Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ш. Оманадзе, О некоторых сводимостях и разбиениях рекурсивно перечислимых множеств, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 220–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:43:47

УДК 510.5

О НЕКОТОРЫХ СВОДИМОСТЯХ И РАЗБИЕНИЯХ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

Р. Ш. Оманадзе

В работе доказано, что существует рекурсивно перечислимая (РП) T -степень a такая, что никакое РП полурекурсивное множество $A \in a$ не обладает Q -универсальным свойством разбиения. В каждой нерекурсивной РП контигуальной степени существует РП множество A такое, что A имеет универсальное свойство T - Q -редукции, но A не является T - Q -максимальным множеством. В каждой нерекурсивной РП W -степени существует РП множество A такое, что A имеет универсальное свойство W - sQ -редукции, но A не является W - sQ -максимальным множеством. Каждое креативное множество является частично полумаксимальным множеством.

Библиография: 21 название.

Рекурсивно перечислимое (РП) разбиение РП множества A – это пара РП множеств B и C такая, что $A = B \cup C$ и $B \cap C = \emptyset$. Если B и C является разбиением множества A , то будем писать $A = B \sqcup C$. Пусть $A = B \sqcup C$ и B, C – нерекурсивные РП множества, тогда пара B и C называется *нетривиальным разбиением множества A* . Если $A = B \sqcup C$, то $\deg_T(A) = \deg_T(B) \cup \deg_T(C)$. Поэтому РП разбиение является весьма полезным понятием для исследования структуры РП степеней.

РП множество A имеет *универсальное свойство разбиения* (УСР) [1], [2], если для любого РП множества $D \leq_T A$ существует разбиение $A = B \sqcup C$ множества A такое, что $B \equiv_T D$. Лерман и Реммел [1], [2] показали, что ниже каждой нерекурсивной РП степени существуют как степени, все РП множества которых не обладают УСР, так и степени, содержащие множества с УСР. Кроме того, если A, B – РП множества, $A <_T B$, то существует РП множество C такое, что $A <_T C <_T B$ и C не обладает УСР. Последний результат обобщил Довней [3] и показал, что в каждой нерекурсивной РП T -степени содержится РП множество, не имеющее УСР.

РП множество A имеет *сильное универсальное свойство разбиения* [4], если для всех РП множеств B_0, B_1 таких, что $A \equiv_T B_0 \oplus B_1$, существует разбиение $A = A_0 \sqcup A_1$ множества A такое, что $A_0 \equiv_T B_0$ и $A_1 \equiv_T B_1$. Амбос-Спаис и Фейер [4] изучили алгебраические свойства T -степеней РП множеств, обладающих (сильно) универсальным свойством разбиения, и получили ряд интересных результатов.

В работе [5] были введены интересные понятия полумаксимального и частично полумаксимального множеств. Довней и Стоб [5] доказали, что если A, B – полумаксимальные множества, то существует $\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{E})$ такой, что $\Phi(A) = B$, а если A – час-

точно полумаксимальное множество, то существуют $B \equiv_T \emptyset'$ и $\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{E})$ такие, что $\Phi(A) = B$, где $\text{Aut}(\mathcal{E})$ есть группа автоморфизмов решетки РП множеств $\mathcal{E}$.

В данной работе доказывается, что существует РП T -степень a такая, что никакое РП полурекурсивное множество $A \in a$ не обладает Q -универсальным свойством разбиения. В каждой нерекурсивной РП континуальной степени существует РП множество A такое, что A имеет универсальное свойство T - Q -редукции, но A не является T - Q -максимальным множеством. В каждой $\neq 0$ РП W -степени существует РП множество A такое, что A имеет универсальное свойство W - sQ -редукции, но A не является W - sQ -максимальным множеством. Исследуется разбиение креативного множества и показано, что каждое креативное множество является частично полумаксимальным множеством, что является ответом на вопрос из работы [5]. Все множества, рассматриваемые в данной работе, являются РП множествами.

Все понятия и обозначения, используемые и не определяемые в этой работе, можно найти в [6], [7].

Пусть r – некоторая сводимость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. РП множество A имеет r -универсальное свойство разбиения (r -УСР), если для каждого РП множества $B \leq_r A$ существует РП разбиение $A = A_0 \sqcup A_1$ множества A такое, что $A_0 \equiv_r B$.

Пусть $\varphi_0^B, \varphi_1^B, \dots$ – нумерация функций, рекурсивных относительно B ; C_A – характеристическая функция множества A ; $\{D_z\}$ – каноническая нумерация семейства всех конечных подмножеств множества $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Говорят, что $A \leq_W B$, если существует z такое, что $C_A(x) = \varphi_z^B(x)$, и все те числа, вопросы о принадлежности или непринадлежности которых множеству B использовались при вычислении $\varphi_z^B(x)$, содержатся в $D_{f(x)}$, где f – общерекурсивная функция (ОРФ).

Говорят, что $A \leq_Q B$, если существует ОРФ f такая, что

$$(\forall x)(x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B).$$

Если, кроме того, существует ОРФ g такая, что

$$(\forall x)(\forall y)(y \in W_{f(x)} \implies y < g(x)),$$

то $A \leq_{sQ} B$.

Если $A \leq_{sQ} B$ и существует фиксированное число $n \in \omega$ такое, что

$$(\forall x)(|W_{f(x)}| < n),$$

то $A \leq_{bsQ} B$.

В работах [1] и [4] были введены понятия: универсальное свойство W -редукции и W -максимальное множество. Аналогичные понятия естественным образом определяются и для других сводимостей.

Говорят, что R -сводимость слабее r -сводимости (а r сильнее R), если $A \leq_r B \implies A \leq_R B$ для всех $A, B \subseteq \omega$.

Пусть R -сводимость слабее r -сводимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. РП множество A назовем R - r -максимальным, если

$$(\forall B \text{ РП})(B \leqslant_R A \implies B \leqslant_r A).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. РП множество A имеет универсальное свойство R - r -редукции, если

$$(\forall B \text{ РП})(\exists A_0 \text{ РП})(B \leqslant_R A \implies A_0 \equiv_r B \ \& \ A_0 \leqslant_r A).$$

Из теоремы 3.5 и следствия 2.10 работы [8] получается, что если РП T -степень c такая, что $c' = 0'$, то существуют РП T -степень $a \geqslant c$ и РП множество $A \in a$ такие, что для каждого РП множества $B \leqslant_T A$ с бесконечным дополнением существует разбиение $A = A_0 \sqcup A_1$ такое, что $A_0 \equiv_m B$. Таким образом, существует РП множество, обладающее r -универсальным свойством разбиения, где r – произвольная сводимость, промежуточная между m - и T -сводимостями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [9]). Пусть $A = B \sqcup C$. Тогда $B \leqslant_{bsQ} A$ и $C \leqslant_{bsQ} A$.

СЛЕДСТВИЕ. 1) Если РП множество A обладает T -УСР, то A имеет универсальное свойство T - Q - (T - sQ -, T - bsQ -) редукции.

2) Если РП множество A обладает Q -УСР, то A имеет универсальное свойство Q - sQ -редукции.

3) Если РП множество A обладает W -УСР, то A имеет универсальное свойство W - sQ -редукции.

Множество A называется полурекурсивным [10], если существует двухместная ОРФ g такая, что

$$(\forall x)(\forall y)(g(x, y) \in \{x, y\} \ \& \ (\{x, y\} \cap A \neq \emptyset \implies g(x, y) \in A)).$$

ЛЕММА 1 (см. [11]). Пусть B – полурекурсивное РП множество, $B \neq \omega$, $B \neq \emptyset$, A – РП множество и A сводится по Тьюрингу к B . Тогда A Q -сводится к B .

ЛЕММА 2 (см. [12]). Пусть B – полурекурсивное РП множество, $B \neq \omega$, $B \neq \emptyset$, A – РП множество и A W -сводится к B . Тогда A sQ -сводится к B .

РП T -степень называется контигуальной, если в ней все РП множества W -эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существует РП нерекурсивное множество, которое является одновременно T - Q -максимальным, T - sQ -максимальным, Q - sQ -максимальным и W - sQ -максимальным.

Действительно, пусть a – контигуальная РП T -степень, A – РП полурекурсивное множество и $A \in a$ [10]. Тогда в силу леммы 2 A – искомое множество.

ТЕОРЕМА 1. Пусть a – РП T -степень такая, что существует РП T -степень $b \leqslant a$ и $b' = 0''$. Тогда никакое РП полурекурсивное множество $A \in a$ не обладает Q -универсальным свойством разбиения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть РП T -степень a удовлетворяет условию теоремы, A – РП полурекурсивное множество и $A \in a$ [10]. Допустим, что A обладает Q -универсальным свойством разбиения. Так как по условию теоремы существует РП T -степень $b \leq a$ и $b' = 0''$, то согласно хорошо известному результату Мартина существует максимальное множество M такое, что $M \leq_T A$. Тогда в силу леммы 1 $M \leq_Q A$. Поэтому существует разбиение $A = A_0 \sqcup A_1$ такое, что $M \equiv_Q A_0$. Тогда в силу теоремы 1 [13] $M \leq_m A_0$. Согласно предложению 1 $A_0 \leq_{bsQ} A$, поэтому $M \leq_{bsQ} A$. Но в [14] доказано, что если M – максимальное множество и A – РП полурекурсивное множество, то $M|_{bsQ} A$. Следовательно, $M \not\leq_{bsQ} A$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть M – максимальное множество, A – РП полурекурсивное множество и $M \leq_W A$. Тогда в силу леммы 2 $M \leq_{sQ} A$. Поэтому из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Существует РП полурекурсивное множество, которое не обладает sQ -универсальным свойством разбиения.

РП множество A называется *нигде не простым* [15], если для каждого РП множества B из того, что $B \setminus A$ бесконечно, следует, что существует бесконечное РП множество $W \subseteq B \setminus A$.

ТЕОРЕМА 2. В каждой нерекурсивной РП контигуальной степени существует РП множество A , обладающее универсальным свойством T - Q -редукции и не являющееся T - Q -максимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [15], что в каждой РП T -степени существует нигде не простое множество. Пусть a – нерекурсивная РП контигуальная степень, A – нигде не простое множество, $A \in a$ и A является цилиндром. Если A не является цилиндром, то будем рассматривать множество $A \times \omega$ (так как $A \equiv_m A \times \omega$, то $A \times \omega$ будет нигде не простым множеством). Тогда в силу следствия 1.12 [4] A имеет сильное универсальное свойство разбиения, т.е. для всех РП множеств B_0, B_1 таких, что $A \equiv_T B_0 \oplus B_1$, существует разбиение $A = A_0 \sqcup A_1$ такое, что $A_0 \equiv_T B_0$ и $A_1 \equiv_T B_1$. Пусть $b < a$, B – простое множество и $B \in b$. Тогда существует разбиение $A = A_0 \sqcup A_1$ такое, что $B \equiv_T A_0$. В силу предложения 1 $A_0 \leq_Q A$. Известно [16], что если A – нигде не простое множество, C – РП множество и $C \leq_Q A$, то C – нигде не простое множество. Поэтому $B \not\leq_Q A$.

СЛЕДСТВИЕ. В каждой нерекурсивной РП контигуальной T -степени существует РП множество A , обладающее универсальным свойством T - sQ -редукции и не являющееся T - sQ -максимальным.

ТЕОРЕМА 3. В каждой нерекурсивной РП W -степени существует РП множество A , обладающее универсальным свойством W - sQ -редукции и не являющееся W - sQ -максимальным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – нерекурсивная РП W -степень, $A \in a$ и A – нигде не простое множество [15]. Допустим, что A является цилиндром. В силу следствия 1.8 [4]

A имеет W -сильное универсальное свойство разбиения, т.е.

$$(\forall B_0)(\forall B_1)(A \equiv_W B_0 \oplus B_1 \\ \implies (\exists A_0)(\exists A_1)(A = A_0 \sqcup A_1 \ \& \ A_0 \equiv_W B_0 \ \& \ A_1 \equiv_W B_1)).$$

Известно [17], что в каждой нерекурсивной РП W -степени содержится простое множество. Пусть $b < a$, B – простое множество и $B \in b$. Тогда существует разбиение $A = A_0 \sqcup A_1$ такое, что $B \equiv_W A_0$. В силу предложения 1 $A_0 \leq_{sQ} A$. Но $B \not\leq_{sQ} A$, поскольку B – простое множество, а A – нигде не простое множество.

Автору неизвестно, существует ли РП множество, обладающее универсальным свойством Q - sQ -редукции и не являющееся Q - sQ -максимальным.

Множество A bd -сводится к множеству B , если существуют ОРФ f и число $n \in \omega$ такие, что

$$(\forall x)((x \in A \iff D_{f(x)} \cap B \neq \emptyset) \ \& \ |D_{f(x)}| < n).$$

Дичев [18] доказал, что существует РП bd -степень, в которой содержится бесконечное число попарно s -несравнимых РП множеств. Очевидно, что из s -сводимости следует sQ -сводимость, обратное неверно. Поэтому приводимое ниже предложение является более общим утверждением, чем теорема 2 из работы [18].

РП множество A называется *неускоряемым* [19], если существуют число $i \in \omega$ и ОРФ h такие, что $W_i = A$ и

$$(\forall j)(W_j = A \implies (\forall \tilde{x})(x \in A \implies \Phi_i(x) \leq h(x, \Phi_j(x)))),$$

где Φ_u – частично рекурсивная функция, удовлетворяющая аксиомам Блюма [19], а символом $\forall \tilde{x}$ обозначается выражение “для почти всех x ”.

Если РП множество A не является неускоряемым, то A называется *ускоряемым множеством*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть РП множество A обладает свойством

$$(\forall A_0)(\forall A_1)(A = A_0 \sqcup A_1 \implies A_0 \leq_{bd} A \ \& \ A_1 \leq_{bd} A).$$

Тогда если A ускоряемое или A не является нигде не простым множеством, то в bd -степени множества A содержится бесконечное число попарно sQ -несравнимых РП множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ускоряемое множество A удовлетворяет условию предложения, $A = A_0 \sqcup A_1$, A_0 и A_1 – неускоряемые множества [7]. Известно [12], что если A_0, A_1 – неускоряемые множества, то $A_0 \oplus A_1$ – неускоряемое множество. Поэтому

$$A \equiv_{bd} A_0 \oplus A_1 \ \& \ A_0 \oplus A_1 <_{sQ} A.$$

Тогда в силу теоремы 1 [12] существует бесконечное число попарно sQ -несравнимых РП множеств $\{C_i\}_{i \in \omega}$ таких, что

$$(\forall i)(A_0 \oplus A_1 <_m C_i <_{sQ} A).$$

Из доказательства теоремы 1 [12] следует, что если A удовлетворяет условию предложения, то $(\forall i)(C_i \equiv_{bd} A)$.

Пусть теперь A не является нигде не простым множеством и удовлетворяет условию предложения, $A = A_0 \sqcup A_1$, A_0 и A_1 – нигде не простые множества [15]. Тогда нетрудно проверить, что $A_0 \oplus A_1$ есть нигде не простое множество. В силу предложения 1 [16], если C – РП множество, B – нигде не простое множество и $C \leq_Q B$, то C – нигде не простое множество. Поэтому

$$A \equiv_{bd} A_0 \oplus A_1 \quad \& \quad A_0 \oplus A_1 <_{sQ} A,$$

и доказательство завершается точно так же, как и в предыдущем случае.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что условию предложения 2 удовлетворяют креативные множества, так как известно [15], что креативное множество не является нигде не простым множеством и креативное множество есть ускоряемое множество [19]. Довней и Джокуш [8] доказали, что существует РП T -степень, отличная от 0 и $0'$, такая, что в этой T -степени имеется наибольшая 1-степень [8, теорема 1]. Ясно, что множество, построенное при доказательстве указанной теоремы 1 [8], удовлетворяет условию предложения 2, так как это множество не может быть нигде не простым.

РП множество A называется *полумаксимальным* [5], если существует максимальное множество M и нетривиальное разбиение M_0, M_1 множества M такое, что $A = M_0$.

РП множество A называется *частично полумаксимальным* [5], если существует нетривиальное разбиение A_0, A_1 множества A такое, что A_0 является полумаксимальным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Каждое креативное множество является частично полумаксимальным множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что всякое бесконечное РП множество является объединением не пересекающихся между собой креативного и продуктивного множеств. Пусть M – максимальное множество, M_0, M_1 – нетривиальное разбиение множества M . Допустим, что $M_1 = A \cup B$ & $A \cap B = \emptyset$, где A – креативное множество и B – продуктивное множество. Тогда $M_0 \cup A$ – креативное множество.

Хорошо известно, что все креативные множества рекурсивно изоморфны. Пусть K – креативное множество, f – ОРФ, взаимно однозначно отображающая множество ω на себя и $f(M_0 \cup A) = K$. Тогда

$$K = f(M_0) \cup f(A) \quad \& \quad f(M_0) \cap f(A) = \emptyset$$

и $f(M_0), f(A)$ – РП нерекурсивные множества, т.е. $f(M_0), f(A)$ является нетривиальным разбиением множества K .

Рассмотрим множество $f(M)$. Ясно, что $f(M)$ – максимальное множество и $f(M_0)$, $f(M_1)$ является нетривиальным разбиением максимального множества $f(M)$. И так, $f(M_0)$, $f(A)$ является нетривиальным разбиением множества K , а $f(M_0)$, $f(M_1)$ является нетривиальным разбиением максимального множества $f(M)$.

Если $A \leq_Q B$ посредством ОРФ f и

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset),$$

то множество A Q_1 -сводится к множеству B ($A \leq_{Q_1} B$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть H – гипер-гиперпростое множество, B_0, B_1 – его нетривиальное разбиение, K – креативное множество, A_0, A_1 – нетривиальное разбиение K и при этом A_1 не является креативным множеством. Тогда $A_0 \not\leq_{Q_1} B_0$ ($A_0 \not\leq_{Q_1} B_1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – ОРФ такая, что

$$(\forall x)(x \in A_0 \iff W_{g(x)} \subseteq B_0), \quad (\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset).$$

Рассмотрим множество $E = \{x : W_{g(x)} \cap B_1 \neq \emptyset\}$. Тогда $A_0 \cap E = \emptyset$. Множество $A_0 \cup E$ гипер-гиперпростое. Действительно, если h – ОРФ такая, что

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies W_{h(x)} \cap W_{h(y)} = \emptyset), \quad (\forall x)(W_{h(x)} \cap \overline{A_0 \cup E} \neq \emptyset),$$

то ОРФ μ , определенная равенством

$$(\forall x) \left(W_{\mu(x)} = \bigcup_{i \in W_{h(x)}} W_{g(i)} \right),$$

противоречит гипер-гиперпростоте множества H .

Известно (Деккер), что пересечение креативного и простого множеств является креативным множеством. Поэтому множество $A_0 \cup (E \cap A_1)$ креативно. Покажем, что $E \cap A_1$ не является креативным множеством. Действительно, E не является креативным множеством, так как $A_0 \cap E = \emptyset$ и $A_0 \cup E$ – гипер-гиперпростое множество. По условию A_1 не является креативным множеством и, кроме того,

$$(\forall x)(x \in E \cap A_1 \iff \langle x, x \rangle \in E \times A_1).$$

Тогда если $E \cap A_1$ – креативное множество, то в силу теоремы Лахлана [20] E или A_1 креативно. Противоречие.

Пусть f – одно-однозначная ОРФ и $f(\omega) = A_0 \cup E$. Множество $f^{-1}(A_0 \cup (E \cap A_1))$ креативно. Но $f^{-1}(A_0)$ – рекурсивное множество. Поэтому $f^{-1}(E \cap A_1)$ креативно и, следовательно, $ff^{-1}(E \cap A_1) = E \cap A_1$ креативно. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $A \leqslant_c B$ посредством ОРФ f и

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \implies D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset),$$

то множество A c_1 -сводится к множеству B . Аналогично предложению 4 доказывается, что если B – гиперпростое множество, B_0, B_1 – его нетривиальное разбиение, K – креативное множество, A_0, A_1 – нетривиальное разбиение K и при этом A_1 не является креативным множеством, то $A_0 \not\leqslant_{c_1} B_0$ ($A_0 \not\leqslant_{c_1} B_1$).

Множество A p -сводится к множеству B [10], если существует ОРФ f такая, что

$$(\forall x)(x \in A \iff (\exists y)(y \in D_{f(x)} \ \& \ D_y \subset B)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть K – креативное множество, A, B – нетривиальное разбиение множества K и при этом B не является креативным множеством. Тогда множество A не может p -сводиться к гиперпростому множеству.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – гиперпростое множество, K – креативное множество, A, B удовлетворяют условиям предложения и

$$(\exists f \text{ ОРФ})(\forall x)(x \in A \iff (\exists y)(y \in D_{f(x)} \ \& \ D_y \subset H)).$$

Рассмотрим множество

$$C = \bigcup_{x \in B} \bigcup_{y \in D_{f(x)}} D_y.$$

Возможны два случая:

- 1) $|C \setminus H| < \infty$;
- 2) $|C \setminus H| = \infty$.

Рассмотрим эти случаи.

- 1) Допустим, что $|C \setminus H| < \infty$ и $R = C \setminus H$. Тогда множество

$$R_1 = \{x : (\forall y)(y \in D_{f(x)} \implies D_y \cap R \neq \emptyset)\}$$

рекурсивное и, очевидно, $B \subseteq R_1$ & $R_1 \cap A = \emptyset$.

Кобзев [21] показал, что если P – продуктивное множество, A – РП множество, то $P \cap A$ или $P \cap \overline{A}$ продуктивно. Поэтому $R_1 \cap \overline{K}$ или $\overline{R_1} \cap \overline{K}$ продуктивно.

Пусть $R_1 \cap \overline{K}$ продуктивно. Тогда $\overline{R_1} \cup B$ креативно и в силу рекурсивности множества $\overline{R_1}$ B креативно. Противоречие.

Пусть $\overline{R_1} \cap \overline{K}$ продуктивно. Тогда $A \cup R_1$ креативно и, следовательно, A креативно. Вновь получили противоречие.

- 2) Пусть $|C \setminus H| = \infty$. Множество

$$H \cap \left(\bigcup_{x \in \omega} \bigcup_{y \in D_{f(x)}} D_y \right)$$

бесконечно. Поэтому существует одно-однозначная ОРФ g такая, что

$$g(\omega) = H \cap \left(\bigcup_{x \in \omega} \bigcup_{y \in D_{f(x)}} D_y \right).$$

Определим ОРФ f_1 следующим образом:

$$D_{f_1(0)} = D_{f(0)}, \quad D_{f_1(n+1)} = \{y : (\exists z)(z \in D_{f(n+1)} \ \& \ D_y = D_z \setminus \{g(0), \dots, g(n)\})\}$$

для любого $n \geq 0$. Тогда для каждого $m \in \omega$

$$\left| \left\{ x : (\exists y) \left(y \in D_{f_1(x)} \ \& \ D_y \cap \left(H \cap \left(\bigcup_{i \leq m} \bigcup_{z \in D_{f_1(i)}} D_z \right) \right) \neq \emptyset \right) \right\} \right| < \infty.$$

Действительно, пусть t – число такое, что

$$H \cap \left(\bigcup_{i \leq m} \bigcup_{z \in D_{f_1(i)}} D_z \right) \subseteq \{g(0), \dots, g(t)\}.$$

Тогда

$$(\forall s) \left(s > t \implies (\forall y) \left(y \in D_{f_1(s)} \implies D_y \cap \left(H \cap \left(\bigcup_{i \leq m} \bigcup_{z \in D_{f_1(i)}} D_z \right) \right) = \emptyset \right) \right).$$

Очевидно, что

$$(\forall x) (x \in A \iff (\exists y) (y \in D_{f_1(x)} \ \& \ D_y \subset H)),$$

$$\left| \left(\bigcup_{x \in B} \bigcup_{y \in D_{f_1(x)}} D_y \right) \setminus H \right| = \infty.$$

Пусть g_1 – одно-однозначная ОРФ и $g_1(\omega) = B$. Определим ОРФ h следующим образом. Положим по определению

$$D_{h(0)} = \bigcup_{y \in D_{f_1 g_1(0)}} D_y.$$

Пусть значения $h(0), h(1), \dots, h(n)$ определены. Тогда берем наименьшее число s такое, что

$$(\forall y) \left(y \in D_{f_1 g_1(s)} \implies D_y \cap \left(\bigcup_{x \leq n} D_{h(x)} \right) = \emptyset \right),$$

и полагаем

$$D_{h(n+1)} = \bigcup_{y \in D_{f_1 g_1(s)}} D_y.$$

Такое s всегда найдется. Допустим, что для некоторого n такое s не существует, т.е. для каждого $s \in \omega$ имеем

$$(\exists y) \left(y \in D_{f_1 g_1(s)} \ \& \ D_y \cap \left(\bigcup_{x \leq n} D_{h(x)} \right) \neq \emptyset \right).$$

Рассмотрим множество

$$R_2 = \left\{ x : (\exists y) \left(y \in D_{f_1(x)} \ \& \ D_y \cap \left(\bigcup_{x \leq n} D_{h(x)} \right) \neq \emptyset \right) \right\}.$$

Множество R_2 рекурсивное, $B \subseteq R_2$ и $|R_2 \cap A| < \infty$. Множество $R_2 \cap \overline{K}$ продуктивно или множество $\overline{R_2} \cap \overline{K}$ продуктивно. Тогда, рассуждая как и выше, приходим к противоречию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lerman M., Remmel J. B. The universal splitting property. I // Logic Colloquium '80 / ed. D. van Dalen et al. Stud. Logic Found. Math. V. 108. Amsterdam: Nort-Holland, 1982. P. 181–207.
- [2] Lerman M., Remmel J. B. The universal splitting property. II // J. Symbolic Logic. 1984. V. 49. № 1. P. 137–150.
- [3] Downey R. G. The degree of r.e. sets without the universal splitting property // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 291. P. 337–351.
- [4] Ambos-Spies K., Fejer P. A. Degree theoretical splitting properties of recursively enumerable sets // J. Symbolic Logic. 1988. V. 53. № 4. P. 110–137.
- [5] Downey R. G., Stob M. Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets: Orbits // Adv. Math. 1992. V. 92. P. 237–265.
- [6] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
- [7] Soare R. I. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Berlin–New York–Tokyo: Springer, 1987.
- [8] Downey R. G., Jockusch C. G. T -degrees, jump classes and strong reducibilities // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 301. № 1. P. 103–136.
- [9] Оманадзе Р. III. О верхней полурешетке рекурсивно перечислимых sQ -степеней // Алгебра и логика. 1991. Т. 30. № 4. С. 405–413.
- [10] Jockusch C. G. Semirecursive sets and positive reducibility // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. № 2. P. 420–436.
- [11] Марченков С. С. Об одном классе неполных множеств // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 4. С. 473–478.
- [12] Оманадзе Р. III. Соотношения между некоторыми сводимостями // Алгебра и логика. 1994. Т. 34. № 6. С. 681–688.
- [13] Оманадзе Р. III. О верхней полурешетке рекурсивно перечислимых Q -степеней // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 2. С. 175–184.

- [14] Оманадзе Р. Ш. Об одном усилении Q -сводимости // Алгебра и логика. 1995. Т. 35. № 1. С. 79–87.
- [15] Shore A. R. Nowhere simple sets and the lattice of recursively enumerable sets // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43. № 2. P. 322–330.
- [16] Оманадзе Р. Ш. Q -сводимость и нигде не простые множества // Сообщ. АН ГССР. 1987. Т. 127. № 1. С. 29–32.
- [17] Yates G. E. M. Three theorems of the degrees of recursively enumerable sets // Duke Math. J. 1965. V. 32. № 3. P. 461–468.
- [18] Ditshev A. V. Some results on bounded truth-table degrees // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1990. V. 36. № 3. P. 263–271.
- [19] Blum M., Marques I. On complexity properties of recursively enumerable sets // J. Symbolic Logic. 1973. V. 38. № 4. P. 579–593.
- [20] Lachlan A. H. A note on universal sets // J. Symbolic Logic. 1966. V. 31. № 3. P. 573–574.
- [21] Кобзев Г. Н. О полной btt -степени // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 1. С. 22–25.

Тбилисский государственный университет им. И. А. Джавахишвили
Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа
E-mail: omanr@iam.hepi.edu.ge

Поступило
27.06.95
Исправленный вариант
12.09.98