Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Потапов, О совпадении классов функций, определяемых оператором обобщенного сдвига или порядком наилучшего приближения алгебраическими многочленами, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 242–257

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:47:59

УДК 517.5

О СОВПАДЕНИИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ИЛИ ПОРЯДКОМ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

М. К. Потапов

В работе доказывается совпадение двух классов функций. Один из них определяется степенным порядком наилучшего приближения алгебраическими многочленами. Для определения другого сначала вводится новый несимметричный оператор обобщенного сдвига, затем с его помощью вводится обобщенный модуль непрерывности и тогда класс функций определяется степенным порядком этого модуля.

Библиография: 7 названий.

Еще в начале века для 2π -периодических функций F было выяснено, что эквивалентны условия

$$E_n(F)_{p^*} = O(n^{-r}) \quad \text{и} \quad \omega(F, \delta)_{p^*} = O(\delta^r), \quad (1)$$

где $0 < r < 1$ и $E_n(F)_{p^*}$ – наилучшее приближение в метрике L_{p^*} функции F тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем $n - 1$, а $\omega(F, \delta)_{p^*}$ – обычный модуль непрерывности функции F в метрике L_{p^*} .

При рассмотрении непериодических функций и их приближений алгебраическими многочленами выяснилось, что нельзя получить аналогичную эквивалентность, если рассматривать обычный модуль непрерывности. Однако, аналог утверждения (1) справедлив, если заменить обычный модуль непрерывности обобщенным. Такие обобщенные модули непрерывности могут определяться различными способами. Приведем один из них, связанный со следующей аналогией с 2π -периодическим случаем.

Каждой 2π -периодической, интегрируемой на сегменте $[0, 2\pi]$ функции F в каждой точке t можно поставить в соответствие ее ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00010, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 96/97-15-96073.

по тригонометрической системе $\{e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} e^{ikh}.$$

Легко видеть, что это есть ряд Фурье функции F в точке сдвига $t + h$.

Каждой непериодической, интегрируемой с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ на отрезке $[-1, 1]$ функции f в каждой точке $x \in [-1, 1]$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье–Якоби

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$$

по системе многочленов Якоби $\{P_k^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, т.е. по системе многочленов, ортогональных друг другу с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(h) P_k^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (2)$$

где $\{\varphi_k(h)\}_{k=0}^{\infty}$ – некоторая система функций.

Если окажется, что (2) есть ряд Фурье–Якоби некоторой функции, то по аналогии с 2π -периодическим случаем принято считать, что это ряд Фурье–Якоби функции f в точке “обобщенного сдвига”, т.е. в точке $\overline{x+h}$ (черточка обозначает этот “обобщенный сдвиг”).

В некоторых случаях эти функции могут быть явно выписаны и их называют *операторами обобщенного сдвига*.

Ранее рассматривались (см., например, [1]–[4]) лишь операторы обобщенного сдвига в случае, когда их ряд Фурье–Якоби (2) был “симметричен”, а именно тогда, когда $\varphi_k(h) = P_k^{(\alpha, \beta)}(h)$. Представляет интерес рассмотрение и “несимметричных” случаев, т.е. случаев, когда функция $\varphi_k(h)$ не является тем же самым многочленом $P_k^{(\alpha, \beta)}(h)$.

В этой работе рассматривается оператор обобщенного сдвига, ряд Фурье–Якоби (2) которого “несимметричен”, и с его помощью доказывается аналог утверждения (1).

Обозначим через L_p множество функций f , заданных на отрезке $[-1, 1]$, таких, что для $1 \leq p < \infty$ каждая функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а для $p = \infty$ каждая функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\|f\|_{\infty} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Через $L_{p, \alpha}$ обозначим множество функций f таких, что $f(x)(1-x^2)^{\alpha} \in L_p$, причем

$$\|f\|_{p, \alpha} = \|f(x)(1-x^2)^{\alpha}\|_p.$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше, чем $n - 1$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha} = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha}.$$

Обозначим через $E(p, \alpha, r)$ класс функций $f \in L_{p,\alpha}$, удовлетворяющих условию

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq C n^{-r},$$

где $r > 0$ и C – некоторая постоянная, не зависящая от n ($n \in \mathbb{N}$).

Для функции $f \in L_{p,\alpha}$ введем оператор обобщенного сдвига по правилу

$$\begin{aligned} \hat{T}_t(f, x) &= \frac{1}{\pi(1-x^2)} \int_0^\pi f(x \cos t + \cos \varphi \sin t \sqrt{1-x^2}) \\ &\quad \times (1 - (x \cos t + \cos \varphi \sin t \sqrt{1-x^2})^2 - 2 \sin^2 t \sin^2 \varphi + 4(1-x^2) \sin^2 t \sin^4 \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

и при помощи этого оператора обобщенного сдвига определим обобщенный модуль непрерывности

$$\tilde{\omega}(f, \delta)_{p,\alpha} = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(x) - \hat{T}_t(f, x)\|_{p,\alpha}.$$

Обозначим через $H(p, \alpha, r)$ класс функций $f \in L_{p,\alpha}$, удовлетворяющих условию

$$\tilde{\omega}(f, \delta)_{p,\alpha} \leq C \delta^r,$$

где $r > 0$ и C – некоторая постоянная, не зависящая от δ . Цель статьи – доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны числа p, α и r такие, что $0 < r < 2$, $1 \leq p \leq \infty$; $1/2 < \alpha \leq 1$ при $p = 1$, $1 - 1/(2p) < \alpha < 3/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq \alpha < 3/2$ при $p = \infty$. Тогда классы функций $E(p, \alpha, r)$ и $H(p, \alpha, r)$ совпадают.

Теорема 1 вытекает из доказываемых ниже теорем 2 и 3.

Будем обозначать через $\tilde{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Якоби, т.е. многочлены степени k , ортогональные друг другу с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на отрезке $[-1, 1]$ и нормированные условием $\tilde{P}_k^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$.

Через $a_k(F)$ обозначим коэффициенты Фурье–Якоби интегрируемой с весом $(1-x^2)^2$ на отрезке $[-1, 1]$ функции F по системе многочленов Якоби $\{\tilde{P}_k^{(2,2)}(x)\}_{k=0}^\infty$, т.е.

$$a_k(F) = \int_{-1}^1 F(x) \tilde{P}_k^{(2,2)}(x) (1-x^2)^2 dx.$$

Определим операторы, играющие в дальнейшем вспомогательную роль:

$$T_y^1(f, x) = \frac{1}{\pi(1-x^2)} \int_{-1}^1 f(R) ((1-R^2) - 2(1-y^2)(1-z^2)) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$T_y^2(f, x) = \frac{8}{3\pi} \int_{-1}^1 f(R) (1-z^2)^2 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$T_y^3(f, x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(R) (1-z^2) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$T_y^4(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(R) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

где $R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

ЛЕММА 1. Операторы T_y^1, T_y^2, T_y^3 и T_y^4 обладают следующими свойствами:

- 1) $T_y^1(\tilde{P}_\nu^{(2,2)}, x) = \tilde{P}_\nu^{(2,2)}(x) \cdot \tilde{P}_{\nu+2}^{(0,0)}(y);$
- 2) $T_y^2(\tilde{P}_\nu^{(2,2)}, x) = \tilde{P}_\nu^{(2,2)}(x) \cdot \tilde{P}_\nu^{(2,2)}(y);$
- 3) $T_y^3(\tilde{P}_\nu^{(1,1)}, x) = \tilde{P}_\nu^{(1,1)}(x) \cdot \tilde{P}_\nu^{(1,1)}(y);$
- 4) $T_y^4(\tilde{P}_\nu^{(0,0)}, x) = \tilde{P}_\nu^{(0,0)}(x) \cdot \tilde{P}_\nu^{(0,0)}(y).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$$P_{m,n}^l(z) = \tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) \binom{\nu+\alpha}{\nu} 2^{-m} i^{m-n} \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!}} (1-z)^{(m-n)/2} (1+z)^{(m+n)/2},$$

где $l = \nu + (\alpha + \beta)/2$, $m = (\alpha + \beta)/2$, $n = (\beta - \alpha)/2$.

Полагая в формуле умножения (см. [5, с. 140]) для функций $P_{m,n}^l$ $n = 0$, $m = 2$, $k = 0$, получим свойство 1).

Применяя теорему сложения (см. [6, с. 179]) для ультрасферических многочленов, получим свойства 2)–4). Лемма доказана.

Положим $y = \cos t$, $z = \cos \varphi$ в операторе $\hat{T}_t(f, x)$, обозначим его через $T_y(f, x)$ и перепишем в виде

$$T_y(f, x) = \frac{1}{\pi(1-x^2)} \int_{-1}^1 ((1-R^2) - 2(1-y^2)(1-z^2) + 4(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)^2) f(R) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

где $R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

ЛЕММА 2. Оператор $T_y(f, x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) *линеен*;
- 2) $T_1(f, x) = f(x);$
- 3) $T_y(\tilde{P}_\nu^{(2,2)}, x) = \tilde{P}_\nu^{(2,2)}(x) \cdot R_\nu(y)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, где

$$R_\nu(y) = \tilde{P}_{\nu+2}^{(0,0)}(y) + \frac{3}{2}(1-y^2)\tilde{P}_\nu^{(2,2)}(y);$$

- 4) $T_y(1, x) = 1;$
- 5) $a_k(T_y(f, x)) = R_k(y)a_k(f)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 2) очевидны. Для доказательства свойства 3) отметим, что справедливо равенство

$$T_y(f, x) = T_y^1(f, x) + \frac{3}{2}(1-y^2)T_y^2(f, x).$$

Поэтому, применяя свойства операторов T_y^1 и T_y^2 из леммы 1, имеем

$$\begin{aligned} T_y(\tilde{P}_\nu^{(2,2)}, x) &= \tilde{P}_\nu^{(2,2)}(x) \cdot \tilde{P}_{\nu+2}^{(0,0)}(y) + \frac{3}{2}(1-y^2)\tilde{P}_\nu^{(2,2)}(x)\tilde{P}_\nu^{(2,2)}(y) \\ &= \tilde{P}_\nu^{(2,2)}(x) \left(\tilde{P}_{\nu+2}^{(0,0)}(y) + \frac{3}{2}(1-y^2)\tilde{P}_\nu^{(2,2)}(y) \right), \end{aligned}$$

и свойство 3) доказано.

Свойство 4) вытекает из свойства 3) при $\nu = 0$.

Докажем теперь свойство 5). Рассмотрим

$$\begin{aligned} J &= a_k(T_y(f, x)) = \int_{-1}^1 T_y(f, x) \tilde{P}_k^{(2,2)}(x) (1-x^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((1-R^2)(1-x^2) - 2(1-y^2)(1-z^2)(1-x^2) \\ &\quad + 4(1-x^2)^2(1-y^2)(1-z^2)^2) f(R) \tilde{P}_k^{(2,2)}(x) \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}}. \end{aligned}$$

Сделаем в этом двойном интеграле замену переменных по формулам

$$x = Ry + v\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}, \quad z = \frac{R\sqrt{1-y^2} - vy\sqrt{1-R^2}}{\sqrt{1-(Ry+v\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2})^2}}, \quad (3)$$

получим, что

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(R) \tilde{P}_k^{(2,2)}(Ry + v\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}) \\ &\quad \times ((1-R^2)(1-(Ry+v\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2})^2) \\ &\quad - 2(1-y^2)(1-R^2)(1-v^2) + 4(1-R^2)^2(1-v^2)^2(1-y^2)) \frac{dR dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= \int_{-1}^1 f(R)(1-R^2)^2 \cdot \frac{1}{\pi(1-R^2)} \int_{-1}^1 \tilde{P}_k^{(2,2)}(Ry + v\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2}) \\ &\quad \times ((1-(Ry+v\sqrt{1-R^2}\sqrt{1-y^2})^2) \\ &\quad - 2(1-y^2)(1-v^2) + 4(1-y^2)(1-v^2)^2(1-R^2)) \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} dR \\ &= \int_{-1}^1 f(R)(1-R^2)^2 T_y(\tilde{P}_k^{(2,2)}, R) dR. \end{aligned}$$

Используя свойство 3) оператора T_y из леммы 2, имеем

$$J = \int_{-1}^1 f(R)(1-R^2)^2 \tilde{P}_k^{(2,2)}(R) R_k(y) dR = R_k(y) a_k(f),$$

и свойство 5) доказано.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$J_2(x, y) = T_y^4(\tilde{P}_n^{(1,1)}, x) - T_y^3(\tilde{P}_n^{(1,1)}, x) = (1 - x^2)(1 - y^2) \sum_{m=0}^{n-2} \gamma_m(x) \tilde{P}_m^{(2,2)}(y),$$

где $\gamma_m(x)$ – многочлены от x степени не выше, чем $n - 2$ (для $n \geq 2$), $\gamma_m(x) = 0$ для $n = 0$ и $n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\tilde{P}_0^{(1,1)}(x) = \tilde{P}_0^{(0,0)}(x) = 1$ и $\tilde{P}_1^{(1,1)}(x) = \tilde{P}_1^{(0,0)}(x) = x$, то $J_2 = 0$ для $n = 0$ и $n = 1$. Далее будем считать, что $n \geq 2$.

а) Пусть $n = 2l$. Так как

$$\tilde{P}_n^{(1,1)}(x) = \sum_{\mu=0}^l \lambda_\mu \tilde{P}_{2\mu}^{(0,0)}(x),$$

то, применяя свойства 1)–4) из леммы 1, получаем, что

$$J_2(x, y) = \sum_{\mu=0}^l \lambda_\mu \tilde{P}_{2\mu}^{(0,0)}(x) \tilde{P}_{2\mu}^{(0,0)}(y) - \tilde{P}_n^{(1,1)}(x) \tilde{P}_n^{(1,1)}(y). \quad (4)$$

Запишем $J_2(x, y)$ в виде

$$J_2(x, y) = \sum_{q=0}^n \sigma_q(y) (1 - x)^q,$$

где $\sigma_q(y)$ – многочлены от y степени не выше, чем n . Но тогда $J_2(1, y) = \sigma_0(y)$. В то же время, поскольку $\tilde{P}_k^{(0,0)}(1) = 1$ ($k \in \mathbb{N}$), из (4) получим, что

$$J_2(1, y) = \sum_{\mu=0}^l \lambda_\mu \tilde{P}_{2\mu}^{(0,0)}(y) - \tilde{P}_n^{(1,1)}(y) = \tilde{P}_n^{(1,1)}(y) - \tilde{P}_n^{(1,1)}(y) = 0.$$

Следовательно, $\sigma_0(y) = 0$. Поэтому

$$J_2(x, y) = (1 - x) \sum_{q=1}^n \sigma_q(y) (1 - x)^{q-1} = (1 - x) \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(y) (1 + x)^i,$$

где $\theta_i(y)$ – многочлены от y степени не выше, чем n . Но тогда $J_2(-1, y) = 2\theta_0(y)$. В то же время, поскольку $\tilde{P}_k^{(0,0)}(-1) = (-1)^N$ ($k \in \mathbb{N}$), из (4) получаем, что

$$J_2(-1, y) = \sum_{\mu=0}^l \lambda_\mu \tilde{P}_{2\mu}^{(0,0)}(y) - \tilde{P}_n^{(1,1)}(y) = 0,$$

т.е. $\theta_0(y) = 0$. Поэтому

$$J_2(x, y) = (1 - x^2) \sum_{\nu=0}^{n-2} \omega_\nu(y) x^\nu,$$

где $\omega_\nu(y)$ – многочлены от y степени не выше, чем n . Теперь перепишем $J_2(x, y)$ в виде

$$J_2(x, y) = (1 - x^2) \sum_{\lambda=0}^n w_\lambda(x) (1 - y)^\lambda,$$

где $w_\lambda(x)$ – многочлены от x степени не выше, чем $n - 2$. Но тогда $J_2(x, 1) = (1 - x^2)w_0(x)$. В то же время,

$$J_2(x, 1) = \sum_{\mu=0}^l \lambda_\mu \tilde{P}_{2\mu}^{(0,0)}(x) - \tilde{P}_n^{(1,1)}(x) = 0,$$

т.е. $w_0(x) = 0$. Поэтому

$$J_2(x, y) = (1 - x^2)(1 - y) \sum_{j=0}^{n-1} v_j(x) (1 + y)^j,$$

где $v_j(x)$ – многочлены от x степени не выше, чем $n - 2$. Но тогда

$$J_2(x, -1) = 2(1 - x^2)v_0(x).$$

В то же время, $J_2(x, -1) = 0$, т.е. $v_0(x) = 0$. Поэтому

$$J_2(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \sum_{m=0}^{n-2} \gamma_m(x) \tilde{P}_m^{(2,2)}(y),$$

где $\gamma_m(x)$ – многочлены от x степени не выше, чем $n - 2$.

б) Если $n = 2l + 1$, то рассуждения проводятся аналогично доказательству пункта а), и поэтому опускаются.

ЛЕММА 4. Пусть $R = xy + z\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}$, $a = \sqrt{1 - x^2}y - xz\sqrt{1 - y^2}$, $b = \sqrt{1 - y^2}x - yz\sqrt{1 - x^2}$, $A = (1 - R^2) - 2(1 - y^2)(1 - z^2) + 4(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)^2$. Тогда справедливы неравенства

$$(1 - y^2)(1 - z^2) \leq 1 - R^2, \quad (5)$$

$$|A| \leq 7(1 - R^2), \quad (6)$$

$$(1 - x^2)(1 - z^2) \leq 1 - R^2, \quad (7)$$

$$b^2 \leq 1 - R^2. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$\begin{aligned} R^2 + a^2 &= x^2 y^2 + z^2(1-x^2)(1-y^2) + 2xyz\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2} \\ &\quad + (1-x^2)y^2 + z^2 x^2(1-y^2) - 2xyz\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= y^2 + z^2(1-y^2) = 1 - (1-y^2)(1-z^2). \end{aligned}$$

Откуда, в частности, следует неравенство (5). Тогда

$$|A| \leq 1 - R^2 + (1-y^2)(1-z^2)(2+4(1-x^2)(1-z^2)) \leq 1 - R^2 + 6(1-R^2) = 7(1-R^2),$$

и, тем самым, неравенство (6) доказано. Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} R^2 + b^2 &= x^2 y^2 + z^2(1-x^2)(1-y^2) + 2xyz\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2} \\ &\quad + (1-y^2)x^2 + z^2 y^2(1-x^2) - 2xyz\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= x^2 + z^2(1-x^2) = 1 - (1-x^2)(1-z^2). \end{aligned}$$

Откуда следует, что выполнены неравенства (7) и (8).

ЛЕММА 5. Пусть числа p и α таковы, что $1 \leq p \leq \infty$ и $1/2 < \alpha \leq 1$ при $p = 1$, $1 - 1/(2p) < \alpha < 3/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq \alpha < 3/2$ при $p = \infty$. Пусть $f \in L_{p,\alpha}$. Тогда справедливо неравенство

$$\|T_y(f, x)\|_{p,\alpha} \leq C \|f\|_{p,\alpha},$$

где постоянная C не зависит от f и y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Рассмотрим сначала случай $1 \leq p < \infty$. Пусть

$$\begin{aligned} J &= \|T_y(f, x)\|_{p,\alpha}^p = \frac{1}{\pi^p} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{A}{1-x^2} f(R) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right|^p (1-x^2)^{\alpha p} dx \\ &\leq \frac{1}{\pi^p} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 |A| \cdot |f(R)| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right)^p (1-x^2)^{(\alpha-1)p} dx, \end{aligned}$$

где $A = (1-R^2) - 2(1-y^2)(1-z^2) + 4(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)^2$. Применяя оценку для A из леммы 4, получаем, что

$$J \leq \frac{7^p}{\pi^p} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (1-R^2) |f(R)| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right)^p (1-x^2)^{(\alpha-1)p} dx. \quad (9)$$

Если $p = 1$, то перепишем неравенство (9) в виде

$$J \leq \frac{7}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(R)| (1-R^2) ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-1} (1-z^2)^{1-\alpha} \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Если $\alpha \leq 1$, то отсюда следует, что

$$J \leq \frac{7}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R^2)((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-1} \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Сделаем в этом двойном интеграле замену переменных по формулам (3), получим, что

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{7}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R^2)^\alpha (1-v^2)^{\alpha-1} \frac{dR dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= \frac{7}{\pi} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R^2)^\alpha dR \int_{-1}^1 (1-v^2)^{\alpha-3/2} dv. \end{aligned}$$

Если $\alpha > 1/2$, то отсюда следует, что $J < C_1 \|f\|_{1,\alpha}$.

Если $1 < p < \infty$, то перепишем неравенство (9) в виде

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{7^p}{\pi^p} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (1-R^2) |f(R)| ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-1} \right. \\ &\quad \times (1-z^2)^{-\alpha+1/2+1/(2p)} \frac{dz}{(1-z^2)^{1/(2p)}} \Big)^p dx. \end{aligned}$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Гёльдера и учитывая $\alpha < 3/2 - 1/(2p)$, получаем, что

$$J \leq C_2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{(1-R^2) |f(R)| ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-1}\}^p \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Сделаем в этом двойном интеграле замену переменных по формулам (3), имеем

$$\begin{aligned} J &\leq C_2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{|f(R)|(1-R^2)^\alpha (1-v^2)^{\alpha-1}\}^p \frac{dR dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= C_2 \int_{-1}^1 |f(R)|^p (1-R^2)^{\alpha p} dR \cdot \int_{-1}^1 (1-v^2)^{\alpha p - p - 1/2} dv. \end{aligned}$$

Если $\alpha > 1 - 1/(2p)$, то отсюда получаем, что $J \leq C_3 \|f\|_{p,\alpha}^p$.

б) Пусть теперь $p = \infty$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} J &= |T_y(f, x)(1-x^2)^\alpha| = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 A |f(R)| (1-x^2)^{\alpha-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |A| \cdot |f(R)| (1-x^2)^{\alpha-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \end{aligned}$$

Применяя оценку (6) из леммы 4, получим, что

$$J \leq \frac{7}{\pi} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R^2)(1-x^2)^{\alpha-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Применяя затем оценку (7) из леммы 4 и учитывая, что $\alpha - 1 \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{7}{\pi} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R^2) \left(\frac{1-R^2}{1-z^2} \right)^{\alpha-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{7}{\pi} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R^2)^\alpha (1-z^2)^{-\alpha+1/2} dz. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$J \leq \frac{7}{\pi} \|f\|_{\infty, \alpha} \int_{-1}^1 (1-z^2)^{-\alpha+1/2} dz.$$

Так как $\alpha < 3/2$, получаем, что $J \leq C_4 \|f\|_{\infty, \alpha}$, и лемма 5 доказана полностью.

ЛЕММА 6 [7]. Пусть числа p, μ и ρ таковы, что $\rho \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$; $\mu > -2/p$ для $1 \leq p < \infty$ и $\mu \geq 0$ для $p = \infty$. Пусть $Q_n(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше, чем $n-1$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|Q_n(x)\sqrt{1-x^2}^\mu\|_{p,0} &\leq C_1 n^\rho \|Q_n(x)\sqrt{1-x^2}^{\mu+\rho}\|_{p,0}, \\ \|Q'_n(x)\sqrt{1-x^2}^{\mu+1}\|_{p,0} &\leq C_2 n \|Q_n(x)\sqrt{1-x^2}^\mu\|_{p,0}, \end{aligned}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от n .

ЛЕММА 7. Пусть q и m – натуральные числа. Пусть функция f суммируема с весом $(1-x^2)^2$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда функция

$$Q_1(x) = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} T_{\cos t}^1(f, x) \sin^3 t \, dt$$

есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $(q+2)(m-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$D = \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} = \sum_{l=0}^{(q+2)(m-1)} \alpha_l \cos lt = \sum_{l=0}^{(q+2)(m-1)} b_l (\cos t)^l,$$

то

$$D \cdot \sin^2 t = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)+2} a_k \tilde{P}_k^{(1,1)}(\cos t).$$

Поэтому

$$Q_1(x) = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)+2} a_k \varphi_k(x),$$

где

$$\varphi_k(x) = \int_0^\pi T_{\cos t}^1(f, x) \tilde{P}_k^{(1,1)}(\cos t) \sin t \, dt.$$

Сделав замену переменных $y = \cos t$, получим, что

$$\varphi_k(x) = \int_{-1}^1 T_y^1(f, x) \tilde{P}_k^{(1,1)}(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{A_1}{1-x^2} f(R) \tilde{P}_k^{(1,1)}(y) dy,$$

где $R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$, $A_1 = 1 - R^2 - 2(1-y^2)(1-z^2)$. Сделав в двойном интеграле замену переменных по формулам

$$y = xR + v\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-R^2}, \quad z = \frac{R\sqrt{1-x^2} - xv\sqrt{1-R^2}}{\sqrt{1-(xR + v\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-R^2})^2}}, \quad (10)$$

получим, что

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1-R^2}{1-x^2} (2v^2-1) f(R) \tilde{P}_k^{(1,1)}(xR + v\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-R^2}) \frac{dR dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= \int_{-1}^1 f(R) \frac{1-R^2}{1-x^2} \left(-\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-v^2) \tilde{P}_k^{(1,1)}(xR + v\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-R^2}) \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{P}_k^{(1,1)}(xR + v\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-R^2}) \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \right) dR \\ &= \int_{-1}^1 f(R) \frac{1-R^2}{1-x^2} (-T_R^3(\tilde{P}_k^{(1,1)}, x) + T_R^4(\tilde{P}_k^{(1,1)}, x)) dR. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \int_{-1}^1 f(R) (1-R^2)^2 \sum_{m=0}^{k-2} \gamma_m(x) \tilde{P}_m^{(2,2)}(R) dR \\ &= \sum_{m=0}^{k-2} \gamma_m(x) \int_{-1}^1 f(R) \tilde{P}_m^{(2,2)}(R) (1-R^2)^2 dR = \sum_{m=0}^{k-2} \gamma_m(x) a_m(f), \end{aligned}$$

$a_m(f)$ – коэффициент Фурье–Якоби функции f по системе многочленов $\{\tilde{P}_m^{(2,2)}(x)\}_{m=0}^\infty$. Поскольку $\gamma_m(x)$ – многочлены от x степени не выше, чем $n-2$ для $k \geq 2$ и $\gamma_m(x) = 0$ для $k=0$ и $k=1$, то из последнего равенства следует, что $\varphi_k(x)$ есть алгебраический многочлен от x степени не выше, чем $k-2$. Но тогда $Q_1(x)$ есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $(q+2)(m-1)$, и лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Пусть q и m – натуральные числа. Пусть функция f суммируема с весом $(1-x^2)^2$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда функция

$$Q_2(x) = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} T_{\cos t}^2(f, x) \sin^5 t dt$$

есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $(q+2)(m-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в лемме 7,

$$D = \sum_{l=0}^{(q+2)(m-1)} b_l (\cos t)^l.$$

Поэтому

$$Q_2(x) = \int_0^\pi \sum_{l=0}^{(q+2)(m-1)} b_l (\cos t)^l T_{\cos t}^2(f, x) \sin^5 t \, dt = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} c_k \psi_k(x),$$

где

$$\psi_k(x) = \int_0^\pi T_{\cos t}^2(f, x) \tilde{P}_k^{(2,2)}(\cos t) \sin^5 t \, dt.$$

Сделав замену переменных $y = \cos t$, получим, что

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= \int_{-1}^1 T_y^2(f, x) \tilde{P}_k^{(2,2)}(y) (1-y^2)^2 \, dy \\ &= \frac{8}{3\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(R) \tilde{P}_k^{(2,2)}(y) (1-y^2)^2 (1-z^2)^2 \frac{dz \, dy}{\sqrt{1-z^2}}, \end{aligned}$$

где $R = xy + z\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}$. Сделав в двойном интеграле замену переменных по формулам (10), имеем

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= \frac{8}{3\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(R) \tilde{P}_k^{(2,2)}(xR + v\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-R^2}) (1-R^2)^2 (1-v^2)^2 \frac{dR \, dv}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= \int_{-1}^1 f(R) (1-R^2)^2 T_R^2(\tilde{P}_k^{(2,2)}, x) \, dR. \end{aligned}$$

Применяя свойство оператора T_y^2 , отмеченное в лемме 1, получаем, что

$$\psi_k(x) = \tilde{P}_k^{(2,2)}(x) \int_{-1}^1 f(R) (1-R^2)^2 \tilde{P}_k^{(2,2)}(R) \, dR = a_k(f) \tilde{P}_k^{(2,2)}(x),$$

$a_k(f)$ — коэффициент Фурье–Якоби функции f по системе многочленов $\{\tilde{P}_k^{(2,2)}(x)\}_{k=0}^\infty$.

Так как $\tilde{P}_k^{(2,2)}(x)$ есть многочлен от x степени k , то $Q_2(x)$ есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $(q+2)(m-1)$, и лемма 8 доказана.

ЛЕММА 9. Пусть q и m — натуральные числа. Пусть функция f суммируема с весом $(1-x^2)^2$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда функция

$$Q(x) = \int_0^\pi \frac{1}{\gamma_m} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} T_{\cos t}(f, x) \sin^3 t \, dt,$$

где

$$\gamma_m = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} \sin^3 t \, dt$$

есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $(q+2)(m-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию $Q(x)$ можно записать в виде

$$Q(x) = \frac{1}{\gamma_m} \left(Q_1(x) + \frac{3}{2} Q_2(x) \right).$$

Но тогда на основании лемм 7 и 8 получаем, что $Q(x)$ есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $(q+2)(m-1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны числа p, α и r такие, что $0 < r < 2$, $1 \leq p \leq \infty$; $\alpha \leq 2$ при $p = 1$ и $\alpha < 3 - 1/p$ при $1 < p \leq \infty$. Пусть $f \in L_{p,\alpha}$ и $\|f(x) - \hat{T}_t(f, x)\|_{p,\alpha} \leq M|t|^r$. Тогда

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq CMn^{-r}, \quad (11)$$

где постоянная C не зависит от f, M и n ($n \in \mathbb{N}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы 2 если $f \in L_{p,\alpha}$, то $f \in L_{1,2}$. Выберем натуральное число q такое, что $q > r$, и для каждого натурального n выберем натуральное число m так, чтобы выполнялось условие $n/(q+2) \leq m \leq n/(q+2) + 1$. Для этих m и q многочлен Q , определенный в лемме 9, есть многочлен степени не выше, чем n . Поэтому

$$E_n(f)_{p,\alpha} \leq \|f - Q\|_{p,\alpha} = \left\| \int_0^\pi \frac{1}{\gamma_m} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} (f(x) - \hat{T}_t(f, x)) \sin^3 t \, dt \right\|_{p,\alpha}.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского и используя условие теоремы, получим, что

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p,\alpha} &\leq \int_0^\pi \frac{1}{\gamma_m} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} \sin^3 t \|f(x) - \hat{T}_t(f, x)\|_{p,\alpha} \, dt \\ &\leq M \int_0^\pi \frac{1}{\gamma_m} t^r \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} \sin^3 t \, dt. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая традиционную оценку последнего интеграла, получаем (11), что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны числа p, α и r такие, что $0 < r < 2$, $1 \leq p \leq \infty$; $1/2 < \alpha \leq 1$ при $p = 1$, $1 - 1/(2p) < \alpha < 3/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq \alpha < 3/2$ при $p = \infty$. Пусть $f \in L_{p,\alpha}$ и $E_n(f)_{p,\alpha} \leq Mn^{-r}$. Тогда

$$\|f(x) - \hat{T}_t(f, x)\|_{p,\alpha} \leq CM|t|^r,$$

где постоянная C не зависит от f, M и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_n(x)$ – многочлены степени не выше, чем $n - 1$, такие, что

$$\|f - P_n\|_{p,\alpha} = E_n(f)_{p,\alpha}.$$

Рассмотрим многочлены $Q_k(x) = P_{2k}(x) - P_{2k-1}(x)$ для $k \geq 1$ и $Q_0(x) = P_1(x)$. Ясно, что для $k \geq 1$

$$\|Q_k(x)\|_{p,\alpha} \leq C_1 M 2^{-kr}.$$

Для $0 < t \leq \pi$ оценим

$$J = \|f(x) - \hat{T}_t(f, x)\|_{p,\alpha}.$$

Для любого натурального числа N имеем

$$\begin{aligned} J &\leq \left\| f(x) - \sum_{k=0}^N Q_k(x) \right\|_{p,\alpha} + \left\| \hat{T}_t(f, x) - \sum_{k=0}^N \hat{T}_t(Q_k, x) \right\|_{p,\alpha} \\ &\quad + \left\| \sum_{k=0}^N (\hat{T}_t(Q_k, x) - Q_k(x)) \right\|_{p,\alpha} \\ &\leq \|f - P_{2N}\|_{p,\alpha} + \|\hat{T}_t(f - P_{2N}, x)\|_{p,\alpha} + \sum_{k=1}^N \|\hat{T}_t(Q_k, x) - Q_k(x)\|_{p,\alpha}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 5, получим, что

$$J \leq C_2 \left(E_{2N}(f)_{p,\alpha} + \sum_{k=1}^N \|\varphi_k\|_{p,\alpha} \right),$$

где $\varphi_k(x) = \hat{T}_t(Q_k, x) - Q_k(x)$. Можно проверить, что

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \frac{1}{2\pi(1-x^2)} \int_0^t \int_{-u}^u \int_0^\pi (A(v)(R'_v)^2 Q''_k(R_v) \\ &\quad - (A(v)R_v - 2A'(v)R'_v)Q'_k(R_v) - A''(v)Q_k(R_v)) d\varphi dv du, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_v &= x \cos v + \cos \varphi \sin v \sqrt{1-x^2}, \\ A(v) &= 1 - (x \cos v + \cos \varphi \sin v \sqrt{1-x^2})^2 - 2 \sin^2 v \sin^2 \varphi + 4(1-x^2) \sin^2 v \sin^4 \varphi. \end{aligned}$$

Используя лемму 4 и очевидные оценки, получим, что

$$\varphi_k(x) = \frac{C_3}{1-x^2} \int_0^t \int_{-u}^u \int_0^\pi B(R_v) d\varphi dv du,$$

где $B(R_v) = (1 - R_v^2)^2 |Q_k''(R_v)| + (1 - R_v^2) |Q_k'(R_v)| + |Q_k(R_v)|$. Поэтому применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$J_k = \|\varphi_k\|_{p,\alpha} \leq C_3 \int_0^t \int_{-u}^u \int_0^\pi \left\| \frac{B(R_v)}{1-x^2} \right\|_{p,\alpha} d\varphi dv du. \quad (12)$$

Пусть $p = 1$. Тогда, полагая $z = \cos \varphi$ и учитывая, что $\alpha \leq 1$, получаем, что

$$\begin{aligned} J_k &\leq C_3 \int_0^t \int_{-u}^u \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |B(R_v)| ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-1} (1-z^2)^{1-\alpha} \frac{dx dz}{\sqrt{1-z^2}} dv du \\ &\leq C_3 \int_0^t \int_{-u}^u \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |B(R_v)| ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-1} \frac{dx dz}{\sqrt{1-z^2}} dv du. \end{aligned}$$

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда, полагая $z = \cos \varphi$, применяя неравенство Гёльдера к внутреннему интегралу и учитывая, что $\alpha < 3/2 - 1/(2p)$, имеем

$$\begin{aligned} J_k &\leq C_3 \int_0^t \int_{-u}^u \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 |B(R_v)|^p ((1-x^2)(1-z^2))^{(\alpha-1)p} dx \right)^{1/p} \\ &\quad \times (1-z^2)^{-\alpha+1/2+1/(2p)} \frac{dz}{(1-z^2)^{1/(2p)}} dv du \\ &\leq C_4 \int_0^t \int_{-u}^u \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |B(R_v)|^p ((1-x^2)(1-z^2))^{(\alpha-1)p} \frac{dx dz}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{1/p} dv du. \end{aligned}$$

Итак, в условиях теоремы при $1 \leq p < \infty$ получаем, что

$$J_k \leq C_5 \int_0^t \int_{-u}^u \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |B(R_v)|^p ((1-x^2)(1-z^2))^{(\alpha-1)p} \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}} \right\}^{1/p} dv du.$$

Делая в двойном интеграле в фигурных скобках замену переменных по формулам

$$R = x \cos v + z \sin v \sqrt{1-x^2}, \quad w = \frac{x \sin v - z \cos v \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(x \cos v + z \sin v \sqrt{1-x^2})^2}},$$

имеем

$$J_k \leq C_5 \int_0^t \int_{-u}^u \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |B(R)|^p ((1-R^2)(1-w^2))^{(\alpha-1)p} \frac{dR dw}{\sqrt{1-w^2}} \right\}^{1/p} dv du.$$

Так как в условиях теоремы $\alpha > 1 - 1/(2p)$, отсюда получаем, что

$$J_k \leq C_6 \int_0^t \int_{-u}^u \left(\int_{-1}^1 |B(R)|^p (1-R^2)^{(\alpha-1)p} dR \right)^{1/p} dv du \leq C_7 t^2 \|B(R)\|_{p,\alpha-1}.$$

Пусть теперь $p = \infty$. Тогда, учитывая, что из леммы 4 следует оценка $1 - x^2 \leq (1 - R_v^2)/(1 - z^2)$ и что $\alpha \geq 1$, из неравенства (12) имеем

$$\begin{aligned} J_k &\leq C_8 \int_0^t \int_{-u}^u \int_{-1}^1 \max_{-1 \leq x \leq 1} |B(R_v)| (1 - x^2)^{\alpha-1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} dv du \\ &\leq C_8 \|B(R_v)\|_{\infty, \alpha-1} \int_0^t \int_{-u}^u \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{-\alpha+1/2} dz dv du. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая $\alpha < 3/2$, получаем, что

$$J_k \leq C_9 t^2 \|B(R)\|_{\infty, \alpha-1}.$$

Итак, для всех $p \in [1, \infty]$:

$$J_k \leq C_{10} t^2 \|B(R)\|_{p, \alpha-1}.$$

Откуда, учитывая явный вид $B(R)$ и лемму 6, имеем

$$\begin{aligned} J_k &\leq C_{11} t^2 (\|(1 - R^2)Q_k''(R)\|_{p, \alpha} + \|Q_k'(R)\|_{p, \alpha} + \|Q_k(R)\|_{p, \alpha-1}) \\ &\leq C_{12} t^2 2^{2k} \|Q_k(R)\|_{p, \alpha} \leq C_{13} M t^2 2^{k(2-r)}. \end{aligned}$$

Используя эту оценку и выбирая натуральное число N так, чтобы $\pi/2^N < t \leq 2\pi/2^N$, получаем, что

$$J \leq C_{14} M \left(2^{-Nr} + 2^{2N} \sum_{k=1}^N 2^{k(2-r)} \right) \leq C_{15} M 2^{-Nr} \leq C_{16} M |t|^r.$$

Итак, справедливость теоремы 3 доказана для $t \in (0, \pi]$; для $t = 0$ она очевидна; для $t \in [-\pi, 0)$ следует из равенства $T_{-t}(f, x) = T_t(f, x)$, для $|t| > \pi$ — из равенств $t = t_1 + 2k\pi$, где $|t_1| \leq \pi$, и $T_{t_1+2k\pi}(f, x) = T_{t_1}(f, x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pawelke S. Ein Satz von Jacksoncken Typ für algebraische Polynome // Acta Sci. Math. (Szeged). 1972. V. 33. №3–4. P. 323–336.
- [2] Butzer P. L., Stens R. L., Wehrens M. Higher-order moduli of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. V. 2. №2. P. 83–88.
- [3] Поталов М. К. Об условиях совпадения некоторых классов функций // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1980. Т. 6. С. 225–240.
- [4] Поталов М. К., Казимиров Г. И. О приближении алгебраическими многочленами функций, имеющих данный порядок k -го обобщенного модуля гладкости // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №3. С. 425–436.
- [5] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.
- [6] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
- [7] Поталов М. К. Некоторые неравенства для полиномов и их производных // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1960. №2. С. 10–20.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

05.01.98

Исправленный вариант

10.08.98