Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О фундаментальных классах гомологий вещественного алгебраического многообразия, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 216–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:05:50

УДК 512.66+512.73

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ КЛАССАХ ГОМОЛОГИЙ ВЕЩЕСТВЕННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Краснов

Доказано, что между классами гомологий, определенных вещественными точками специального вещественного алгебраического многообразия, может существовать только одно соотношение. Это соотношение равно сумме всех классов гомологий.

Библиография: 4 названия.

Введение. Далее X – неособое вещественное проективное многообразие. Пусть $X_1, \dots, X_s$ – компоненты связности множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$. Они определяют классы гомологий $[X_1], \dots, [X_s] \in H_n(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, где $n = \dim X$. Возникает вопрос, какие соотношения существуют между этими классами гомологий? Для кривой может быть только одно соотношение, а именно: $[X_1] + \dots + [X_s] = 0$, т.е. $[X(\mathbb{R})] = 0$. В работе [1] показано, что для поверхности с $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ также может быть только одно соотношение $[X(\mathbb{R})] = 0$. С помощью эквивариантных когомологий аналогичное утверждение было доказано в [2] для полных пересечений произвольной размерности. В данной заметке мы обобщаем сформулированное выше утверждение на класс “специальных” многообразий. Мы называем многообразие X *специальным*, если отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: A^{<n/2}(X) \rightarrow H^{<n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

эпиморфно, где $A^{<n/2}(X)$ – прямая сумма групп Чжоу $A^q(X)$ при $q < n/2$, а $H^{<n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ – прямая сумма групп когомологий $H^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ при $p < n$.

ТЕОРЕМА. Если X – специальное многообразие, то среди классов гомологий $[X_1], \dots, [X_s] \in H_n(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ может быть только одно соотношение $[X(\mathbb{R})] = 0$.

Заметим, что из этой теоремы вытекают сформулированные ранее утверждения о кривой, поверхности и полном пересечении. Доказательство теоремы, изложенное в данной заметке, использует эквивариантные когомологии и отображения цикла. Именно, применение отображений цикла позволило обобщить результат в [2].

1. Эквивариантные когомологии и отображения цикла. Рассмотрим кольцо эквивариантных когомологий

$$H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

где $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа. Оно является алгеброй над кольцом многочленов

$$H^*(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) = H^*(G, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[t],$$

где pt – одноточечное пространство, t – образующая группы $H^1(G, \mathbb{F}_2)$. Заметим, что структурный гомоморфизм

$$H^*(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

индуцирован отображением $X(\mathbb{C}) \rightarrow \text{pt}$. Рассмотрим три гомоморфизма:

$$\begin{aligned}\alpha^* &: H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \\ \beta^* &: H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2), \\ \text{cl}^* &: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),\end{aligned}$$

где α^* – гомоморфизм забывания вещественной структуры, β^* – гомоморфизм ограничения, $A^*(X)$ – кольцо Чжоу и cl^* – отображение цикла. Гомоморфизмы α^* , cl^* являются гомоморфизмами колец, а β^* есть гомоморфизм $\mathbb{F}_2[t]$ -алгебр. Заметим, что

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

а гомоморфизм умножения на t

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

является вложением прямой суммы в прямую сумму, т.е. $t \cup a = a$, где $a \in H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Пусть $n = \dim X$. Обозначим через $K^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ ядро гомоморфизма

$$\alpha^n : H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Тогда выполняется равенство

$$K^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = t \cup H^{n-1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (1)$$

Это равенство вытекает из спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2), \quad (2)$$

так как гомоморфизм α^n является ее краевым гомоморфизмом. Пусть $2q < n$. Тогда $t^{n-2q} \cup \text{cl}^q(A^q(X))$ является подгруппой $K^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Этот факт вытекает из равенства (1). Обозначим через $K_{\text{alg}}^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ сумму подгрупп $t^{n-2q} \cup \text{cl}^q(A^q(X))$ при $2q < n$. Если X – специальное многообразие, то выполняется равенство

$$K_{\text{alg}}^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = K^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (3)$$

Это равенство вытекает из определения специального многообразия и спектральной последовательности (2). В работе [3] была вычислена композиция гомоморфизмов

$$\beta^{2q} \circ \text{cl}^q: A^q(X) \rightarrow H^{2q}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^{2q} H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

а именно: если $\text{cl}_{\mathbb{R}}^q: A^q(X) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – вещественное отображение цикла, то

$$\beta^{2q} \circ \text{cl}^q = \text{Sq} \circ \text{cl}_{\mathbb{R}}^q, \quad (4)$$

где Sq – полный квадрат Стиррода. Через

$$\beta^{n,0}: H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

обозначим композицию гомоморфизма β^n с проекцией

$$\bigoplus_{k=0}^n H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Тогда из (4) вытекает равенство

$$\beta^{n,0}(K_{\text{alg}}^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)) = \mathbb{F}_2 \cdot x^0, \quad (5)$$

где $x^0 \in H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – класс когомологий, который на каждом одноточечном цикле принимает значение 1. Для специального многообразия из (3), (5) получаем равенство

$$\beta^{n,0}(K^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)) = \mathbb{F}_2 \cdot x^0. \quad (6)$$

2. Доказательство теоремы. Компоненты $X_1, \dots, X_s$ определяют классы когомологий $[X_1]^*, \dots, [X_s]^* \in H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, которые мы будем обозначать через $x_1, \dots, x_s$. Необходимо показать, что среди классов когомологий $x_1, \dots, x_s$ может быть только одно соотношение $x_1 + \dots + x_s = 0$. Компоненты $X_1, \dots, X_s$ определяют также эквивариантные классы когомологий $[X_1, G]^*, \dots, [X_s, G]^* \in H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ (см. [3], [4]), мы будем обозначать их через $x_1, \dots, x_s$. При гомоморфизме забывания вещественной структуры

$$\alpha^n: H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

эквивариантные классы когомологий $x_1, \dots, x_s$ переходят в обычные классы когомологий $x_1, \dots, x_s$. При гомоморфизме ограничения

$$\beta^n: H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{i=1}^s H^*(X_i, \mathbb{F}_2)$$

эквивариантный класс когомологий x_i переходит в полный класс Штифеля–Уитни $w(X_i) \in H^*(X_i, \mathbb{F}_2)$ (см. [3]). Поэтому выполняется равенство

$$\beta^{n,0}(x_i) = x_i^0, \quad (7)$$

где $x_i^0 \in H^0(X_i, \mathbb{F}_2)$ – класс когомологий, который на каждом одноточечном цикле на X_i принимает значение 1. Далее будем рассуждать от противного. Предположим, что существует соотношение $x_{i_1} + \dots + x_{i_r} = 0$, где $r < s$. Тогда

$$x_{i_1} + \dots + x_{i_r} \in K^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

а в силу равенства (6) получаем

$$\beta^{n,0}(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) = 0 \quad \text{или} \quad \beta^{n,0}(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) = x^0.$$

Однако, из формулы (7) имеем равенство

$$\beta^{n,0}(x_{i_1} + \dots + x_{i_r}) = x_{i_1}^0 + \dots + x_{i_r}^0,$$

правая часть которого не равна 0. Осталось заметить, что из условия $r < s$ следует неравенство $x_{i_1}^0 + \dots + x_{i_r}^0 \neq x^0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харламов В. М. Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 4. С. 55–68.
- [2] Краснов В. А. О классах гомологий, определенных вещественными точками вещественного алгебраического многообразия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 2. С. 282–302.
- [3] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
- [4] Краснов В. А. О классах когомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической ГМ-поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 210–221.

Ярославский государственный университет

Поступило
06.03.98