V. 45. № 2. P. 369–408; № 3. P. 555–571.
- [6] Kawai T. Nonstandard analysis by axiomatic methods // Southeast Asia Conference on Logic (Singapore 1981). Stud. Logic Found. Math. V. 111. Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 55–76.
- [7] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 University of Wuppertal (Wuppertal, Germany)
 E-mail: kanovei@mech.math.msu.su

Поступило
 16.07.98