Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Сагиров, Степени неприводимых характеров 2-групп
Судзуки, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 258–263

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:07:48

УДК 512.54

СТЕПЕНИ НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРОВ 2-ГРУПП СУДЗУКИ

И. А. Сагиров

Получено описание степеней неприводимых характеров 2-групп Судзуки $A(m, \theta)$. Пусть порядок автоморфизма θ поля $GF(2^m)$ равен $k > 1$, $G = A(m, \theta)$, $\text{cd}(G)$ – множество степеней неприводимых характеров группы G . Если k нечетно, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{(m-m/k)/2}\}$; если $k = 2$, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2}\}$; если k четно и $k \neq 2$, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2}, 2^{m/2-m/k}\}$, причем G имеет $(2^m - 1)2^{m/k} / (2^{m/k} + 1)$ характеров степени $2^{m/2}$ и $(2^m - 1)2^{2m/k} / (2^{m/k} + 1)$ характеров степени $2^{m/2-m/k}$.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $\text{Irr}(G)$ – множество всех неприводимых характеров, $\text{Irr}_1(G)$ – множество всех нелинейных неприводимых характеров, $\text{cd}(G)$ – множество степеней неприводимых характеров группы G ; $\text{Cl}(G)$ – множество классов сопряженных элементов группы G , $k(G) = |\text{Cl}(G)|$.

Впервые 2-группы Судзуки введены в рассмотрение Хигманом, а наиболее полно исследованы в монографии Хушперта и Блэкберна [1, гл. VIII]. Напомним, как они определяются. Рассмотрим конечное поле $GF(q)$, $q = 2^m$, $m > 1$, и его автоморфизм θ порядка k для некоторого делителя $k > 1$ числа m , $m/k = n$. 2-группа Судзуки $A(m, \theta)$ – это множество упорядоченных пар элементов из $GF(q)$ с операцией $(a, b)(c, d) = (a + c, b + d + c\theta(a))$ для любых $a, b, c, d \in GF(q)$. В работе получено описание степеней неприводимых характеров групп $A(m, \theta)$, а именно, доказана

ТЕОРЕМА. Если $G = A(m, \theta)$ – 2-группа Судзуки порядка q^2 , где $m > 1$ целое, $q = 2^m$, θ – автоморфизм поля $GF(q)$ порядка $k > 1$ ($m/k = n$), то выполнено одно из следующих утверждений:

- 1) если k нечетно, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{(m-n)/2}\}$;
- 2) если $k = 2$, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2}\}$;
- 3) если k четно и $k \neq 2$, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2}, 2^{m/2-n}\}$, причем G имеет $(2^m - 1)2^n / (2^n + 1)$ характеров степени $2^{m/2}$ и $(2^m - 1)2^{2n} / (2^n + 1)$ характеров степени $2^{m/2-n}$.

Если автоморфизм θ нечетного порядка, то соответствующий результат известен [2]. Однако, для полноты изложения мы приведем доказательство этого факта.

2. Вспомогательные результаты. Всюду далее считаем, что G есть 2-группа Судзуки $A(m, \theta)$, θ – автоморфизм порядка k поля $GF(q)$, $q = 2^m$ и $m/k = n$.

ЛЕММА 2.1. $|G'| \geq 2^{m-n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутатор $[(a, b), (c, d)] = (0, a\theta(c) + c\theta(a))$ для произвольных $a, b, c, d \in GF(q)$. При $c = 1$ $[(a, b), (1, d)] = (0, a + \theta(a))$ и число различных коммутаторов такого вида равно $2^m/u$, где $u = |\{a \in GF(q) \mid a = \theta(a)\}|$. Тогда u – число неподвижных точек автоморфизма θ и $u = 2^n$. Поэтому $|G'| \geq 2^{m-n}$.

ЛЕММА 2.2. Число классов сопряженности группы G равно $2^{m+n} + 2^m - 2^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $Z(G) = \{(0, b) \mid b \in GF(q)\}$ и $|Z(G)| = 2^m$. Для произвольного элемента $(a, b) \in G$, $a \neq 0$, элемент $(c, d) \in C_G(a, b)$ тогда и только тогда, когда $[(a, b), (c, d)] = 1$, т.е. $a\theta(c) + c\theta(a) = 0$. Последнее означает, что $ca^{-1} = \theta(ca^{-1})$. Так как множество неподвижных точек θ изоморфно $GF(2^n)$, то $|C_G(a, b)| = 2^{m+n}$ и, следовательно, число сопряженных с произвольным элементом из $G \setminus Z(G)$ равно 2^{m-n} . Пусть r – число нецентральных G -классов. Тогда $r2^{m-n} + 2^m = 2^{2m} = |G|$. Отсюда $r = 2^{m+n} - 2^n$ и $k(G) = 2^{m+n} + 2^m - 2^n$.

ЛЕММА 2.3. Отображение $\varphi_\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda\theta(\lambda)b)$, где $\lambda \in GF(q)^*$ является автоморфизмом группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\lambda\theta(\lambda) = \mu$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(a, b) &= (\lambda a, \mu b), & \varphi_\lambda(c, d) &= (\lambda c, \mu d), \\ \varphi_\lambda((a, b)(c, d)) &= \varphi_\lambda(a + c, b + d + c\theta(a)) = (\lambda(a + c), \mu(b + d + c\theta(a))).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(a, b)\varphi_\lambda(c, d) &= (\lambda a, \mu b)(\lambda c, \mu d) = (\lambda a + \lambda c, \mu b + \mu d + \lambda c\theta(\lambda a)) \\ &= (\lambda(a + c), \mu b + \mu d + \mu c\theta(a)) = \varphi_\lambda((a, b)(c, d)).\end{aligned}$$

Поэтому φ_λ – эндоморфизм группы G и $\varphi_\lambda(a, b) = (0, 0)$ только в случае $(a, b) = (0, 0)$, значит φ_λ – автоморфизм.

Так как θ – автоморфизм поля $GF(q)$ порядка k , для любого $x \in GF(q)$ $\theta(x) = x^{2^{nt}}$ с некоторым t , $(t, k) = 1$. Зафиксируем это t .

ЛЕММА 2.4. Если $m = nk$ – произведение двух натуральных чисел и число t таково, что $(t, k) = 1$, то

$$(2^m - 1, 2^{nt} + 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ 2^n + 1, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, $(p^m - 1, p^n - 1) = p^{(m, n)} - 1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и простого p . Поэтому

$$(2^m - 1, 2^{2nt} - 1) = \begin{cases} 2^n - 1, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ 2^{2n} - 1, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Очевидно, $(2^m - 1, 2^{nt} + 1) \mid (2^m - 1, 2^{2nt} - 1)$.

Заметим, что $(2^{nt} + 1, 2^n - 1) = 1$. Действительно, если $p \mid (2^{nt} + 1, 2^n - 1)$ и p простое, то $2^n \equiv 1 \pmod{p}$, а значит, $2^{nt} \equiv 1^t \pmod{p}$. Получили противоречие, так как $2^{nt} \equiv -1 \pmod{p}$. Поэтому при нечетном k $(2^m - 1, 2^{nt} + 1) = 1$. В силу того что $2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$, $(2^{nt} + 1, 2^n - 1) = 1$ и $2^n + 1 \mid 2^{nt} + 1$, при четном k $(2^m - 1, 2^{nt} + 1) = 2^n + 1$.

ЛЕММА 2.5. Пусть λ – примитивный элемент поля $GF(q)$. Длина орбиты φ_λ на $G \setminus Z(G)$ равна $2^m - 1$. Длина орбиты φ_λ на $Z(G)^\#$ равна $2^m - 1$ при нечетном k и $(2^m - 1)/(2^n + 1)$ при четном k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $(a, b) \in G$ $\varphi_\lambda^i(a, b) = (\lambda^i, (\lambda\theta(\lambda))^i b)$. Пусть $a \neq 0$. Тогда $\varphi_\lambda^i(a, b) = (a, b)$ в том и только том случае, когда $(\lambda^i - 1)a = 0$, что невозможно при $0 < i < 2^m - 1$.

Пусть $a = 0$. Тогда $\varphi_\lambda^i(0, b) = (0, (\lambda\theta(\lambda))^i b) = (0, b)$ только при $(\lambda\theta(\lambda))^i = 1$. Так как $\theta(\lambda) = \lambda^{2^{nt}}$, последнее выполнено при $\lambda^{(2^{nt}+1)i} = 1$. В силу леммы 2.4 при нечетном k отсюда следует, что $2^m - 1 \mid i$ и все элементы $Z(G)^\#$ сопряжены под действием φ_λ . При четном k $(2^m - 1)/(2^n + 1) \mid i$ и длина φ_λ -орбиты элемента $(0, b)$ равна $(2^m - 1)/(2^n + 1)$.

СЛЕДСТВИЕ. При нечетном $k > 1$ $G' = Z(G)$.

ЛЕММА 2.6 [3], [4]. Если порядок коммутанта 2-группы G с циклической подгруппой Фраттини равен 2, то $G = (B * C) \times E_{2^s}$, где B экстраспециальна или единична, C полуабелева или циклическа, причем если B единична, то C полуабелева; $s \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в лемме 2.6 $|\Phi(G)| = 2$, то, в силу того что порядок подгруппы Фраттини полуабелевой 2-группы больше 2, C – циклическая группа.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, $\chi(1) = 2^a$, $Z_0 = Z(G) \cap \text{Ker } \chi$. Тогда $|Z(G) : Z_0| = 2$, $G' \not\leq Z_0$, $\text{cd}(G/Z_0) = \{1, 2^a\}$, $|\text{Irr}_1(G/Z_0)| = 2^{m-2a}$. Кроме того, любой нелинейный неприводимый характер G является характером ровно одной группы G/Z , где $|Z(G) : Z| = 2$ и $G' \not\leq Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $Z(G/\text{Ker } \chi)$ – циклическая группа, а $Z(G)$ – элементарная абелева группа, то $|Z(G) : Z_0| = 2$. Рассмотрим факторгруппу G/Z_0 . Так как $|(G/Z_0)'| = |\Phi(G/Z_0)| = 2$, то в силу леммы 2.6 и замечания $G/Z_0 = (B * C) \times E_{2^s}$, где B экстраспециальная, а C циклическая. В силу того что $\chi \in \text{Irr}_1(G/Z_0)$, выполнено $|B| = 2^{2a+1}$ и $\text{cd}(G/Z_0) = \{1, 2^a\}$. Так как $|G/Z_0| = 2^{m+1}$, то $|\text{Irr}_1(G/Z_0)| = 2^{m-2a}$. Последнее утверждение леммы очевидно, так как если χ является характером групп G/Z_1 и G/Z_2 ($|Z(G) : Z_i| = 2$) одновременно, то $Z(G) \leq \text{Ker } \chi$, а значит, $G' \leq \text{Ker } \chi$ и χ линеен.

3. Доказательство основных результатов.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $G = A(m, \theta)$ – 2-группа Судзуки и θ – автоморфизм поля $GF(q)$ нечетного порядка $k > 1$, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{(m-n)/2}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – примитивный элемент поля $GF(q)$. Рассмотрим действие автоморфизма φ_λ на подгруппах индекса 2 в $Z(G)$. Предположим, что существуют подгруппа Z_0 индекса 2 в $Z(G)$ и число l , $0 < l < 2^m - 1$, такие, что Z_0 φ_λ^l -допустима. Рассмотрим $Z(G)$ как векторное пространство размерности m над $GF(2)$. Тогда φ_λ^l – автоморфизм этого пространства, Z_0 – φ_λ^l -допустимое подпространство и φ_λ^l нечетного порядка. Тогда по теореме Машке существует элемент $(0, z) \in Z(G)^\#$ такой, что $Z(G) = Z_0 \times \langle (0, z) \rangle$ и $\varphi_\lambda^l(0, z) = (0, z)$. Это противоречит лемме 2.5, так как при нечетном k длина орбиты $(0, z)$ под действием φ_λ равна $2^m - 1$, а значит, φ_λ^l не имеет неподвижных точек.

Следовательно, $\{\varphi_\lambda^i(Z_0) \mid 0 < i \leq 2^m - 1, |Z(G) : Z_0| = 2\}$ – множество всех подгрупп индекса 2 в $Z(G)$. Так как каждый нелинейный неприводимый характер группы G принадлежит ровно одной группе $G/\varphi_\lambda^i(Z_0)$ (лемма 2.7), а они все изоморфны, то $|\text{cd}(G)| = 2$.

Пусть $\text{cd}(G) = \{1, d\}$. Так как $|\text{Lin}(G)| = 2^m$ (следствие из леммы 2.5), а G имеет $2^{m+n} - 2^n$ нелинейных характеров, то $2^m + (2^{m+n} - 2^n)d^2 = 2^{2m}$ и $d = 2^{(m-n)/2}$.

В дальнейшем будем считать, что k четно.

ЛЕММА 3.2. Пусть λ – примитивный элемент поля $GF(q)$. Тогда

- 1) если $m \neq 2n$, то $G' = Z(G)$ и $(G')^\#$ имеет $2^n + 1$ φ_λ -орбит длины $(2^m - 1)/(2^n + 1)$;
- 2) если $m = 2n$, то либо $G' = Z(G)$ и $(G')^\#$ имеет $2^n + 1$ φ_λ -орбит длины $(2^m - 1)/(2^n + 1) = 2^n - 1$, либо $|G'| = 2^{m/2}$ и все элементы $(G')^\#$ сопряжены под действием автоморфизма φ_λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа G' φ_λ -допустима и $G' \leq Z(G)$, то по лемме 2.5 элементы $(G')^\#$ разбиваются под действием φ_λ на орбиты длины $(2^m - 1)/(2^n + 1)$. Пусть число φ_λ -орбит элементов $(G')^\#$ равно l , а $|G'| = 2^f$. Тогда $2^f = l(2^m - 1)/(2^n + 1) + 1$, откуда $l - 1 = l2^m + 2^n - 2^f - 2^{f+n}$. Так как $|G'| \geq 2^{m-n}$ (лемма 2.1), то $2^n \mid 2^f$ и $2^n \mid l - 1$.

Поскольку $|G'| \leq 2^m$, либо $l = 2^n + 1$ и $|G'| = 2^m$, либо $l = 1$ и $|G'| = 2^f = (2^m - 1)/(2^n + 1) + 1$. Во втором случае $2^f(2^n + 1) = 2^n(2^m - n + 1)$, а значит, $m = 2n$ и $|G'| = 2^{m/2}$.

Будем считать, что $G' = Z(G)$, т.е. элементы $(G')^\#$ разбиваются под действием φ_λ на $2^n + 1$ орбит длины $(2^m - 1)/(2^n + 1)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть λ – примитивный элемент поля $GF(q)$. Тогда

- 1) множество подгрупп индекса 2 в $Z(G)$ имеет $2^n + 1$ φ_λ -орбит длины $(2^m - 1)/(2^n + 1)$;
- 2) под действием автоморфизма φ_λ неглавные неприводимые характеры G разбиваются на 2^n орбит длины $2^m - 1$ и $2^n + 1$ орбит длины $(2^m - 1)/(2^n + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 2.5 $|\varphi_\lambda|_{Z(G)}| = (2^m - 1)/(2^n + 1)$. Пусть $Z_0 \leq Z(G)$, $|Z(G) : Z_0| = 2$. Предположим, что $Z_0^{\varphi_\lambda^i} = Z_0$ для некоторого $0 < i < (2^m - 1)/(2^n + 1)$. Так как $(|\varphi_\lambda|, |Z(G)|) = 1$, по теореме Машке существует элемент $(0, z) \in Z(G)^\#$ такой, что $Z(G) = Z_0 \times \langle (0, z) \rangle$ и $\varphi_\lambda^i(0, z) = (0, z)$, а это противоречит лемме 2.5. Таким образом, длины φ_λ -орбит подгрупп индекса 2 в $Z(G)$ равны $(2^m - 1)/(2^n + 1)$, а число орбит $-2^n + 1$.

2) Определим действие φ_λ на $\text{Irr}(G)$. Пусть $\chi \in \text{Irr}(G)$ и R – представление G с характером χ . Тогда $R\varphi_\lambda^{-1}$ – также представление G , и его характер определяется как $\chi^{\varphi_\lambda}(g) = \chi(g^{\varphi_\lambda^{-1}})$ для любого $g \in G$. Очевидно, $\chi^{\varphi_\lambda} \in \text{Irr}(G)$.

Пусть $X = (\chi_i(K_j))$ – таблица характеров G , где $\{K_1, K_2, \dots, K_r\} = \text{Cl}(G)$, $r = 2^{m+n} + 2^m - 2^n$. Тогда φ_λ действует на столбцах X подстановкой π_1 , а на строках подстановкой π_2 . Причем если рассматривать π_1 и π_2 как элементы $\text{GL}(r, \mathbb{C})$, то $\pi_2 X = (\chi_i^{\varphi_\lambda}(K_j)) = (\chi_i(K_j^{\varphi_\lambda^{-1}})) = X\pi_1$. Так как X – невырожденная матрица, то $\pi_1 = X^{-1}\pi_2 X$ в $\text{GL}(r, \mathbb{C})$. Тогда согласно лемме Вишневецкого [5, гл. X] π_1 и π_2 сопряжены в S_r , а значит, имеют одинаковое цикленное строение. Действие φ_λ на

классах сопряженности из $G^\#$ известно: $2^n + 1$ орбит длины $(2^m - 1)/(2^n + 1)$ на центральных классах и 2^n орбит длины $2^m - 1$ на нецентральных.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, $\chi(1) = 2^a$. Тогда $m/2 - n \leq a \leq m/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.7 $\chi \in \text{Irr}_1(G/Z_0)$, где $Z_0 \leq Z(G)$, $|Z(G) : Z_0| = 2$ и $|\text{Irr}_1(G/Z_0)| = 2^{m-2a}$. Последнее означает, что $m - 2a \geq 0$ и $a \leq m/2$.

По лемме 3.3 множество подгрупп индекса 2 в $Z(G)$ разбито на $2^n + 1$ φ_λ -орбит длины $(2^m - 1)/(2^n + 1)$. Пусть $Z_1, \dots, Z_{2^n+1}$ — представители орбит. Тогда по лемме 2.7 $\text{cd}(G/Z_i) = \{1, 2^{a_i}\}$, $|\text{Irr}_1(G/Z_i)| = 2^{m-2a_i}$. Кроме того, любые две подгруппы индекса 2 в $Z(G)$, принадлежащие одной φ_λ -орбите, изоморфны. Так как $|\text{Irr}_1(G)| = 2^{m+n} - 2^n$, то

$$2^{m+n} - 2^n = \frac{2^m - 1}{2^n + 1} \sum_{i=1}^{2^n+1} 2^{m-2a_i},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{2^n+1} 2^{m-2a_i} = 2^n(2^n + 1).$$

Предположим, что $m - 2a_i > 2n$ для некоторого i . Тогда $2^{m-2a_i} \geq 2^{2n+1} = 2^{2n} + 2^{2n} > 2^n(2^n + 1)$. Получили противоречие. Следовательно, $m - 2a_i \leq 2n$ и $a_i \geq m/2 - n$ для любого i .

ТЕОРЕМА 3.5. Если $G' = Z(G)$, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2-n}, 2^{m/2}\}$. Причем группа G имеет $(2^m - 1)2^{2n}/(2^n + 1)$ неприводимых характеров степени $2^{m/2-n}$ и $(2^m - 1)2^n/(2^n + 1)$ неприводимых характеров степени $2^{m/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $(2^m - 1)/(2^n + 1) = s$.

По лемме 3.3 неглавные неприводимые характеры G под действием φ_λ разбиваются на 2^n орбит длины $2^m - 1$ и $2^n + 1$ орбит длины s . Заметим, что в силу $\text{Lin}(G) \cong G/G'$ неглавные линейные характеры G образуют одну φ_λ -орбиту длины $2^m - 1$. Поэтому на $\text{Irr}_1(G)$ будет $2^n - 1$ φ_λ -орбит длины $2^m - 1$. По лемме 2.7 каждый нелинейный неприводимый характер G является характером ровно одной группы G/Z_0 , где $Z_0 \leq Z(G)$ и $|Z(G) : Z_0| = 2$.

По лемме 3.3 φ_λ имеет $2^n + 1$ орбит длины s на множестве подгрупп индекса 2 в $Z(G)$. Тогда для любой подгруппы Z_0 индекса 2 в $Z(G)$ выполняется $Z_0^{\varphi_\lambda^s} = Z_0$. Пусть длина φ_λ -орбиты характера $\chi \in \text{Irr}_1(G)$ равна $2^m - 1$ и $\chi \in \text{Irr}_1(G/Z_0)$. Тогда $\chi^{\varphi_\lambda^{s^i}} \in \text{Irr}_1(G/Z_0)$, $0 \leq i < 2^n + 1$, но $\chi^{\varphi_\lambda^{s^i}} \neq \chi$. Это означает, что в G/Z_0 имеется $2^n + 1$ характеров, сопряженных с χ под действием φ_λ .

Предположим, что для некоторой группы $Z_0 \leq Z(G)$, $|Z(G) : Z_0| = 2$, в G/Z_0 нет неприводимых характеров, длина φ_λ -орбиты которых равна s . Но тогда нелинейные неприводимые характеры G/Z_0 разбиты на φ_λ^s -орбиты длины $2^n + 1$, и если $\text{cd}(G/Z_0) = \{1, 2^a\}$, то по лемме 2.7 $2^n + 1 \mid 2^{m-2a}$, — противоречие. Значит, в каждой группе G/Z_0 существует по крайней мере один характер, длина орбиты которого равна s . Так как всего таких φ_λ -орбит $2^n + 1$, а группы вида G/Z_0 также разбиты на $2^n + 1$ φ_λ -орбит длины s , то в каждой подгруппе G/Z_0 ровно один характер искомого типа.

Пусть длина φ_λ -орбиты характера $\chi \in \text{Irr}_1(G)$ равна $2^m - 1$, $\chi(1) = 2^a$ и $\chi \in \text{Irr}_1(G/Z_0)$. Тогда по доказанному выше $2^{m-2a} = 1 + l(2^n + 1)$, $l > 0$. Отсюда следует, что $2^n + 1 \mid 2^{m-2a} - 1$, а значит, $n \mid m - 2a$ и $(m - 2a)/n$ четно. Однако, по лемме 3.4 $m - 2n \leq 2a \leq m$ и $0 \leq (m - 2a)/n \leq 2$, т.е. $(m - 2a)/n \in \{0, 2\}$. Поскольку $l > 0$, равенство $(m - 2a)/n = 0$ невозможно. Значит, $a = m/2 - n$ и в G/Z_0 2^{2n} нелинейных характеров, которые образуют $2^n - 1$ φ_λ -орбит длины $2^m - 1$ и одну орбиту длины s . Таким образом, все φ_λ -орбиты длины $2^m - 1$ исчерпаны, и если $Z_1 \notin \{Z \leq Z(G), |Z(G) : Z| = 2 \mid Z = Z_0^{\varphi_\lambda^i}\}$, то в G/Z_1 ровно один нелинейный характер степени $2^{m/2}$.

Итак, $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2-n}, 2^{m/2}\}$. Причем группа G имеет $(2^m - 1)2^{2n}/(2^n + 1)$ неприводимых характеров степени $2^{m/2-n}$ и $(2^m - 1)2^n/(2^n + 1)$ неприводимых характеров степени $2^{m/2}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $m = 2n$, то $|G'| = 2^{m/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае по лемме 3.2 либо $|G'| = 2^{m/2}$, либо $|G'| = 2^m$. Но во втором случае по теореме 3.5 $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2-n}, 2^{m/2}\}$, что невозможно в силу $m/2 - n = 0$.

ТЕОРЕМА 3.6. Если $m = 2n$, то $\text{cd}(G) = \{1, 2^{m/2}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию из теоремы 3.5 $|G'| = 2^{m/2}$, а по лемме 3.2 у φ_λ на $(G')^\#$ одна орбита длины $2^{m/2} - 1$. По лемме 2.7 любой нелинейный неприводимый характер G принадлежит ровно одной группе G/Z_0 , где $G' \not\leq Z_0 \leq Z(G)$ и $|Z(G) : Z_0| = 2$. Число групп такого вида $2^{m/2} - 1$, и все они сопряжены под действием φ_λ (доказательство аналогично лемме 3.3). Поэтому все группы типа G/Z_0 изоморфны и $|\text{cd}(G)| = 2$. По лемме 2.2 число классов сопряженности группы G равно $2^{m+n} + 2^m - 2^n$. Пусть $\text{cd}(G) = \{1, d\}$. Тогда $|G| = 2^{2m} = 2^{m+m/2} + d^2(2^m - 2^{m/2})$, откуда $d = 2^{m/2}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Huppert B., Blackburn N. Finite Groups II. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1982.
- [2] Hanaki A. A condition on lengths of conjugacy classes and character degrees // Osaka J. Math. 1996. V. 33. P. 207–216.
- [3] Беркович Я. Г. Обобщение теорем Ф. Холла и Н. Блэкберна и их применение к нерегулярным p -группам // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 4. С. 800–830.
- [4] Старостин А. И. Конечные 2-группы с циклической подгруппой Фраттини // Тр. ИММ. Т. 3. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. С. 60–64.
- [5] Berkovich Ya. G., Zhmud' E. M. Characters of Finite Groups. 1. Transl. Math. Monographs. V. 172. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1997.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: nis@univ.uniya.ac.ru

Поступило
16.04.98