Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Омелянов, В. В. Трушков, Динамика свободной границы в бинарной среде с переменными коэффициентами теплопроводности, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 231–241

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:50:26

УДК 517.9

ДИНАМИКА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ В БИНАРНОЙ СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. А. Омелянов, В. В. Трушков

В работе построено асимптотическое решение системы уравнений фазового поля с переменными коэффициентами теплопроводности, различными в областях, занятых разными фазами. Показано, что в зависимости от соотношений между параметрами, характеризующими вещество, динамика свободной границы раздела фаз определяется решением классической или модифицированной задачи Стефана.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Система уравнений фазового поля

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{l}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= K \Delta \theta, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \tau \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \xi^2 \Delta \varphi + \frac{1}{a} (\varphi - \varphi^3) + \kappa(\varphi) \theta\end{aligned}\quad (1)$$

впервые была предложена Г. Каджинеллом [1], [2] для упрощенного описания процессов, происходящих при фазовых переходах первого рода. Здесь θ – температура, φ – функция порядка, нормированная так, что двум возможным агрегатным состояниям вещества (назовем их жидкой и твердой фазами) соответствуют значения $\varphi = \pm 1$, параметры $\tau, l, \xi, a, \kappa, K > 0$ характеризуют вещество, $\kappa(\varphi)$ – некоторая гладкая функция, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой (C^∞) границей $\partial\Omega$.

Известно, что эта система сохраняет аппроксимационные свойства в различных физических ситуациях, т.е. при различных значениях коэффициентов $l, K, \tau, \xi, a, \kappa$. В реальных средах величины a, ξ, τ являются малыми. Трактую их как малые параметры и переходя к пределу, из исходной модели можно получить предельные задачи, разные при различных соотношениях между a, ξ и τ . В частности, если

$$a, \xi, \tau \rightarrow 0, \quad a^{-1/2} \xi \rightarrow 0, \quad a^{-1} \tau \rightarrow 0, \quad (2)$$

то, обозначая через $\varepsilon = a$ малый параметр и полагая $l = 2, K = 1, \xi = \varepsilon^{5/2}, \tau = \kappa_1 \varepsilon^5$, в качестве предельной при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи получаем *классическую задачу Стефана*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta^\pm}{\partial t} &= \Delta \theta^\pm, \quad t > 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \\ [\theta^\pm]_{\Gamma_t} &= 0, \quad \left[\frac{\partial \theta^\pm}{\partial \nu} \right]_{\Gamma_t} = 2V_\nu,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\theta^\pm|_{\Gamma_t} = 0 \quad (4)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01492.

для температур $\theta^\pm$ в областях $\Omega_t^\pm$, занятых твердой и жидкой фазами соответственно, а также для поверхности Γ_t раздела фаз, положение которой заранее неопределено. Здесь $\Omega_t^\pm$ – подобласти такие, что при всех $t \geq 0$ имеем $\Omega = \Omega_t^+ \cup \Omega_t^- \cup \Gamma_t$, причем граница раздела Γ_t – гладкая поверхность коразмерности 1, движущаяся в направлении нормали ν со скоростью V_ν . Через $[f]|_{\Gamma_t} = f|_{\Gamma_t+0} - f|_{\Gamma_t-0}$ здесь и далее обозначен скачок функции f на поверхности Γ_t . Задача (3), (4) дополняется естественными начальными и граничными (на $\partial\Omega$) условиями.

Если же

$$a, \xi, \tau \rightarrow 0, \quad \tau a^{-1} = \text{const}, \quad \xi a^{-1/2} = \text{const}, \quad (5)$$

то предельный переход приводит к *модифицированной задаче Стефана* (ее также называют задачей Стефана с поверхностным натяжением), в которой условие (4) заменено на условие Гиббса–Томсона

$$\kappa_2 \theta^\pm|_{\Gamma_t} = \mathcal{K}_t + \kappa_1 V_\nu, \quad (6)$$

где $\mathcal{K}_t$ – средняя кривизна Γ_t , $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ – некоторые константы.

Эти и другие соответствия между системой фазового поля и предельными задачами впервые были установлены в работах Каджинелла (см., например, [1], [2]) с помощью построения формальных асимптотических решений методом сращивания. В последующие годы появилось много работ, посвященных обоснованию предельного перехода, уточнению класса начальных данных, при которых возникает та или иная предельная задача, обоснованию асимптотических разложений и другим аспектам этой задачи (см. [3]–[16] и библиографию в указанных работах). Однако, в этих работах предполагается, что коэффициенты теплопроводности постоянны и одинаковы в обеих фазах. Кроме того, как правило предполагается, что функция κ , характеризующая влияние температуры на функцию порядка, является константой (исключение – работы [2], [7]).

Мы рассмотрим физически более адекватный вариант системы фазового поля. Именно, рассмотрим случай среды с переменными коэффициентами теплопроводности, различными в разных фазах, и функцию κ , локализованную в окрестности границы фазового перехода. В данной статье авторами получены предельные задачи для этой системы в случаях (2) и (5).

Предполагая выполнение соотношений (2) или (5), рассмотрим следующий вариант системы фазового поля:

$$\frac{\partial(\theta + \varphi)}{\partial t} = \langle \nabla, K(\varphi, x, t) \nabla \theta \rangle, \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$\kappa_1 \varepsilon^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon^\alpha \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3 + \varepsilon \kappa \theta (1 - \varphi^2). \quad (8)$$

Здесь

$$K(\varphi, x, t) = \frac{K^+ + K^-}{2} + \frac{K^+ - K^-}{2} \varphi,$$

$K^\pm = K^\pm(x, t) \in C^\infty(Q)$ – заданные функции, причем $K^\pm \geq \text{const} > 0$, ε – малый параметр, $\kappa > 0$, $\kappa_1 > 0$ – некоторые константы, $Q = \Omega \times (0, T)$. Система дополнена естественными начальными и краевыми условиями

$$\theta|_{t=0} = \theta^0(x, \varepsilon), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi^0(x, \varepsilon), \quad (9)$$

$$\theta|_\Sigma = h(x, t)|_\Sigma, \quad \varphi|_\Sigma = 1, \quad (10)$$

где $h \in C^\infty(\Sigma)$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0, T]$.

Предполагается, что при $\varepsilon \geq \text{const} > 0$ функции θ^0 и φ^0 являются гладкими и заданы подобластью $\Omega_0^\pm \subset \Omega$, разделенные границей Γ_0 , такие, что $\theta^0(x, \varepsilon) \rightarrow \theta_0^\pm(x)$ и $\varphi^0(x, \varepsilon) \rightarrow \pm 1$ при $x \in \Omega_0^\pm$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь Γ_0 – замкнутое гладкое многообразие коразмерности 1, причем $\Omega = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^- \cup \Gamma_0$. Кроме того, предположим, что $\theta_0^\pm \in C^\infty(\overline{\Omega_0^\pm})$ и $[\theta_0^\pm]|_{\Gamma_0} = 0$. Для определенности будем считать, что к внешней границе $\partial\Omega$ примыкает Ω_0^+ .

Рассматривая (7)–(10) при $\alpha = 6$ и $\alpha = 2$ и строя асимптотическое решение, мы получим предельные (при $\varepsilon \rightarrow 0$) задачи, которые являются естественным обобщением классической (3), (4) и модифицированной (3), (6) задач Стефана на случай переменных коэффициентов теплопроводности.

Построение асимптотики проводится по схеме, развитой в [14], [16]–[18].

2. Классическая модель Стефана. Пусть выполнено условие (2). Тогда, полагая $\varepsilon = a$, $\tau = \kappa_1 \varepsilon^5$, $\xi = \varepsilon^{5/2}$, получаем систему (7), (8) с параметром $\alpha = 6$.

Введем вспомогательные функции, необходимые для формулировки основного результата этого пункта. Пусть $\theta^\pm = \theta^\pm(x, \psi)$, $\psi = \psi(x)$ – решение классической задачи Стефана

$$\frac{\partial \theta^\pm}{\partial t} = \langle \nabla, K^\pm \nabla \theta^\pm \rangle, \quad t > 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad (11)$$

$$\theta^\pm|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left[K^\pm \frac{\partial \theta^\pm}{\partial \nu} \right] \Big|_{\Gamma_t} = 2V_\nu, \quad (12)$$

$$\theta^\pm|_{t=0} = \theta_\pm^0, \quad \theta^+|_\Sigma = h(x, t)|_\Sigma. \quad (13)$$

Здесь предполагается, что нормальная скорость $V_\nu \neq 0$, а значит, положение свободной границы Γ_t можно описать как поверхность уровня вспомогательной функции $\psi(x)$: $\Gamma_t = \{x \in \Omega, \psi(x) = t\}$. Поэтому $V_\nu = 1/|\nabla \psi|$ и нормаль к Γ_t вычисляется по формуле $\nu = \nabla \psi / |\nabla \psi|$. Будем предполагать, что при $t \leq T$ существует классическое решение задачи (11)–(13).

Нам также потребуются функции $\tilde{\theta}^\pm$ – гладкие продолжения $\theta^\pm$ в области $\Omega_t^\mp$ соответственно такие, что $\tilde{\theta}^\pm(x, t) = \theta^\pm(x, t)$ при $x \in \Omega_t^\pm$ и $\tilde{\theta}^\pm$ удовлетворяют уравнению теплопроводности (11) в ε^3 -окрестности свободной границы Γ_t . Вне этой окрестности выбор продолжения несущественен.

Далее, пусть $\theta_1^\pm = \theta_1^\pm(x, \psi)$, $\psi_1 = \psi_1(x)$ – решение линеаризованной задачи Стефана

$$\frac{\partial \theta_1^\pm}{\partial t} = \langle \nabla, K^\pm \nabla \theta_1^\pm \rangle, \quad t > 0, \quad x \in \Omega_t^\pm, \quad (14)$$

$$[\theta_1^\pm]|_{\Gamma_t} = 0, \quad \theta_1^\pm|_{t=0} = \theta_\pm^1, \quad \theta_1^+|_\Sigma = 0, \quad (15)$$

$$\theta_1^\pm - \psi_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta^+}{\partial t} + \frac{\partial \theta^-}{\partial t} \right) \Big|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left[K^\pm \frac{\partial \theta_1^\pm}{\partial \nu} \right] \Big|_{\Gamma_t} = \left[K^\pm \frac{\partial \theta^\pm}{\partial \nu_1} \right] \Big|_{\Gamma_t} + V_\nu f, \quad (16)$$

где

$$\nu_1 = \frac{\nabla \psi_1}{|\nabla \psi|}, \quad \theta_\pm^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\theta^0(x, \varepsilon) - \theta_\pm^0(x)}{\varepsilon}, \quad x \in \Omega_0^\pm,$$

способ вычисления правой части f будет указан ниже. Пусть $\tilde{\theta}_1^\pm(x, t)$ – гладкие продолжения $\theta_1^\pm$ в области $\Omega_t^\mp$ соответственно такие, что каждая из функций $\tilde{\theta}_1^\pm$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (14).

ТЕОРЕМА 1. Пусть при $t \leq T$ существует классическое решение задачи (11)–(13). Тогда при $t \leq T$ самоподобное асимптотическое решение типа кинка системы (7), (8) при $\alpha = 6$ имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(x, t, \varepsilon) &= \chi(\tau, x) + \varepsilon \langle \nu, \nu_1 \rangle \tau \frac{\partial \chi(\tau, x)}{\partial \tau} + O(\varepsilon^2), \\ \theta(x, t, \varepsilon) &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^+(x, t) + \tilde{\theta}^-(x, t)) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^+(x, t) - \tilde{\theta}^-(x, t))\chi(\tau, x) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1^+(x, t) + \tilde{\theta}_1^-(x, t)) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1^+(x, t) - \tilde{\theta}_1^-(x, t))\chi(\tau, x) \right. \\ &\quad \left. + \psi_1 \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^+(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\theta}^-(x, t)}{\partial t} \right) (\chi(\tau, x) + 1) \right) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

где

$$\tau = \frac{t - \psi(x) + \varepsilon \psi_1(x) + \varepsilon^2 \psi_2(x, \varepsilon)}{\varepsilon^3}, \quad \chi(\tau, x) = \text{th} \frac{\tau}{\sqrt{2} |\nabla \psi|}, \quad \nu_1 = \frac{\nabla \psi_1}{|\nabla \psi|},$$

$\psi_2 = \psi_2(x, \varepsilon)$ – некоторая гладкая равномерно по $\varepsilon \in [0, 1]$ функция, способ вычисления которой будет указан ниже.

Наметим доказательство теоремы.

Для построения асимптотического решения нам потребуется два класса функций: $\mathcal{S} = \{f : f(\tau, x, t) \in S(\mathbb{R}^1; C^\infty(Q))\}$, где S – пространство Шварца, и $\mathcal{H} = \{f : \partial f / \partial \tau \in \mathcal{S}\}$. Ясно, что для любой функции $f \in \mathcal{H}$ существуют пределы

$$f^\pm(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} f(\tau, x, t), \quad f^\pm \in C^\infty(Q).$$

Нетрудно доказать также следующие утверждения (см. [17]).

ЛЕММА 1. 1) Для любых функций $S(x, t) \in C^\infty(Q)$ таких, что

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{\Gamma_t} \neq 0,$$

где $\Gamma_t = \{(x, t) \in Q, S(x, t) = 0\}$, и любых функций $f(\tau, x, t) \in \mathcal{H}$ справедливо соотношение

$$f\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) = f\left(\frac{\beta(t - \psi(x))}{\varepsilon}, x, t\right) + O(\varepsilon),$$

где $t = \psi(x)$ – уравнение поверхности $S(x, t) = 0$.

2) Пусть $\chi(\tau, x, t)$ – некоторая функция из $\mathcal{H}$ такая, что $\chi^\pm = \pm 1$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{H}$ справедлива формула

$$f = \frac{f^+ + f^-}{2} + \frac{f^+ - f^-}{2} \chi(\tau, x, t) + \omega(\tau, x, t), \quad (17)$$

где $\omega \in \mathcal{S}$.

3) Для любых функций $f(\tau, x, t) \in \mathcal{S}$, $g(x, t) \in C^\infty$ справедливы соотношения

$$(t - \psi(x))^k f\left(\frac{t - \psi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) = O(\varepsilon^k), \quad k \geq 0,$$

$$g(x, t) f\left(\frac{t - \psi(x)}{\varepsilon}, x, t\right) = g(x, \psi) f\left(\frac{t - \psi(x)}{\varepsilon}, x, \psi\right) + O(\varepsilon).$$

Перейдем к построению самоподобного асимптотического решения уравнений (7), (8). Самоподобность в данном случае означает, что решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ остается жестко фронтным, т.е. существуют подобласти $\Omega_t^\pm$ такие, что $\Omega = \Omega_t^+ \cup \Omega_t^- \cup \Gamma_t$, $\Gamma_t = \overline{\Omega_t^+} \cap \overline{\Omega_t^-}$ — замкнутое многообразие коразмерности 1, причем предполагается, что $\Gamma_t \cap \partial\Omega = \emptyset$. Будем также считать, что нормальная скорость движения Γ_t отлична от 0.

Для выбора формы асимптотического решения будем исходить из физического смысла задачи. Ясно, что предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ главного члена асимптотики φ должен быть разрывным на Γ_t , т.е. иметь особенность типа функции Хевисайда, а предел главного члена асимптотики θ должен иметь слабую особенность, т.е. быть непрерывной функцией и в то же время его производная по нормали к Γ_t должна иметь сильный разрыв на Γ_t .

Тем самым, мы приходим к следующей форме искомого асимптотического решения:

$$\theta(x, t, \varepsilon) = \Theta^N(x, t, \varepsilon) + \psi^N\left(\frac{S(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon^3}, x, t, \varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (18)$$

$$\varphi(x, t, \varepsilon) = \Phi^N\left(\frac{S(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon^3}, x, t, \varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (19)$$

которое можно понимать как регуляризацию описанных выше предельных функций. Здесь Θ^N — регулярная составляющая решения,

$$\Theta^N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \theta_j(x, t),$$

ψ^N, Φ^N — быстро меняющиеся составляющие решения,

$$\psi^N(\tau, x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j f_j(x, t) V_j(\tau, x, t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j g_j(\tau, x, t),$$

$$\Phi^N(\tau, x, t, \varepsilon) = \chi(\tau, x) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \varphi_j(\tau, x, t),$$

где $\theta_j, f_j, S \in C^\infty(Q)$, $\chi(\tau, x), \varphi_j(\tau, x, t), g_j(\tau, x, t) \in \mathcal{H}$ — подлежащие определению функции, причем

$$\chi^\pm = \pm 1, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{\Gamma_t} \neq 0, \quad \Gamma_t = \{(x, t), t = \psi(x)\}, \quad f_j|_{\Gamma_t} = 0, \quad g_j^- = 0. \quad (20)$$

В силу леммы 1 и (20) без потери общности полагаем $S = t - \psi(x) + \varepsilon \tilde{\psi}(x, \varepsilon)$, где $\tilde{\psi} = \psi_1(x) + \varepsilon \psi_2(x) + \dots$.

Подставим разложения (18), (19) в (7), (8). Умножая первое уравнение на ε^6 , получаем соотношения

$$\begin{aligned} & |\nabla S|^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(K(\Phi^N) \frac{\partial \psi^N}{\partial \tau} \right) + \varepsilon^3 \left(K(\Phi^N) (2\langle \nabla S, \nabla \rangle + \Delta S) + \langle \nabla K(\Phi^N), \nabla S \rangle \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial K(\Phi^N)}{\partial \tau} \langle \nabla S, \nabla \rangle \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial \tau} - \varepsilon^3 \frac{\partial(\psi^N + \Phi^N)}{\partial \tau} + \varepsilon^6 \langle \nabla, (K(\Phi^N) \nabla(\Theta^N + \psi^N)) \rangle \\ & \quad - \varepsilon^6 \frac{\partial}{\partial t} (\Theta^N + \psi^N + \Phi^N) |_{\tau=S/\varepsilon^3} = O(\varepsilon^{N+7}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \Phi^N (1 - (\Phi^N)^2) + |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \Phi^N}{\partial \tau^2} + \varepsilon \kappa (\Theta^N + \psi^N) (1 - (\Phi^N)^2) + \varepsilon^3 (2\langle \nabla S, \nabla \rangle + \Delta S) \frac{\partial \Phi^N}{\partial \tau} \\ & \quad - \varepsilon^3 \kappa_1 \frac{\partial \Phi^N}{\partial \tau} + \varepsilon^6 \left(\Delta - \kappa_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi^N = O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned} \quad (22)$$

Определим сначала регулярные члены разложений (18), (19). Переходя к пределу в (21), (22) при $\tau \rightarrow \pm\infty$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} & \langle \nabla, (K(\Phi^{N\pm}) \nabla(\Theta^N + \psi^{N\pm})) \rangle - \frac{\partial}{\partial t} (\Theta^N + \psi^{N\pm} + \Phi^{N\pm}) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad (23) \\ & \Phi^{N\pm} (1 - (\Phi^{N\pm})^2) + \varepsilon \kappa (\Theta^N + \psi^{N\pm}) (1 - (\Phi^{N\pm})^2) + \varepsilon^6 \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi^{N\pm} = O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned} \quad (24)$$

Приравнявая к 0 коэффициенты при одинаковых степенях ε в (24), получаем, что $\chi^\pm$ должны быть равны ± 1 , а также должны выполняться равенства $\varphi_j^\pm = 0, j = 1, \dots, N$, т.е. необходимо $\varphi_j \in \mathcal{S}$. Кроме того, из (23) мы получаем уравнения

$$\frac{\partial(\theta_0 + f_0 V_0^\pm)}{\partial t} - \langle \nabla, K^\pm \nabla(\theta_0 + f_0 V_0^\pm) \rangle = 0 \quad (25.0)$$

в областях $\Omega_t^\pm$ соответственно. Обозначая $\theta^\pm = \theta_0 + f_0 V_0^\pm$, из (25.0) получаем уравнения теплопроводности (11). Рассматривая в (23) члены величины $O(\varepsilon^j), j = 1, \dots, N-1$, обозначая $\theta_j^\pm = \theta_j + f_j V_j^\pm + g_j^\pm$ и принимая во внимание, что $\varphi_j^\pm = 0$, получаем уравнения

$$\frac{\partial \theta_j^\pm}{\partial t} - \langle \nabla, K^\pm \nabla \theta_j^\pm \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (25.j)$$

Построение быстро меняющихся составляющих решения ψ^N, Φ^N проведем по схеме, развитой в [14], [17]: последовательно для всех членов (21), (22) величины $O(\varepsilon^j), j = 1, \dots, N$, раскладываем в ряд Тейлора по t в точке $t = \psi(x)$ и используем равенство $\tau = (t - \psi(x) + \varepsilon \tilde{\psi}(x))/\varepsilon^3$. Затем переходим к функциям с независимыми переменными τ, x и находим решение на поверхности Γ_t , т.е. при $t = \psi(x)$. Далее строим продолжение функций вне Γ_t так, чтобы обеспечить существование младших членов асимптотики, обладающих требуемыми свойствами. Ввиду того что $\varphi_j \in \mathcal{S}$, определим продолжение φ_j как тождественное, т.е. $\varphi_j = \varphi_j(\tau, x)$.

Реализуя эту схему, рассмотрим члены величины $O(1)$ в соотношении (22). Приравнявая их к 0, получаем модельное уравнение для $\tilde{\chi} = \chi(\tau, x, \psi(x))$:

$$|\nabla \psi|^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \tau^2} + \tilde{\chi} - \tilde{\chi}^3 = 0, \quad \tilde{\chi} \rightarrow 1 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (26)$$

Отсюда на Γ_t имеем

$$\check{\chi}(\tau, x) = \text{th} \frac{\tau}{\sqrt{2}|\nabla\psi|},$$

причем возникающую при интегрировании (26) “постоянную” интегрирования $c = c(x)$ мы включаем во входящую в разложение S и пока не определенную функцию $\psi_3(x)$. Определим продолжение $\check{\chi}$ для всех $(x, t) \in Q$ как тождественное, т.е. положим $\chi = \check{\chi}(\tau, x)$, поскольку именно такое продолжение согласуется с полученным выше необходимым условием $\chi^\pm = \pm 1$.

Далее, приравнявая члены величины $O(\varepsilon^1)$ в соотношениях (22) и (21), получаем уравнения

$$\hat{\mathcal{L}}\varphi_k = F_k^\varphi(\tau, x), \quad (27.k)$$

$$|\nabla\psi|^2 \frac{\partial}{\partial\tau} \left(K(\chi) \frac{\partial\check{g}_k}{\partial\tau} \right) = F_k^\theta(\tau, x). \quad (28.k)$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{L}} = |\nabla\psi|^2 \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + 1 - 3\chi^2,$$

F_k^φ, F_k^θ – функции от $x, \tau, \chi, \dots, \varphi_{k-1}, g_{k-1}$ и их производных. В частности,

$$F_1^\varphi(\tau, x) = 2\langle\nabla\psi, \nabla\psi_1\rangle \frac{\partial^2\chi}{\partial\tau^2} - \kappa\theta_0(1 - \chi^2)|_{\Gamma_t}, \quad (29.1)$$

$$F_1^\theta = |\nabla\psi|^2 \frac{\partial}{\partial\tau} K(\chi) \psi_1 \frac{\partial f_0}{\partial t} \frac{\partial V_0}{\partial\tau} \Big|_{\Gamma_t}, \quad (30.1)$$

$$F_2^\theta = |\nabla\psi|^2 \frac{\partial}{\partial\tau} K(\chi) \left(\psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial V_1}{\partial\tau} + \psi_2 \frac{\partial f_0}{\partial t} \frac{\partial V_0}{\partial\tau} - \psi_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \frac{\partial V_0}{\partial\tau} \right) \Big|_{\Gamma_t}, \quad (30.2)$$

$$\begin{aligned} F_3^\theta(\tau, x) = & |\nabla\psi|^2 \frac{\partial}{\partial\tau} K(\chi) \left(\psi_1 \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{\partial V_2}{\partial\tau} + \psi_2 \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial V_1}{\partial\tau} + \psi_3 \frac{\partial f_0}{\partial t} \frac{\partial V_0}{\partial\tau} \right. \\ & \left. - \psi_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \frac{\partial V_1}{\partial\tau} - \psi_1\psi_2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \frac{\partial V_0}{\partial\tau} + \psi_1^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial t^3} \frac{\partial V_0}{\partial\tau} \right) \Big|_{\Gamma_t} \\ & + \frac{\partial}{\partial\tau} (\chi + K(\chi) \langle\nabla\psi, \nabla(\theta_0 + f_0 V_0)\rangle) \Big|_{\Gamma_t}. \end{aligned} \quad (30.3)$$

Нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2. *Для разрешимости уравнений (27.k), (28.k) в $\mathcal{H}$ необходимо и достаточно выполнение условий*

$$F_k^\theta \in \mathcal{S}, \quad (31.k)$$

$$F_k^\varphi \in \mathcal{S}, \quad (32.k)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_k^\theta(\tau, x) d\tau = 0, \quad (33.k)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_k^\varphi(\tau, x) \frac{\partial\chi}{\partial\tau} d\tau = 0. \quad (34.k)$$

В силу (29.1) условие (32.1), очевидно, выполнено, а условие (34.1) выполнено тогда и только тогда, когда $\theta_0|_{\Gamma_t} = 0$. Так как $\check{f}_0 = 0$, из этого равенства получаем условие Стефана (12).

Теперь заметим, что в качестве V_j можно выбрать функцию χ , поскольку в силу леммы 1 разность между двумя кинками с одинаковыми пределами на $\pm\infty$ является функцией из $\mathcal{S}$, а значит, учитывается в слагаемом g_j разложения (18).

Определим продолжение функции $(\theta_0 + f_0 V_0)|_{\Gamma_t}$ вне поверхности Γ_t . Для этого пусть $\theta^\pm = \theta^\pm(x, t)$ – решение задачи Стефана в $\Omega_t^\pm$ и $\tilde{\theta}^\pm = \tilde{\theta}^\pm(x, t)$ – гладкие продолжения $\theta^\pm$ в области $\Omega_t^\mp$ соответственно такие, что $\tilde{\theta}^\pm$ также удовлетворяют уравнению теплопроводности (25.0). Положим $f_0 V_0 = (\tilde{\theta}^+ - \tilde{\theta}^-)\chi/2$, $\theta_0 = (\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-)/2$ и определим в Ω главный член асимптотики θ :

$$\theta(x, t, \varepsilon) = \frac{\tilde{\theta}^+ + \tilde{\theta}^-}{2} + \frac{(\tilde{\theta}^+ - \tilde{\theta}^-)\chi(\tau, x)}{2} + O(\varepsilon).$$

Решая уравнение (27.1), получаем

$$\varphi_1 = \frac{\langle \nabla \psi, \nabla \psi_1 \rangle}{|\nabla \psi|^2} \tau \frac{\partial \chi}{\partial \tau}. \quad (35)$$

Здесь мы вновь используем тот факт, что фаза S содержит члены вида $\varepsilon^j \psi_j$, в частности, член $\varepsilon^4 \psi_4$. Ясно, что учет этого слагаемого в S эквивалентен добавлению к (35) функции $c_1(x)\chi_\tau \in \ker \hat{\mathcal{L}}$.

Теперь рассмотрим уравнения (28.1), (28.2), (28.3). В силу явного вида функций F_i^θ , условия (31.i), (33.1) и (33.2) также выполнены. Уравнения (28.1), (28.2) легко решаются

$$\begin{aligned} \check{g}_1 &= \psi_1 \frac{\partial f_0}{\partial t} \Big|_{\Gamma_t} (\chi + 1), \\ \check{g}_2 &= \left(\psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} + \psi_2 \frac{\partial f_0}{\partial t} - \psi_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) \Big|_{\Gamma_t} (\chi + 1). \end{aligned}$$

Далее, проинтегрируем (28.3) по τ :

$$\begin{aligned} |\nabla \psi|^2 K(\chi) & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\check{g}_3 - \left(\psi_1 \frac{\partial f_2}{\partial t} + \psi_2 \frac{\partial f_1}{\partial t} + \psi_3 \frac{\partial f_0}{\partial t} - \psi_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial t} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \psi_1 \psi_2 \frac{\partial f_0}{\partial t} + \psi_1^3 \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial t^3} \right) \chi \right) - \langle \nabla \psi, \nabla (\theta_0 + f_0 V_0) \rangle \right) \Big|_{\Gamma_t} = \chi + c^{(1)}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $c^{(1)} = c^{(1)}(x)$ – “постоянная” интегрирования. Для того чтобы удовлетворить условию (33.3), устремим в (36) τ к $\pm\infty$ и, используя тривиальные арифметические операции, получим условие

$$(K^+ \langle \nabla \psi, \nabla (\theta_0 + f_0 V_0^+) \rangle - K^- \langle \nabla \psi, \nabla (\theta_0 + f_0 V_0^-) \rangle) \Big|_{\Gamma_t} = \frac{2}{|\nabla \psi|}. \quad (37)$$

Нетрудно убедиться, что условие (37) эквивалентно условию Стефана (12) для производной по нормали.

Далее, приравнявая в (22) члены величины $O(\varepsilon^2)$, получаем (27.2) с правой частью

$$F_2^\varphi = \left(3\chi\varphi_1^2 - \theta_1(1 - \chi^2) + \varkappa \frac{\partial(\theta_0 + f_0 V_0)}{\partial t} \psi_1(1 - \chi^2) - \varkappa \theta_1(1 - \chi^2) + 2\langle \nabla \psi, \nabla \psi_1 \rangle \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} - (|\nabla \psi_1|^2 - 2\langle \nabla \psi, \nabla \psi_2 \rangle) \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} \right) \Big|_{\Gamma_t}.$$

С учетом (35) нетрудно убедиться, что условие (34.2) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\theta}_1 - \psi_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial t} \right) \Big|_{\Gamma_t} = 0. \quad (38)$$

Так как $f_1|_{\Gamma_t} = 0$, то (38) эквивалентно первому условию (16).

Нам осталось вывести второе условие (16). Для этого рассмотрим уравнение (28.4). Проводя такие же вычисления, что и при выводе (36), (37), убеждаемся в том, что (33.4) приводит к условию Стефана (16) с правой частью

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_\theta^4 - \frac{\partial}{\partial \tau} K(\chi) (\langle \nabla \psi, \nabla \theta_1^\pm \rangle - \langle \nabla \psi_1, \nabla \theta^\pm \rangle) \right) d\tau.$$

Теперь определим продолжение $\theta_1 + f_1 V_1 + g_1|_{\Gamma_t}$ вне поверхности Γ_t . Для этого обозначим через $\theta_1^\pm = \theta_1^\pm(x, t)$ решение задачи Стефана с граничным условием (38) в $\Omega_0^\pm$, и пусть $\tilde{\theta}_1^\pm(x, t)$ – гладкие продолжения $\theta_1^\pm$ в области $\Omega^\mp$ соответственно такие, что каждая из функций $\tilde{\theta}_1^\pm$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (25.1).

Тогда, полагая $f_1 V_1 + g_1 = (\tilde{\theta}_1^+ - \tilde{\theta}_1^-)\chi/2$, $\theta_1 = (\tilde{\theta}_1^+ + \tilde{\theta}_1^-)/2$, определяем в Ω первую поправку асимптотики θ .

Таким образом, вычисление младших членов асимптотического разложения θ и φ сводится к решению классической задачи Стефана и решению обыкновенных уравнений (27.2), (28.4). Построение следующих членов асимптотики проводится аналогично указанной выше схеме.

3. Модифицированная задача Стефана. Рассмотрим теперь случай, когда параметры a, τ, ξ в (1) связаны соотношением (5). Тогда задача сводится к системе (7), (8) при $\alpha = 2$.

Здесь мы только сформулируем результат, введя предварительно вспомогательные функции. Пусть $\theta^\pm, \psi$ – решение модифицированной задачи Стефана

$$\frac{\partial \theta^\pm}{\partial t} = \langle \nabla, K^\pm \nabla \theta \rangle, \quad (39)$$

$$[\theta^\pm]|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left[K^\pm \frac{\partial \theta^\pm}{\partial \nu} \right] \Big|_{\Gamma_t} = 2V_\nu, \quad (40)$$

$$\theta^\pm|_\Sigma = h(x, t)|_\Sigma, \quad \theta^\pm|_{t=0} = \theta_0^\pm(x), \quad (41)$$

$$\varkappa_2 \theta^\pm|_{\Gamma_t} = \mathcal{K}_t + \varkappa_1 V_\nu, \quad (42)$$

где $\varkappa_2 = \varkappa/\sqrt{2}$, $\mathcal{K}_t = \operatorname{div}(\nabla \psi/|\nabla \psi|)$ – средняя кривизна Γ_t , $V_\nu = 1/|\nabla \psi|$ – скорость движения границы Γ_t в направлении нормали. Пусть $\tilde{\theta}^\pm$ – гладкие продолжения функций $\theta^\pm$ в $\Omega_t^\mp$ такие, что $\tilde{\theta}^\pm$ удовлетворяют уравнению теплопроводности (39).

ТЕОРЕМА 2. Пусть при $t \leq T$ существует классическое решение задачи (39)–(42). Тогда при $t \leq T$ асимптотическое решение типа кинка системы (7), (8) при $\alpha = 2$ имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(x, t, \varepsilon) &= \chi(\tau, x, t) + \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \tau}(\tau, x) + O(\varepsilon^2), \\ \theta(x, t, \varepsilon) &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^+(x, t) + \tilde{\theta}^-(x, t)) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^+(x, t) - \tilde{\theta}^-(x, t))\chi(\tau, x) + O(\varepsilon),\end{aligned}$$

где

$$\tau = \frac{t - \psi(x)}{\varepsilon} + \psi_1, \quad \chi = \operatorname{th} \frac{\tau}{\sqrt{2}|\nabla \psi|},$$

$\psi_1 = \psi_1(x)$ – некоторая гладкая функция.

Доказательство теоремы, а также вычисление ψ_1 проводится, как в п. 2 (см. также [14], [16]). Различие состоит в том, что быстро меняющаяся переменная имеет вид

$$\tau = \frac{t - \psi(x)}{\varepsilon} + \psi_1 + \dots$$

Модельные уравнения для членов асимптотики φ получаются такими же, как и в предыдущей задаче, т.е. вида (26) и (27.k), но правые части вычисляются по другим формулам. В частности, уравнение для первой поправки имеет правую часть

$$F_1^\varphi = (2\langle \nabla \psi, \nabla \rangle + \Delta \psi + \kappa_1) \frac{\partial \chi}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \kappa \check{\theta}_0 (1 - \chi^2) + 2\langle \nabla \psi, \nabla \psi_1 \rangle \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2}.$$

Таким образом, условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^\varphi \frac{\partial \chi}{\partial \tau} d\tau = 0$$

приводит не к (12), а к граничному условию Гиббса–Томсона (42).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Caginalp G. An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Rational Mech. Anal. 1986. V. 92. P. 205–245.
- [2] Caginalp G., Chen X. Phase field equations in the singular limit of sharp interface problem // On the Evolution of Phase Boundaries / ed. M. Gurtin, G.B. McFadden. IMA Vol. Math. Appl. V. 43. New York: Springer, 1992. P. 1–28.
- [3] Modica L. The gradient theory of phase translations and the minimal interphase criterion // Arch. Rational Mech. Anal. 1986. V. 98. P. 123–142.
- [4] Luckhaus S., Modica L. The Gibbs–Thomson relation within the gradient theory of phase translations // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 107. P. 71–83.
- [5] Luckhaus S. Solutions of the two-phase Stefan problem with the Gibbs–Thomson law for the melting temperature // European J. Appl. Math. 1990. V. 1. P. 101–111.

- [6] Плотников П. И., Старовойтов В. Н. Задача Стефана как предел системы фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 3. С. 461–471.
- [7] Soner H. M. Convergence of the phase field equations to the Mullins–Sekerka problem with kinetic undercooling // Arch. Rational Mech. Anal. 1995. V. 131. P. 139–197.
- [8] Caginalp G. Stefan and Hele–Shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations // Phys. Rev. A. 1990. V. 39. P. 101–111.
- [9] Caginalp G., Chen X. Convergence of the phase field model to its sharp interphase limits // European J. Appl. Math. 1998. V. 9. № 4. P. 417–445.
- [10] Alikakos N., Bates P. On the singular limit in a phase field model of a phase translations // Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor. 1988. V. 5. P. 1–38.
- [11] Carr J., Pego R. L. Metastable patterns in solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$ // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42. P. 523–576.
- [12] Chen X., Elliott C. M. Asymptotics for a parabolic double obstacle problem // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 444. P. 429–445.
- [13] Nochetto R., Verdi C. Convergence of double obstacle problem to the generalized geometric motion of fronts // SIAM J. Math. Anal. 1995. V. 26. № 4. P. 1514–1526.
- [14] Данилов В. Г., Омелянов Г. А., Радкевич Е. В. Асимптотика решения системы фазового поля и модифицированная задача Стефана // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 3. С. 483–491.
- [15] Данилов В. Г., Омелянов Г. А., Радкевич Е. В. Обоснование асимптотики решения системы фазового поля и модифицированная задача Стефана // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 12. С. 63–80.
- [16] Омелянов Г. А., Трушков В. В. Геометрическая поправка в задаче о движении свободной границы // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 151–153.
- [17] Маслов В. П., Омелянов Г. А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 63–126.
- [18] Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.

Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет)

Поступило
08.07.98