Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Олесов, О применении конформных отображений к неравенствам для тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 396–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:55:01

УДК 512.62+517.54

О ПРИМЕНЕНИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ К НЕРАВЕНСТВАМ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

А. В. Олесов

В работе получены неравенства для тригонометрических и алгебраических полиномов, дополняющие и усиливающие классические результаты, восходящие к работам С. Н. Бернштейна и И. И. Привалова. Метод доказательства основан на построении по заданному тригонометрическому полиному конформного и однолистного отображения и на применении к этому отображению результатов геометрической теории функций комплексного переменного.

Библиография: 9 названий.

Введение. В данной работе устанавливается ряд точных неравенств для тригонометрических полиномов

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kz + b_k \sin kz), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad a_n^2 + b_n^2 \neq 0, \quad (1)$$

удовлетворяющих условию

$$|s_n(x)| \leq 1, \quad -\omega \leq x \leq \omega, \quad (2)$$

при некотором $0 < \omega < \pi$. В частности, для каждого комплексного z указывается область, содержащая образ $s_n(z)$, ограниченная эллипсами и зависящая только от z, ω, n и коэффициентов a_n, b_n (теорема 1). Получена оценка величины $|s'_n(x)|$ на интервале $(-\omega, \omega)$, усиливающая результаты И. И. Привалова [1] и В. С. Виденского [2]. Эта теорема обобщает результат В. Н. Дубинина [3, с. 56] для всего периода и, тем самым, представляет собой усиление классического неравенства Бернштейна–Сегё. Также усиливается и обобщается известный результат для коэффициентов тригонометрических полиномов, а именно: тригонометрический полином вида (1) не может при всех вещественных значениях оставаться по модулю меньше, чем $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (теорема 3). В качестве следствий основных теорем приводится ряд неравенств для алгебраических полиномов, дополняющих и усиливающих классические результаты, восходящие к работам С. Н. Бернштейна и П. Л. Чебышева.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00028.

В п. 1 данной статьи вводится ряд вспомогательных функций, среди которых конформное и однолистное отображение $w = f(\zeta)$, строящееся по заданному тригонометрическому полиному и играющее в работе ключевую роль. В п. 2 приводятся основные результаты, полученные путем применения к указанному конформному отображению результатов геометрической теории функций комплексного переменного. Данный подход к получению неравенств для полиномов был предложен Дубининым в работах [3], [4].

1. Некоторые конформные отображения. В этом пункте мы рассмотрим ряд вспомогательных аналитических функций и их свойства, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Для фиксированного ω , $0 < \omega < \pi$, определим функцию

$$\xi = \varphi(w) := -i \sin \omega \Psi \left(i \frac{w + \sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} \right) + \cos \omega, \quad |w| > 1. \quad (3)$$

Здесь и ниже

$$\Psi(w) = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$$

– функция Жуковского. Используя свойство функции Жуковского конформно и однолистно переводить внешность (а также внутренность) окружности, проходящей через точки ± 1 на внешность соответствующей круговой дуги [5, с. 311], легко убедиться в том, что функция (3) конформно и однолистно отображает область $|w| > 1$ на внешность дуги

$$\bar{\gamma} = \{\xi = e^{ix} : -\omega \leq x \leq \omega\},$$

причем бесконечность переходит в бесконечность. Напомним также, что при отображении функцией $\Psi(w)$ образом окружности $|w| = r$ является эллипс с фокусами в точках ± 1 и большей осью равной $r + 1/r$.

Преобразуя (3), получим

$$\varphi(w) = w \frac{1 + w \sin(\omega/2)}{w + \sin(\omega/2)}. \quad (4)$$

Подстановкой в (4) нетрудно проверить справедливость равенства

$$\psi(\xi) = -\psi\left(\frac{1}{\xi}\right)\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}_\xi \setminus \{\bar{\gamma} \cup \{0\}\}, \quad (5)$$

где $w = \psi(\xi)$ – функция, являющаяся обратной к $\varphi(w)$. Из (3) для данной функции получим следующее представление:

$$\psi(\xi) = -i \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \tilde{\Phi}\left(i \frac{\xi - \cos \omega}{\sin \omega}\right) - \sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \xi \in \mathbb{C}_\xi \setminus \bar{\gamma}, \quad (6)$$

где регулярная ветвь функции $\tilde{\Phi}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ выбирается на плоскости с круговым разрезом $\{z : z = i(\xi - \cos \omega)/\sin \omega, \xi \in \bar{\gamma}\}$ из условия $\tilde{\Phi}(\infty) = \infty$.

Обозначим через $w = \Phi(z)$ функцию, определенную на внешности отрезка $[-1, 1]$, являющуюся обратной к функции Жуковского $\Psi(w)$, $|w| > 1$. Из равенства $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ находим

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}. \quad (7)$$

Пусть тригонометрический полином $s_n(z)$ вида (1) удовлетворяет неравенству (2) и пусть

$$Q_n(\xi) = \sum_{k=0}^n (a_k - ib_k) \xi^k.$$

Поскольку $s_n(x) = \operatorname{Re} Q_n(e^{ix})$, $-\pi \leq x \leq \pi$, при всех комплексных z имеет место равенство $s_n(z) = \rho(e^{iz})$, в котором

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \left[Q_n(\xi) + \overline{Q_n\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right].$$

На множестве $G = \{w : |w| > 1, \rho(\varphi(w)) \notin [-1, 1]\}$ определим регулярную функцию $\zeta = F(w)$, полагая в точках w , $\varphi(w) \neq 0$,

$$F(w) = w \frac{\Phi[\rho(\varphi(w))]}{\Phi^n[\delta(\varphi(w))]},$$

где функция $\delta(\xi)$ зависит от параметра $0 < \omega < \pi$ и определяется равенством

$$\delta(\xi) = \frac{2}{1 - \cos \omega} \Psi(\xi) - \frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega}.$$

Пусть $\mathfrak{D}$ – совокупность областей, составляющих множество $G \setminus \{w : |F(w)| = 1\}$. В силу принципа максимума модуля для регулярной функции

$$\left| \frac{w}{\Phi[\delta(\varphi(w))]} \right| < 1, \quad |w| > 1. \quad (8)$$

Отсюда, а также из граничных свойств функции $\Phi[\rho(\varphi(w))]$ следует, что при приближении точки w к границе каждой области из $\mathfrak{D}$ все предельные значения модуля $|F(w)|$ меньше либо равны единице. Более того, $0 < |F'(\infty)| < \infty$. Повторяя доказательство леммы 2.2 [4] по отношению к функции $1/F(1/w)$, убеждаемся, что для любой области $D \in \mathfrak{D}$ выполняется либо $F(D) \cap \{\zeta : |\zeta| > 1\} = \emptyset$, либо $F(D) = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$. Во втором случае существует обратная к $F(w)$ функция $w = f(\zeta)$, однолистно отображающая $|\zeta| > 1$ в область D .

Далее, через $T_n(z)$ обозначается n -й полином Чебышева. Как известно,

$$T_n(z) = \frac{1}{2} [(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n]. \quad (9)$$

Положим

$$t_n(z) = T_n(\delta(e^{iz})). \quad (10)$$

Ясно, что $t_n(x)$ – тригонометрический полином порядка n , удовлетворяющий условию (2). В дальнейшем он играет роль экстремального полинома.

2. Неравенства для полиномов. Всюду ниже приняты обозначения из п. 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть тригонометрический полином $s_n(z)$ вида (1) удовлетворяет неравенству (2). Тогда для любого z вне системы отрезков $[-\omega + 2\pi k, \omega + 2\pi k]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеет место неравенство

$$|s_n(z) - 1| + |s_n(z) + 1| \leq 2\Psi \left[\frac{\beta_{\lambda, r(z)}}{r(z)} |\Phi(t_n(z))| \right] \leq |t_n(z) - 1| + |t_n(z) + 1|. \quad (11)$$

В случае $z = \pm i \operatorname{Ln} \varphi(w)$, $|w| > r_\lambda$, имеем

$$|s_n(z) - 1| + |s_n(z) + 1| \geq 2\Psi \left[\frac{\alpha_{\lambda, r(z)}}{r(z)} |\Phi(t_n(z))| \right] > |t_{n-1}(z) - 1| + |t_{n-1}(z) + 1|. \quad (12)$$

Здесь

$$\lambda = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin^{2n} \left(\frac{\omega}{2} \right), \quad r(z) = |\psi(e^{-iz \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)})|,$$

$\alpha_{\lambda, r(z)}$, $\beta_{\lambda, r(z)}$ — корни уравнений

$$\lambda(r(z) + 1)^2 x = r(z)(x + 1)^2 \quad \text{и} \quad \lambda(r(z) - 1)^2 x = r(z)(x - 1)^2$$

соответственно, лежащие на интервале $(1, r(z)]$;

$$r_\lambda = 2\lambda^{-1} - 1 + 2\sqrt{\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1)}.$$

Знаки равенства в любом из нестрогих неравенств (11), (12) достигаются только для $s_n(z) = \pm t_n(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = f(\zeta)$ — функция из п. 1. Непосредственным вычислением получаем

$$\frac{1}{f'(\infty)} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{F(w)}{w} = (a_n - ib_n) \sin^{2n} \left(\frac{\omega}{2} \right).$$

Откуда с учетом леммы Шварца имеем $|f'(\infty)|^{-1} = \lambda \leq 1$.

Функция $f^*(\zeta) = f'(\infty)/f(1/\zeta)$ в круге $|\zeta| < 1$ однолистка, по модулю меньше, чем λ^{-1} , и представляется степенным рядом $f^*(\zeta) = \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_3 \zeta^3 + \dots$. В классе таких функций известны точные оценки

$$\left(\frac{1 + |\lambda f^*(\zeta)|}{1 + |\zeta|} \right)^2 \leq \left| \frac{f^*(\zeta)}{\zeta} \right| \leq \left(\frac{1 - |\lambda f^*(\zeta)|}{1 - |\zeta|} \right)^2, \quad 0 < |\zeta| < 1. \quad (13)$$

Знак равенства слева или справа в (13), хотя бы в одной точке, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{f^*(\zeta)}{[1 + e^{i\alpha} \lambda f^*(\zeta)]^2} \equiv \frac{\zeta}{(1 + e^{i\alpha} \zeta)^2}, \quad (14)$$

α вещественно (см., например, [4], [6]).

Пусть w , $|w| = r$, $\varphi(w) \neq 0$, есть точка множества $f(|\zeta| > 1)$. Правое неравенство в (13) дает

$$\frac{(|F(w)| - 1)^2}{|F(w)|} \leq \lambda \frac{(r - 1)^2}{r}.$$

Ввиду строгого возрастания функции $y = (x - 1)^2/x$ на промежутке $x > 1$ существует единственный корень $\beta_{\lambda, r}$ уравнения $\lambda(r - 1)^2x = r(x - 1)^2$, лежащий в интервале $(1, r]$. По этой же причине выполняется $|F(w)| \leq \beta_{\lambda, r}$, т.е.

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \leq \frac{\beta_{\lambda, r}}{r} |\Phi^n[\delta(\varphi(w))]| \leq |\Phi^n[\delta(\varphi(w))]|. \quad (15)$$

Если же $w \notin f(|\zeta| > 1)$, то будет выполняться неравенство $|F(w)| \leq 1$, т.е.

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \leq \frac{1}{r} |\Phi^n[\delta(\varphi(w))]| < \frac{\beta_{\lambda, r}}{r} |\Phi^n[\delta(\varphi(w))]|.$$

Таким образом, (15) выполняется при любом w , $|w| > 1$, $\varphi(w) \neq 0$. Делая замену $\varphi(w) = e^{iz}$ и замечая, что ввиду равенств (9), (10)

$$t_n(z) = \Psi\{\Phi^n[\delta(e^{iz})]\}, \quad (16)$$

убеждаемся в справедливости неравенств (11) при $r(z) = |\psi(e^{iz})|$. Переход при необходимости к тригонометрическому полиному $s_n(-z)$ позволяет в (11) брать $r(z) = |\psi(e^{-iz \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)})|$, что имеет смысл в связи с убыванием дроби $\beta_{\lambda, r}/r$ при увеличении r и ввиду равенства (5).

Убедимся теперь в справедливости неравенств (12). Пусть w , $|w| = r > r_\lambda$, $\varphi(w) \neq 0$, есть точка множества $f(|\zeta| > 1)$. Левое неравенство в (13) и строгое возрастание функции $y = (x + 1)^2/x$ на промежутке $x > 1$ дают

$$\frac{(|F(w)| + 1)^2}{|F(w)|} \geq \lambda \frac{(r + 1)^2}{r} > \lambda \frac{(r_\lambda + 1)^2}{r_\lambda} = 4.$$

Следовательно, существует единственный корень $\alpha_{\lambda, r}$ уравнения $\lambda(r + 1)^2x = r(x + 1)^2$, лежащий в интервале $(1, r]$, и для этого корня имеем

$$|F(w)| \geq \alpha_{\lambda, r}. \quad (17)$$

Отсюда, а также из (8)

$$|\Phi[\rho(\varphi(w))]| \geq \frac{\alpha_{\lambda, r}}{r} |\Phi^n[\delta(\varphi(w))]| > |\Phi^{n-1}[\delta(\varphi(w))]|. \quad (18)$$

Покажем теперь, что любая точка w , $|w| > r_\lambda$, принадлежит образу $f(|\zeta| > 1)$. Предположим от противного, что имеет место неравенство

$$r_\lambda < r^* = \inf\{r : r > 1, |F(w)| > 1 \ \forall w, |w| = r\}.$$

На окружности $|w| = r^*$ найдется точка w^* , удовлетворяющая условию

$$|F(w^*)| = 1. \quad (19)$$

С другой стороны, для любой последовательности w_k , $|w_k| > r^*$, $k = 1, 2, \dots$, сходящейся к w^* , из (17) получим

$$|F(w_k)| \geq \alpha_{\lambda, r^*}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что противоречит условию (19). Таким образом, (18) имеет место при любом w , $|w| = r > r_\lambda$, $\varphi(w) \neq 0$. Делая замену $\varphi(w) = e^{iz}$ и переходя при необходимости к тригонометрическому полиному $s_n(-z)$, убеждаемся в справедливости (12) при

$$z = \pm i \operatorname{Ln} \varphi(w), \quad |w| > r_\lambda, \quad (20)$$

и $r(z) = |w|$. Согласно равенству (5), если точка ξ , $|\xi| < 1$, принадлежит образу $\varphi(|w| > r_\lambda)$, то этому образу принадлежит также и $1/\xi$. Следовательно, для любого z , удовлетворяющего условию (20), величина $|\psi(e^{-\operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)iz})|$ больше, чем r_λ , и может быть принята за $r(z)$ в (12). В целесообразности такого выбора нас убеждает неравенство $|\psi(e^{iz \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)})| \leq |\psi(e^{-iz \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)})|$ и возрастание дроби $\alpha_{\lambda, r}/r$ с ростом r на промежутке $r > r_\lambda$.

Приступим к доказательству случая равенства. Докажем сначала, что в случае $\lambda < 1$ функция $f^*(\zeta)$ не может удовлетворять тождеству (14). Действительно, предполагая противное, получим

$$\Psi(e^{-i\alpha} F(w)) \equiv \lambda \Psi(e^{i\beta} w) + \lambda - 1, \quad \beta = \arg(a_n - ib_n) - \alpha, \quad w \in G.$$

Отсюда

$$\rho(\varphi(w)) = \Psi[w^{-1} \Phi^n[\delta(\varphi(w))]] e^{i\alpha} \Phi(\lambda \Psi(e^{i\beta} w) + \lambda - 1).$$

Поскольку $\Phi(z)$ двузначна в точках отрезка $(-1, 1)$ и принимает на нем значения, равные по модулю единице, то учитывая (8), а также однолиственность функции Жуковского во внешности единичного круга, заключаем, что функция, стоящая справа в последнем равенстве, не может быть однозначно и регулярно определена в точках $w = re^{-i\beta}$, $1 < r < \Phi(2\lambda^{-1} - 1)$, но это противоречит определениям функций, стоящих слева.

Если $\lambda = 1$, то согласно лемме Шварца $f^*(\zeta) \equiv \zeta$, при этом неравенства (13) превращаются в равенства. Поскольку равенство справа в (15) возможно только при $\lambda = 1$, заключаем, что знаки равенства в (15) и слева в (18) имеют место лишь при $F(w) \equiv \eta w$, $|\eta| = 1$, откуда

$$s_n(z) = \Psi\{\eta \Phi^n[\delta(e^{iz})]\};$$

но функция, стоящая справа в последнем равенстве, вещественна на $(\pi - \omega, \pi + \omega)$ только при $\eta = \pm 1$. Отсюда с учетом (16) следует равенство $s_n(z) = \pm t_n(z)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях теоремы 1 неравенство (12) справедливо для всех z , удовлетворяющих условию

$$|\operatorname{Im} z| > \ln \left(r_\lambda \frac{1 + r_\lambda \sin(\omega/2)}{r_\lambda + \sin(\omega/2)} \right).$$

Действительно, используя представление (4), нетрудно показать, что

$$\varphi(r_\lambda) = \max\{|\varphi(w)| : |w| = r_\lambda\},$$

после чего остается заметить, что область $|\xi| > \varphi(r_\lambda)$ лежит в образе $\varphi(|w| > r_\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если тригонометрический полином $s_n(z)$ вида (1) удовлетворяет неравенству

$$|s_n(x)| \leq 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (21)$$

то для любого $r > 1$ и любого z , $|\operatorname{Im} z| = \ln r$, выполняется

$$|s_n(z) - 1| + |s_n(z) + 1| \leq 2\Psi(\beta_{\lambda,r} r^{n-1}) \leq 2\Psi(r^n). \quad (22)$$

В случае $r > 2\lambda^{-1} - 1 + 2\sqrt{\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1)}$ имеем

$$|s_n(z) - 1| + |s_n(z) + 1| \geq 2\Psi(\alpha_{\lambda,r} r^{n-1}) > 2\Psi(r^{n-1}). \quad (23)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\beta_{\lambda,r}$ – корень уравнения

$$\lambda(r - 1)^2 x = r(x - 1)^2, \quad 1 < \beta_{\lambda,r} \leq r; \quad (24)$$

$\alpha_{\lambda,r}$ – корень уравнения

$$\lambda(r + 1)^2 x = r(x + 1)^2, \quad 1 < \alpha_{\lambda,r} \leq r. \quad (25)$$

Для тригонометрических полиномов вида

$$s_n(z) = a_n \cos nz + b_n \sin nz, \quad a_n^2 + b_n^2 = 1, \quad (26)$$

нестрогие неравенства в (22), (23) обращаются в равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (22), (23) получаются из неравенств (11), (12) в результате предельного перехода $\omega \rightarrow \pi$. Для доказательства случая равенства проще всего заметить, что тригонометрический полином (26) можно представить в виде $s_n(z) = \Psi(\eta e^{inz})$, $|\eta| = 1$, после чего случай равенства проверяется непосредственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Настоящий результат можно доказать по аналогии с теоремой 1, рассматривая функцию леммы 2.2 работы [4]. Данный способ позволяет установить, что знаки равенства в (22), (23) достигаются только для тригонометрических полиномов вида (26). Отметим также, что неравенство (22) эквивалентно теореме 3.1 работы [4], сформулированной в терминах алгебраических полиномов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если алгебраический полином

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad c_n \neq 0, \quad (27)$$

удовлетворяет неравенству

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (28)$$

то при

$$r > 2\lambda^{-1} - 1 + 2\sqrt{\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1)},$$

образ эллипса $|z - 1| + |z + 1| = 2\Psi(r)$ при отображении $w = P_n(z)$, есть кривая, лежащая вне эллипса $|w - 1| + |w + 1| = 2\Psi(\alpha_{\lambda,r} r^{n-1})$ и внутри эллипса $|w - 1| + |w + 1| = 2\Psi(\beta_{\lambda,r} r^{n-1})$. Здесь $\lambda = |c_n|/2^{n-1}$, $\alpha_{\lambda,r}$ и $\beta_{\lambda,r}$ – корни уравнений (25) и (24) соответственно. Для полинома $T_n(z)$ указанные эллипсы совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из неравенств (22) и (23), примененных к тригонометрическому полиному $s_n(t) = P_n(\cos t)$. Случай равенства проверяется непосредственно.

Отметим, что настоящий результат при комплексных коэффициентах $P_n(z)$ неверен. Что касается оценки сверху, то из неравенств такого типа известно неравенство

$$|P_n(z)| \leq r^n, \quad |z-1| + |z+1| = 2\Psi(r), \quad r > 1,$$

справедливое для любых полиномов, удовлетворяющих (28). Этот результат был установлен Бернштейном на основании принципа максимума [7, с. 74].

Перейдем к вопросу об экстремальной оценке производной тригонометрического полинома на отрезке меньше, чем период. В монографии [1] Привалов установил, что если тригонометрический полином $s_n(z)$ порядка n удовлетворяет неравенству (2), то

$$|s'_n(x)| \leq C_{\omega, \varepsilon} n, \quad -\omega + \varepsilon \leq x \leq \omega - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\omega}{2},$$

где $C_{\omega, \varepsilon}$ — постоянная, зависящая от ω и ε . Виденский [2] уточнил этот результат, показав, что (2) влечет за собой неравенство

$$|s'_n(x)| \leq n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left[\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right]^{-1/2}, \quad -\omega < x < \omega.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Если тригонометрический полином $s_n(z)$ вида (1) удовлетворяет неравенству (2), то

$$|s'_n(x)| \leq \frac{\cos(x/2) \sqrt{1 - s_n^2(x)}}{\sqrt{\sin^2(\omega/2) - \sin^2(x/2)}} \times \left[n - \frac{\Lambda(\omega, x) \cos(\omega/2) (1 - \sin^n(\omega/2) (a_n^2 + b_n^2)^{1/4})}{2 \cos(x/2)} \right], \quad -\omega < x < \omega, \quad (29)$$

где

$$\Lambda(\omega, x) = \left| \Phi \left(i \frac{e^{ix} - \cos \omega}{\sin \omega} \right) \right|.$$

Для тригонометрического полинома $t_n(z)$ неравенство (29) обращается в равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $w = f(\zeta)$ из п. 1. Если точка ζ , $|\zeta| = 1$, является точкой регулярности функции $f(\zeta)$, причем $|f(\zeta)| = 1$, то из правой части (13) предельным переходом получим

$$|f'(\zeta)| \geq \sin^{-n}\left(\frac{\omega}{2}\right) (a_n^2 + b_n^2)^{-1/4}. \quad (30)$$

Если точка w , $|w| = 1$, является точкой регулярности функции $F(w)$ и одновременно лежит на границе области $D \in \mathfrak{D}$ такой, что $F(D) \cap \{\zeta : |\zeta| > 1\} = \emptyset$, то необходимо в этой точке

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} \leq 0.$$

Если $F(D) = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$, то, применяя неравенство (30), заключаем, что в такой точке

$$\frac{\partial|F|}{\partial|w|} = |f'(\zeta)|^{-1} \leq \sin^n\left(\frac{\omega}{2}\right)(a_n^2 + b_n^2)^{1/4}. \quad (31)$$

Таким образом, неравенство (31) выполняется во всех точках единичной окружности за исключением, быть может, конечного числа таких точек.

Далее, под значениями функции $w = \psi(\xi)$ в точках дуги

$$\gamma = \{\xi = e^{ix} : -\omega < x < \omega\}$$

будем понимать значения, получаемые в результате регулярного продолжения этой функции из области $|\xi| > 1$. В точках $w \in \psi(\gamma)$, в которые функции $\Phi[\rho(\varphi(w))]$, $\Phi[\delta(\varphi(w))]$ конформно продолжаются из $|w| > 1$, имеем

$$\frac{\partial|F|}{\partial|w|} = 1 + \left| \frac{\partial}{\partial w} \Phi[\rho(\varphi(w))] \right| - \left| \frac{\partial}{\partial w} \Phi^n[\delta(\varphi(w))] \right|.$$

Полагая $\varphi(w) = e^{ix}$ и учитывая (31), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & |\Phi'[s_n(x)]s'_n(x)\varphi'(\psi(e^{ix}))| \\ & \leq n|\Phi'[\delta(e^{ix})]\delta'(e^{ix})\varphi'(\psi(e^{ix}))| - \left[1 - \sin^n\left(\frac{\omega}{2}\right)(a_n^2 + b_n^2)^{1/4}\right], \end{aligned}$$

откуда после простых преобразований с учетом (7) получаем

$$\frac{|s'_n(x)|}{\sqrt{1 - s_n^2(x)}} \leq n \frac{\cos(x/2)}{\sqrt{\sin^2(\omega/2) - \sin^2(x/2)}} - \frac{1 - \sin^n(\omega/2)(a_n^2 + b_n^2)^{1/4}}{|\varphi'(\psi(e^{ix}))|}. \quad (32)$$

Из (3) и (6) находим

$$\varphi'(\psi(e^{ix})) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \left[1 - \tilde{\Phi}^{-2}\left(i \frac{e^{ix} - \cos \omega}{\sin \omega}\right)\right], \quad (33)$$

откуда не составляет труда убедиться в справедливости равенства

$$|\varphi'(\psi(e^{ix}))| = 2 \left| \tilde{\Phi}\left(i \frac{e^{ix} - \cos \omega}{\sin \omega}\right) \right|^{-1} \frac{\sqrt{\sin^2(\omega/2) - \sin^2(x/2)}}{\cos(\omega/2)}.$$

Для доказательства неравенства (29) остается заметить, что при данном выборе точек w на окружности $|w| = 1$ выполняется

$$\left| \tilde{\Phi}\left(i \frac{e^{ix} - \cos \omega}{\sin \omega}\right) \right| = \Lambda(\omega, x).$$

Случай равенства следует из тождества $F(w) \equiv w$, справедливого для указанных тригонометрических полиномов. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Настоящий результат доказан для вещественных тригонометрических полиномов. Если $s_n(z)$ – тригонометрический полином с комплексными коэффициентами, то для каждого $x \in (-\omega, \omega)$ замена $s_n(x)$ на $e^{i\theta} s_n(x)$, $\theta = -\arg s'(x)$, и подстановка в (29) приводит к усилению неравенства Виденского за счет уменьшения множителя n .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если тригонометрический полином $s_n(z)$ вида (1) удовлетворяет неравенству (21), то

$$|s'_n(x)| \leq (n-1 + (a_n^2 + b_n^2)^{1/4}) \sqrt{1 - s_n^2(x)}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (34)$$

Для доказательства достаточно перейти к пределу $\omega \rightarrow \pi$ в правых частях (32) и (33).

Это неравенство впервые установлено Дубининым в статье [3] и представляет собой усиление неравенства Бернштейна–Сегё.

Хорошо известно замечательное неравенство Бернштейна [7, с. 168] об оценке производной алгебраического полинома $P_n(x)$ степени не выше n внутри данного интервала. Оно имеет вид

$$|P'_n(x)| \sqrt{1-x^2} \leq n \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)|, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Следствие 3 позволяет усилить это неравенство следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если алгебраический полином вида (27) удовлетворяет неравенству (28), то

$$|P'_n(x)| \sqrt{1-x^2} \leq n-1 + \sqrt{\frac{|c_n| \sqrt{1-T_n^2(x)}}{2^{n-1}}}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Равенство достигается для полинома $T_n(z)$ в точках, являющихся его нулями.

Для доказательства достаточно применить неравенство (34) к тригонометрическому полиному

$$s_n(t) = \frac{1}{2} [P_n(\cos(t_0 + t)) - P_n(\cos(t_0 - t))], \quad t_0 = \arccos x,$$

и положить $t = 0$. Случай равенства проверяется непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если тригонометрический полином $s_n(z)$ вида (1) удовлетворяет неравенству (21) и $s_n(x) = 0$ при $x = 0, \pi$, то

$$\left| \frac{s_n(x)}{\sin x} \right| \leq n-1 + (a_n^2 + b_n^2)^{1/4}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Знак равенства достигается для $s_n(z) = \sin nz$ в точках $x = 0, \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что на вещественной оси экстремум дроби $s_n(x)/\sin x$ достигается при $\operatorname{tg} x = s_n(x)/s'_n(x)$, т.е. при $\sin x = s_n(x)/\sqrt{s_n^2(x) + s_n'^2(x)}$, поэтому он не превышает максимума $\sqrt{s_n^2(x) + s_n'^2(x)}$. В свою очередь, из (34) легко вывести неравенство

$$\sqrt{s_n^2(x) + s_n'^2(x)} \leq n - 1 + (a_n^2 + b_n^2)^{1/4}.$$

Случай равенства проверяется непосредственно.

ТЕОРЕМА 3. Если тригонометрический полином $s_n(z)$ порядка $n \geq 2$ вида (1) удовлетворяет неравенству (2), то

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin^{2n} \frac{\omega}{2} \left[1 + \frac{1}{\sin(\omega/2)} \left| \frac{a_{n-1} + ib_{n-1}}{2(a_n + ib_n)} + n \cos^2 \frac{\omega}{2} \right| \right] \leq 1. \quad (35)$$

Равенство имеет место лишь для полиномов $s_n(z) = \pm t_n(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях п. 1 пусть в некоторой проколотой окрестности точки $w = 0$

$$\tilde{F}(w) := \frac{1}{F(1/w)} \equiv w \frac{\Phi^n[\delta(\varphi(1/w))]}{\Phi[\rho(\varphi(1/w))]}$$

и пусть $\Delta(w) = w\tilde{F}'(w)/\tilde{F}(w)$. Для последней функции имеем

$$\Delta(w) = 1 + \frac{\varphi'(1/w)}{w} \left[\frac{\Phi'[\rho(\xi)]\rho'(\xi)}{\Phi[\rho(\xi)]} - n \frac{\Phi'[\delta(\xi)]\delta'(\xi)}{\Phi[\delta(\xi)]} \right], \quad \xi = \varphi\left(\frac{1}{w}\right).$$

Заметим, что $w\varphi(1/w) \rightarrow \varphi'(\infty) = \sin(\omega/2)$ при $w \rightarrow 0$. Учитывая данный факт, а также равенство (7), получим

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\Delta(w) - 1}{w} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi^2}{\sin(\omega/2)} \left[\frac{\rho'(\xi)}{\sqrt{\rho^2(\xi) - 1}} - n \frac{\delta'(\xi)}{\sqrt{\delta^2(\xi) - 1}} \right] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{4 \sin(\omega/2)}{c_n \xi^n} \left[\frac{1}{2} \left(Q'_n(\xi) \xi - \overline{Q'_n(1/\xi)} \right) (\delta(\xi) - [\delta(\xi) - \sqrt{\delta^2(\xi) - 1}]) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(\xi - 1/\xi)}{2 \sin^2(\omega/2)} (\rho(\xi) - [\rho(\xi) - \sqrt{\rho^2(\xi) - 1}]) \right] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{4 \sin(\omega/2)}{c_n \xi^n} \left[\frac{Q'_n(\xi) \xi}{2} \left(\frac{\xi + 1/\xi}{2 \sin^2(\omega/2)} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n\xi}{4 \sin^2(\omega/2)} \left(Q_n(\xi) + \overline{Q_n\left(\frac{1}{\xi}\right)} \right) \right] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(\xi)(\xi - 2 \cos^2(\omega/2)) - n Q_n(\xi)}{\sin(\omega/2) c_n \xi^{n-1}} \\ &= \frac{-c_{n-1} - 2n \cos^2(\omega/2) c_n}{\sin(\omega/2) c_n}, \end{aligned}$$

где $c_k = a_k - ib_k$, $k = n - 1, n$. С другой стороны, используя правило Лопиталя, легко показать, что

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\Delta(w) - 1}{w} = \frac{\tilde{F}''(0)}{2\tilde{F}'(0)},$$

откуда

$$\tilde{F}''(0) = 2\tilde{F}'(0) \frac{-c_{n-1} - 2n \cos^2(\omega/2)c_n}{\sin(\omega/2)c_n}.$$

Обозначим через $\tilde{f}(\zeta)$ функцию, однолиственную в единичном круге $|\zeta| < 1$, являющуюся обратной к $\tilde{F}(w)$. Для этой функции

$$\tilde{f}''(0) = -\tilde{F}''(0)(\tilde{f}'(0))^3 = 2 \frac{c_{n-1} + 2n \cos^2(\omega/2)c_n}{\sin(\omega/2)c_n} (a_n - ib_n)^2 \sin^{4n}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Тогда при $\lambda = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin^{2n}(\omega/2)$ функция $f^*(\zeta) = \tilde{f}(\zeta)/\tilde{f}'(0)$ в круге $|\zeta| < 1$ однолистка, по модулю меньше, чем λ^{-1} , и представляется степенным рядом

$$f^*(\zeta) = \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_3 \zeta^3 + \dots,$$

где $\alpha_2 = [c_{n-1} + 2n \cos^2(\omega/2)c_n] \sin^{2n-1}(\omega/2)$. В этом случае согласно [8, с. 94]

$$|\alpha_2| \leq 2(1 - \lambda), \quad (36)$$

что эквивалентно неравенству (35), примененному к $s_n(-z)$.

Для доказательства случая равенства отметим, что равенство в (36) (см. [8, с. 94]) возможно лишь в случае выполнения тождества (14), но, как было показано при доказательстве теоремы 1, функция $f^*(\zeta)$ удовлетворяет указанному тождеству только при $s_n(z) = \pm t_n(z)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если алгебраический полином вида (27) удовлетворяет неравенству (28), то

$$|c_n| + |c_{n-1}| \leq 2^{n-1}. \quad (37)$$

Для полинома $T_n(z)$ достигается равенство.

Для доказательства в случае $n \geq 2$ достаточно применить (35) к тригонометрическому полиному $s_n(t) = P_n(\cos t)$. При $n = 1$ справедливость (37) очевидна. Случай равенства проверяется непосредственно.

Интересно заметить, что неравенство В. А. Маркова [9]

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq T_n^{(k)}(1), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

справедливое в условиях следствия при $k = n - 1$ эквивалентно неравенству

$$|c_n| + \frac{|c_{n-1}|}{n} \leq 2^{n-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно показать, рассматривая функцию леммы 2.3 работы [4] и анализируя случай равенства в (36), что знак равенства в (37) при $n \geq 2$ имеет место только для полиномов $\pm T_n(z)$. Отметим также, что, используя разложение соответствующей функции $\Delta(w)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $w = 0$, не составляет труда получить рекуррентные формулы для вычисления первых $n + 1$ коэффициентов степенного ряда функции указанной леммы. В связи с этим, можно применить неравенства для коэффициентов разложения соответствующего конформного отображения f^* , отличные от (36); в частности, применение неравенства $|\alpha_2^2 - \alpha_3| \leq 1 - \lambda^2$ [8, с. 94] приводит в условиях следствия к точному неравенству

$$c_n^2 + |nc_n^2 + 4c_nc_{n-2}| \leq 4^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Выражаю глубокую благодарность В. Н. Дубинину за внимательное отношение к моей работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Привалов И. И. Интеграл Коши. Саратов, 1919.
- [2] Виденский В. С. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем чем период // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С. 13–16.
- [3] Дубинин В. Н. Теоремы искажения для полиномов на окружности // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 12. С. 51–60.
- [4] Дубинин В. Н. Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 5. С. 16–43.
- [5] Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
- [6] Лебедев Н. А. Некоторые оценки для функций регулярных и однолистных в круге // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., физ., хим. 1955. № 4. С. 3–21.
- [7] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
- [8] Лебедев Н. А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.
- [9] Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.

Морской государственный университет им. Г. И. Невельского, г. Владивосток
E-mail: olesov@iam-mail.febras.ru

Поступило
21.07.2003