Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Козак, О. Н. Новоселов, Асимптотическое поведение решений линейного однородного разностного уравнения второго порядка, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 211–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:54:17

УДК 517.929.2

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Д. Козак, О. Н. Новоселов

Проведен анализ и исследовано асимптотическое поведение (при $n \rightarrow \infty$) общего решения x_n уравнения $x_{n+2} = Ax_n + Bx_{n+1}$, $A \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, при различных возможных величинах коэффициентов и начальных значений.

Библиография: 13 названий.

Постановка задачи. В последнее время в связи с рядом задач из прикладных областей (см., например, [1]) возродился интерес к решению линейных однородных разностных уравнений второго и более высоких порядков. Простейшим из них является уравнение второго порядка (A, B – постоянные коэффициенты)

$$x_{n+2} = Ax_n + Bx_{n+1}, \quad A \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Методы решения линейных разностных уравнений известны [2]–[4], однако исследование уравнения (1) ограничено в известных работах лишь частными решениями, получаемыми при некоторых значениях коэффициентов. К таким решениям относятся: расходящаяся последовательность чисел Фибоначчи [5], сходящиеся (при $n \rightarrow \infty$) последовательности [6] и почти периодическая последовательность [7], иногда называемая *синусоидой Слущкого* [6].

До настоящего времени не были проведены исчерпывающий анализ свойств решений уравнения (1) и сопоставление с известными эффектами в поведении решений нелинейных уравнений (отображений) [8]–[12].

Цель данной работы – провести такой анализ на основе исследования асимптотического поведения (при $n \rightarrow \infty$) общего решения уравнения (1) при различных возможных величинах коэффициентов и начальных значений.

Решение. Опуская выкладки, приводим полученное общее решение уравнения (1)

$$x_n = m \left(\frac{2A}{-B + \sqrt{B^2 + 4A}} \right)^{n+1} + l \left(\frac{2A}{-B - \sqrt{B^2 + 4A}} \right)^{n+1} \quad \text{при } B^2 + 4A \neq 0, \quad (2)$$

$$m = \frac{(\sqrt{B^2 + 4A} - B)(x_1 - Bx_0) + 2Ax_0}{2A\sqrt{B^2 + 4A}}, \quad l = \frac{(\sqrt{B^2 + 4A} + B)(x_1 - Bx_0) - 2Ax_0}{2A\sqrt{B^2 + 4A}};$$

$$x_n = \left(\frac{B}{2} \right)^{n-1} \left((x_1 - Bx_0)n + \frac{B}{2}x_0(n+1) \right) \quad \text{при } B^2 + 4A = 0. \quad (3)$$

Анализ решения (2), (3) показал, что все фазовое пространство состояний уравнения (1), представляющее собой плоскость в системе координат (A, B) , можно разделить на несколько областей (рис. 1). Область $G1$, состоящую из внутренних точек треугольника, образованного пересечением прямых $B = 1 - A$, $B = A - 1$, $A = -1$. Область $G2$, состоящую из точек, лежащих вне треугольника. Область $G3$, состоящую из точек, лежащих на границе треугольника, являющейся отрезком прямой $B = 1 - A$, $-1 < A \leq 1$ (см. прямую 1 на рис. 1). Область $G4$, состоящую из точек, лежащих на границе треугольника, являющейся отрезком прямой $B = A - 1$, $-1 < A \leq 1$ (см. прямую 2 на рис. 1). Область $G5$, состоящую из точек, лежащих на границе треугольника, являющейся отрезком прямой $A = -1$, $-2 < B < 2$ без граничных точек $B = \pm 2$ (см. прямую 3 на рис. 1).

Рис. 1

Решения уравнения (1) с параметрами (A, B) из области $G1$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Исключением из этой области являются решения со значениями A, B , лежащими на отрезке прямой $B = 0$, $0 < A \leq 1$ при начальных значениях $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. В этом случае предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не существует:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ nA & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Решения, относящиеся к области $G2$, расходятся:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty.$$

Решения, относящиеся к области $G3$, за исключением точек с абсциссами $A = -1, 0, 1$, сходятся к предельному значению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{(1 - B)x_0 + x_1}{B - 2},$$

зависящему от начальных значений x_0, x_1 и величины B . При $A = -1, B = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \begin{cases} |q| & \text{при } x_0 = x_1 = q, \\ \infty & \text{при } x_0 \neq x_1. \end{cases}$$

При $A = 1, B = 0$ последовательность x_n образует 2-цикл со значениями

$$x_n = \begin{cases} x_0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ x_1 & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Решения, относящиеся к области $G4$, за исключением точек с абсциссами $A = -1, 0, 1$, образуют 2-цикл со значениями

$$x_n = \pm \frac{(B + 1)x_0 + x_1}{B - 2}.$$

Теперь исследуем решения в области $G5$. Для этой области $A = -1, |B| < 2, \sqrt{B^2 + 4A} = i\sqrt{4 - B^2}$ ($i = \sqrt{-1}$). Сделав замену $B = 2 \cos \alpha$, приведем решение (2) к виду

$$x_n = u \cos(n + 1)\alpha + v \sin(n + 1)\alpha, \quad (4)$$

где

$$u = m + l = Bx_0 - x_1, \quad v = i(m - l) = \frac{-B(Bx_0 - x_1) + 2x_0}{\sqrt{4 - B^2}}$$

имеют только действительные значения.

Исследуем поведение решения (4) при $n \rightarrow \infty$, для чего образуем конечную разность

$$\Delta x_{n+k} = x_{n+k} - x_n = \left(v \cos(2n + 2 + k) \frac{\alpha}{2} - u \sin(2n + 2 + k) \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{k\alpha}{2}. \quad (5)$$

Возможны три типа решений:

- 1) образующее k -цикл, если $\Delta x_{n+k} = 0$;
- 2) образующее предельный k -цикл, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x_{n+k} = 0$;
- 3) *псевдошумовое*, если $|\Delta x_{n+k}| < \infty$, но ни одно из предыдущих равенств не выполняется.

Псевдошумовыми называются колебания, которые, обладая рядом признаков шума (непериодические, незатухающие, немонотонные со значениями, всюду плотно распределенными на ограниченном интервале), характеризуются детерминированной, а не статистической (как у шума) зависимостью между последовательными значениями. В данном случае эта зависимость задана детерминированным уравнением (1) с коэффициентами из области $G5$.

Установим, при каких значениях параметров α, u, v уравнения (4) существуют указанные решения. Приравнявая (5) к 0 и решая полученное уравнение, найдем, что для любого целого $k > 2$ существует, причем не единственное, значение $\alpha = 2\pi s/k$ ($s \neq 0$, $s \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел) и соответствующее ему значение $B = 2 \cos(2\pi s/k)$, при котором последовательность (4), или в исходной записи (2), образует k -цикл. Множество значений B , образующих все возможные k -циклы ($k > 2$), соответствует множеству рациональных чисел s/k ($s \neq 0$). Для всех значений $\alpha = 2\pi q$, где $q \neq s/k$ и, следовательно, является числом *иррациональным*, последовательность (4) не является циклической и не имеет предельного цикла.

Из (5) очевидно, что $|\Delta x_{n+k}| < \infty$ и, следовательно, значения Δx_{n+k} распределены на некотором ограниченном интервале ΔX . Преобразуем (5) к виду

$$\Delta x_{n+k} = v^* \cos(2n\pi q + \varphi_0) - u^* \sin(2n\pi q + \varphi_0), \quad (6)$$

где $\varphi_0 = (2+k)\alpha/2$, $v^* = v \sin(k\alpha/2)$, $u^* = u \sin(k\alpha/2)$.

При $q > 0$, $n \rightarrow \infty$ все значения функций $\cos(2n\pi q + \varphi_0)$ и $\sin(2n\pi q + \varphi_0)$ определены на интервале $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ своего аргумента $\varphi_n = 2n\pi q + \varphi_0$. Из теоремы Вейля [13] следует, что если $q > 0$ – иррациональное число, то дробная часть последовательности nq всюду плотно распределена на интервале $[0, 1)$. Следовательно, значения φ_n всюду плотно распределены на интервале $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ и ввиду непрерывности функций $\cos \varphi_n$ и $\sin \varphi_n$ значения Δx_{n+k} , определенные согласно (6), всюду плотно распределены на соответствующем интервале ΔX . Аналогичный результат получим при $q < 0$ для интервала $(-1, 0]$. В сочетании со свойствами последовательности (4), установленными выше, это означает, что при иррациональных значениях $|q| \in (0, 1)$ и соответствующих им значениях $B = 2 \cos 2\pi q$, $|B| < 2$, траектория последовательности (4) имеет характер *псевдошумового* колебания.

Некоторые сопоставления. Уравнению (1) с позиций теории точечных отображений [8], [9] эквивалентно линейное отображение плоскости в себя, которое, как было показано, содержит множество решений (последовательностей x_n) с любыми циклами, в том числе с *нечетными*, которые ранее считались спецификой нелинейных отображений и в силу ряда известных теорем [9], [10] служили необходимым условием существования хаотических аттракторов. Например, при $A = B = -1$ в решении уравнения (1) имеет место 3-цикл, однако в отличие от нелинейного уравнения [10] хаос линейное уравнение не рождает.

Выше установлены условия существования *псевдошумовых* решений, которые некоторыми своими свойствами похожи на хаотические последовательности, однако в отличие от них образуются на основе линейных композиций почти периодических тригонометрических функций, что согласуется с [7].

При непрерывном изменении значения параметра B в области $G5$ от -2 до 2 решение уравнения претерпевает *бифуркации* взаимосмен циклических и псевдощумовых колебаний, однако бифуркации типа бесконечного удвоения цикла для решения линейного уравнения не свойственны в отличие от решений многих нелинейных уравнений, где они образуют один из сценариев перехода к хаосу [9].

Отметим также, что все решения типа незатухающих колебаний относятся к точкам фазового пространства, лежащим на окаймлении области сходящихся решений (на рис. 1 это границы треугольника).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
- [2] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
- [3] Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969.
- [4] Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1973.
- [5] Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. М.: Радио и связь, 1984.
- [6] Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976.
- [7] Slutsky E. The summation of random causes as the source of cyclic processes // *Econometrica*. 1937. V. 5. P. 105.
- [8] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [9] Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989.
- [10] Li T.-Y., Yorke J. A. Period three implies chaos // *Amer. Math. Monthly*. 1975. V. 82. № 10. P. 985–992.
- [11] Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
- [12] Tsonis A. A. Chaos. From Theory to Applications. New York–London: Plenum, 1992.
- [13] Вейль Г. Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1947.

Московский государственный университет леса
E-mail: onn@mgul.ac.ru

Поступило
12.11.96
Исправленный вариант
08.06.98