Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Салий, Квазибулевы степени элементарных абелевых p -групп, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 264–274

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 11:56:32

УДК 512.532

КВАЗИБУЛЕВЫ СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ p -ГРУПП

В. Н. Салий

Основной результат работы (теорема 3) – характеристика группоидов с единицей, допускающих вложение в квазибулевы степени элементарных абелевых p -групп при $p > 2$.

Библиография: 11 названий.

Понятие булевой степени алгебры играет важную роль в общей теории алгебраических систем (см. [1], [2]). Близким его обобщением является конструкция квазибулевой степени алгебры. Сохраняя многие свойства исходного понятия, она имеет и ряд существенных отличий. Одно из них касается многообразий алгебр. Известно, что для любого многообразия V все булевы степени V -алгебр также принадлежат V . Для квазибулевых степеней подобной закономерности нет. Так, если все многообразия унарных алгебр замкнуты относительно квазибулевых степеней [3], то среди полугрупповых многообразий этим свойством обладает только многообразие полугрупп с нулевым умножением [4]. Последнее обстоятельство создает новые классификационные возможности для группоидов (алгебр с одной бинарной операцией), позволяя связать с каждым многообразием V полугрупп классы группоидов, так или иначе определяемые квазибулевыми степенями V -алгебр. В этом смысле естественно начать с минимальных многообразий полугрупп. Кроме упомянутого многообразия полугрупп с нулевым умножением, выделяемого тождеством $xy = zt$, в этот список входят [5, с. 162]: многообразие левосингулярных полугрупп (полугрупп левых нулей) $xy = x$; многообразие правосингулярных полугрупп (полугрупп правых нулей) $xy = y$; многообразие полурешеток $x^2 = x$, $xy = yx$; многообразие элементарных абелевых p -групп для каждого простого p с определяющими тождествами $xy = yx$, $x^p y = y$. В работе [6] был описан класс (квазимногообразие) группоидов, вложимых в квазибулевы степени левосингулярных полугрупп (из двойственных соображений получается описание соответствующего класса для правосингулярных полугрупп); в сообщении [7] анонсировано решение аналогичной задачи о характеристике подгруппоидов в квазибулевых степенях полурешеток (развернутое изложение в печати). Результаты настоящей заметки в основном завершают исследование минимальных многообразий полугрупп в обсуждаемом аспекте: найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых группоид с единицей допускает вложение в подходящую квазибулеву степень некоторой элементарной абелевой p -группы при заданном $p > 2$. Случай $p = 2$ не укладывается в общую схему и требует дополнительного рассмотрения.

Пусть L – полная решетка. Под ортогональной системой в ней понимается всякое подмножество $\{l_i \mid i \in I\}$ такое, что $l_i \wedge l_j = 0$ при $i \neq j$ и $\bigvee_{i \in I} l_i = 1$. Ортогональная система $\{l_i \mid i \in I\}$ по определению *независима*, если $\bigvee_{j \in J} l_j \wedge \bigvee_{k \in K} l_k = 0$ для любого разбиения $I = J \cup K$, $J \cap K = \emptyset$. Полная решетка с дополнениями называется *квазибулевой*, если в ней все ортогональные системы независимы. Это свойство имеет место, например, в каждой полной булевой решетке. Квазибулевой решеткой является и пятиугольник N_5 – пятиэлементная немодулярная решетка. Полная решетка с дополнениями тогда и только тогда будет квазибулевой, когда она допускает $\wedge$ -гомоморфизм на полную булеву решетку, который сохраняет точные верхние грани ортогональных систем и, кроме того, взаимно однозначен в 0 и 1 (см. [8] и [5, с. 271]). Такой $\wedge$ -гомоморфизм называется каноническим.

Пусть $(G, \cdot)$ – группа, т.е. полугруппа с единицей, где каждый элемент имеет обратный, и L – квазибулева решетка. Через $G[L]$ обозначим совокупность всех отображений $\nu: G \rightarrow L$ таких, что

- 1) $\nu(f) \wedge \nu(g) = 0$ при $f \neq g$;
- 2) $\bigvee_{f \in G} \nu(f) = 1$.

В множестве $G[L]$ вводится умножение по формуле

$$(\mu\nu)(f) = \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) \quad (1)$$

для любых $\mu, \nu \in G[L]$, $f \in G$. Группоид $(G[L], \cdot)$ называется L -*степенью* группы G . Когда L пробегает класс всех квазибулевых решеток, получаем квазибулевы степени группы G . Среди них находятся и все ее булевы степени, если ограничиться только полными булевыми решетками L . Булева степень любой группы сама является группой.

Ассоциацией называется группоид с единицей, в котором каждый элемент имеет обратный и умножение ассоциативно в единице, т.е. в произведениях равных единице скобки можно расставлять произвольно. Каждая группа, очевидно, является ассоциацией. Минимальный пример ассоциации, отличной от группы, дает трехэлементный группоид $A = \{e, a, b\}$, где e – единица и $aa = ab = ba = bb = e$. Группоид с единицей тогда и только тогда будет ассоциацией, когда он допускает гомоморфизм на группу, взаимно однозначный в единице. Этот гомоморфизм также называется каноническим. Ядром канонического гомоморфизма ассоциации является конгруэнция θ , отождествляющая два элемента тогда и только тогда, когда эти элементы совместно обратимы, т.е. у них одни и те же обратные (см. [8]).

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс алгебр, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – его подклассы. *Мальцевским $\mathcal{K}$ -произведением классов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$* называется класс $\mathcal{A} = \mathcal{B} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{C}$, состоящий из всех $\mathcal{K}$ -алгебр A , на которых существует конгруэнция θ такая, что каждый ее класс, являющийся $\mathcal{K}$ -алгеброй, принадлежит $\mathcal{B}$, а факторалгебра A/θ принадлежит $\mathcal{C}$ (см. [9]).

ТЕОРЕМА 1. *Класс $\mathcal{A}$ всех ассоциаций совпадает с мальцевским произведением $\mathcal{E} \circ_{\Gamma} \mathcal{G}$, где Γ – класс всех группоидов с единицей, $\mathcal{E}$ – его тривиальный подкласс, $\mathcal{G}$ – класс всех групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi: A \rightarrow G$ – канонический гомоморфизм ассоциации A на группу G , то конгруэнция $\theta = \text{Ker } \varphi$ имеет единственный класс, замкнутый относительно умножения в A . Это одноэлементное множество $\{e\}$, состоящее из единицы. Значит, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \circ_{\Gamma} \mathcal{G}$.

С другой стороны, пусть группоид с единицей A допускает конгруэнцию ε такую, что A/ε – группа, а все ε -классы, являющиеся подгруппоидами в A , одноэлементны. Так как единственным ε -классом, замкнутым относительно умножения в A , является $\varepsilon(e)$, то $\varepsilon(e) = \{e\}$. Таким образом, естественное отображение $\text{nat } \varepsilon: A \rightarrow A/\varepsilon$ будет гомоморфизмом группоида A на группу A/ε , взаимно однозначным в единице. Следовательно, A – ассоциация и $\mathcal{E}_{\Gamma} \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$.

Следующее предложение выясняет роль ассоциаций в рамках решаемой задачи.

ТЕОРЕМА 2. *Все квазибулевы степени групп являются ассоциациями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа и L – квазибулева решетка. Если e – единица группы G , то единицей группоида $G[L]$ является $\nu_e: G \rightarrow L$ такое, что $\nu_e(f) = 1$ при $f = e$ и $\nu_e(f) = 0$ в противном случае. Пусть $\varphi_0: L \rightarrow L^*$, $l \mapsto l^*$, – канонический $\wedge$ -гомоморфизм квазибулевой решетки L на полную булеву решетку L^* . Из [10, теорема 3] следует, что отображение $\varphi: G[L] \rightarrow G[L^*]$, $\nu \mapsto \nu^*$, такое, что $\nu^*(f) = (\nu(f))^*$ для любых $\nu \in G[L]$, $f \in G$, является гомоморфизмом группоида $G[L]$ на группу $G[L^*]$. Поскольку φ_0 взаимно однозначно в 0 и 1, единственным φ -прообразом единицы ν_e группы $G[L^*]$ будет единица ν_e группоида $G[L]$. Следовательно, $G[L]$ – ассоциация.

Абелева группа называется *элементарной*, если порядки ее неединичных элементов не делятся на квадрат. В элементарной абелевой p -группе порядок любого неединичного элемента равен p (простое число). Каждая такая группа разлагается в прямое произведение циклических групп Z_p порядка p (см. [11, теорема 8.5]).

Следующая теорема описывает группоиды с единицей, вложимые в квазибулевы степени элементарных абелевых p -групп при $p > 2$.

ТЕОРЕМА 3. *Группоид с единицей вкладывается в подходящую квазибулеву степень A некоторой элементарной абелевой p -группы при $p > 2$ тогда и только тогда, когда*

- 1) A является коммутативной ассоциацией;
- 2) подгруппоид $\langle \alpha \rangle$, порожденный любым неединичным элементом $\alpha \in A$, изоморфен Z_p ;
- 3) $(\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n$, $1 \leq n < p$, для любых $\alpha, \beta \in A$;
- 4) отношение $\alpha \leq \beta \iff (\alpha, \beta) \in \theta \ \& \ \alpha\beta = \alpha\alpha$ является стабильным порядком на A (здесь θ – отношение совместной обратимости элементов из A);
- 5) $(\alpha, \beta) \in \theta \implies \alpha\beta \leq \alpha\alpha$ для любых $\alpha, \beta \in A$;
- 6) $(\alpha\alpha)\beta \leq \alpha(\alpha\beta)$ для любых $\alpha, \beta \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть G – элементарная абелева p -группа, $p > 2$, и L – квазибулева решетка. Покажем, что в квазибулевой степени $G[L]$ выполняются все условия 1)–6).

1) В теореме 2 доказано, что $G[L]$ – ассоциация. Коммутативность следует из определения умножения в $G[L]$ (формула (1)).

Для дальнейшего потребуется

ЛЕММА 1. *Если $\nu \in G[L]$, то $\nu^{[n]}(f) = \nu(\sqrt[n]{f})$ для любого $f \neq e$, где $\nu^{[n]}$ – произведение n сомножителей ν с произвольной расстановкой скобок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ имеем

$$(\nu\nu)(f) = \bigvee_{f=gh} (\nu(g) \wedge \nu(h)) = \begin{cases} 0 & \text{при } g \neq h, \\ \nu(g) & \text{при } g = h, \end{cases} = \nu(\sqrt{f}),$$

т.е. $\nu^2(f) = \nu(\sqrt{f})$.

Пусть утверждение справедливо для всех $m < n < p$. Так как $\nu^{[n]} = \nu^{[k]}\nu^{[l]}$, где $k + l = n$, то

$$\nu^{[n]}(f) = (\nu^{[k]}\nu^{[l]})(f) = \bigvee_{f=gh} (\nu^{[k]}(g) \wedge \nu^{[l]}(h)) = \bigvee_{f=gh} (\nu(\sqrt[k]{g}) \wedge \nu(\sqrt[l]{h})) = \nu(\sqrt[n]{f}),$$

где $f = g\sqrt[k]{g}^l$, откуда $\nu^{[n]}(f) = \nu(\sqrt[n]{f})$. Лемма 1 доказана.

2) Из леммы 1 следует, что умножение степеней любого элемента $\nu \in G[L]$ ассоциативно. Пусть $\langle \nu \rangle$ – наименьшая подассоциация ассоциации $G[L]$, содержащая элемент $\nu \neq \nu_e$. Так как булева степень $G[L^*]$, где L^* – канонический $\wedge$ -гомоморфный образ квазибулевой решетки L , является p -группой, все неединичные циклические подгруппы в $G[L^*]$ изоморфны Z_p . Тогда $\langle \nu \rangle / \theta \cong Z_p$. Согласно лемме 1 в каждом θ -классе находится не более одного элемента из $\langle \nu \rangle$. Значит, $\langle \nu \rangle \cong Z_p$.

3) Используя лемму 1, для любых $\mu, \nu \in G[L]$ получаем

$$\begin{aligned} (\mu\nu)^n(f) &= (\mu\nu)(\sqrt[n]{f}) = \bigvee_{\sqrt[n]{f}=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) = \bigvee_{\sqrt[n]{f}=gh} (\mu^n(g^n) \wedge \nu^n(h^n)) \\ &= \bigvee_{f=g^n h^n} (\mu^n(g^n) \wedge \nu^n(h^n)) = (\mu^n \nu^n)(f), \end{aligned}$$

т.е. $(\mu\nu)^n = \mu^n \nu^n$.

Элементы $\mu, \nu \in G[L]$ называются *совместимыми*, если $\mu(f) \wedge \nu(g) = 0$ при $f \neq g$. Оказывается, что отношение совместимости в $G[L]$ совпадает с отношением совместной обратимости θ . Именно, имеет место

ЛЕММА 2. Если $\mu, \nu \in G[L]$, то $(\mu, \nu) \in \theta$ тогда и только тогда, когда $\mu(f) \wedge \nu(g) = 0$ при $f \neq g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mu, \nu) \in \theta$. Одним из обратных для μ будет элемент μ^{-1} , определяемый равенством $\mu^{-1}(f) = \mu(f^{-1})$ для любого $f \in G$. Он должен быть обратным и для ν , т.е. $\mu^{-1}\nu = \nu_e$. Пусть f, g – различные элементы группы G . Тогда

$$\mu(f) \wedge \nu(g) = \mu^{-1}(f^{-1}) \wedge \nu(g) \leq \bigvee_{uv \neq e} (\mu^{-1}(u) \wedge \nu(v)) = (\mu^{-1}\nu)(uv) = 0,$$

так как $uv \neq e$. Итак, $\mu(f) \wedge \nu(g) = 0$ при $f \neq g$.

Обратно, пусть $\mu(f) \wedge \nu(g) = 0$ при $f \neq g$ и ρ – обратный для μ элемент в $G[L]$, т.е. $\mu\rho = \nu_e$. Тогда при каноническом гомоморфизме ассоциации $G[L]$ на группу $G[L^*]$ (см. доказательство теоремы 2) получаем

$$(\nu\rho)^* = \nu^*\rho^* = \mu^*\rho^* = (\mu\rho)^* = \nu_e^* = \nu_e,$$

откуда $\nu\rho = \nu_e$, т.е. ρ – обратный для ν элемент в $G[L]$. Лемма 2 доказана.

Следующая лемма показывает, что естественный порядок “ $\leq$ ” в $G[L]$ (поточечное сравнение: $\mu \leq \nu \iff \mu(f) \leq \nu(f)$ для всех $f \in G$) может быть выражен в терминах умножения.

ЛЕММА 3. Если $\mu, \nu \in G[L]$, то $\mu \leq \nu \iff (\mu, \nu) \in \theta \text{ \& } \mu\nu = \mu\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu \leq \nu$, то, конечно, μ и ν совместимы, откуда по лемме 2 $(\mu, \nu) \in \theta$. Используя лемму 1, имеем

$$(\mu\nu)(f) = \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) = \mu(\sqrt{f}) \wedge \nu(\sqrt{f}) = \mu(\sqrt{f}) = (\mu\mu)(f),$$

т.е. $\mu\nu = \mu\mu$.

С другой стороны, если $(\mu, \nu) \in \theta$ и $\mu\nu = \mu\mu$, то $\mu(f) \wedge \nu(f) = (\mu\nu)(f^2) = \mu(f)$ для любого $f \in G$, откуда $\mu \leq \nu$. Лемма 3 доказана.

4) Лемма 3 показывает, что на $G[L]$ отношение “ $\leq$ ”, определенное в 4), совпадает с естественным порядком “ $\leq$ ”, который стабилен относительно умножения (1).

5) Пусть $(\mu, \nu) \in \theta$. Используя леммы 1 и 2, получаем

$$(\mu\nu)(f) = \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge \nu(h)) = \mu(\sqrt{f}) \wedge \nu(\sqrt{f}) \leq \mu(\sqrt{f}) = (\mu\mu)(f),$$

т.е. $\mu\nu \leq \mu\mu$.

6) Непосредственно вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} (\mu(\mu\nu))(f) &= \bigvee_{f=gh} (\mu(g) \wedge (\mu\nu)(h)) = \bigvee_g (\mu(g) \wedge (\mu\nu)(fg^{-1})) \\ &= \bigvee_g \left(\mu(g) \wedge \bigvee_{fg^{-1}=xy} (\mu(x) \wedge \nu(y)) \right) = \bigvee_g \left(\mu(g) \wedge \bigvee_x (\mu(x) \wedge \nu(fg^{-1}x^{-1})) \right) \\ &\geq \bigvee_g (\mu(g) \wedge (\mu(g) \wedge \nu(fg^{-1}g^{-1}))) = \bigvee_g (\mu(g) \wedge \nu(fg^{-1}g^{-1})) \\ &= \bigvee_g ((\mu\mu)(gg) \wedge \nu(fg^{-1}g^{-1})) = \bigvee_{f=gh} ((\mu\mu)(g) \wedge \nu(h)) = ((\mu\mu)\nu)(f), \end{aligned}$$

т.е. $(\mu\mu)\nu \leq \mu(\mu\nu)$.

Таким образом, в квазибулевых степенях элементарных абелевых p -групп, $p > 2$, выполняются все условия 1)–6). Следовательно, они выполняются и в группоидах с единицей, вложимых в эти квазибулевы степени.

Достаточность. Пусть группоид A с единицей e удовлетворяет условиям 1)–6). Так как выполняется 1), отношение θ совместной обратимости является конгруэнцией на A и факторгруппа $G = A/\theta$ – абелевой. Как следствие 2), в G истинно тождество $x^p = e$. Таким образом, $G = A/\theta$ – элементарная абелева p -группа.

Построим вложение группы G в булеву степень $Z_p[L^*]$, где $L^* = P(G)$ – множество всех подмножеств множества G .

Группа G является прямым произведением циклических групп G_i , $i \in I$, каждая из которых изоморфна Z_p . Элементы группы G можно считать функциями $f: I \rightarrow Z_p$, для которых множества $\text{supp } f := \{i \in I \mid f(i) \neq e\}$ конечны. Если $\text{supp } f \subseteq \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, то элемент $f \in G$ можно записать в виде $f = g_{i_1}^{k_1} g_{i_2}^{k_2} \cdots g_{i_n}^{k_n}$, где g_{i_m} – фиксированный неединичный элемент группы $G_{i_m} \cong Z_p$, $1 \leq m \leq n$. Понятно, что если $i_m \notin \text{supp } f$, то $k_{i_m} = 0$.

Сопоставим элементу $f \in G$ отображение $\chi_f: G \rightarrow Z_p$ следующим образом. Если $g \in G$ и z — фиксированный неединичный элемент в Z_p , то при $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \supseteq \text{supp } f \cup \text{supp } g$ полагаем

$$\chi_f(g) = \chi_f(g_{i_1}^{l_1} g_{i_2}^{l_2} \dots g_{i_n}^{l_n}) := z^{k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_n l_n}.$$

Если $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \supseteq \text{supp } f \cup \text{supp } g \cup \text{supp } h$, то

$$\begin{aligned} \chi_f(gh) &= \chi_f(g_{i_1}^{l_1+m_1} g_{i_2}^{l_2+m_2} \dots g_{i_n}^{k_n+m_n}) = z^{k_1(l_1+m_1) + k_2(l_2+m_2) + \dots + k_n(l_n+m_n)} \\ &= z^{k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_n l_n} z^{k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_n m_n} = \chi_f(g) \chi_f(h). \end{aligned}$$

Значит, $\chi_f \in \text{Hom}(G, Z_p)$.

Соответствие $f \mapsto \chi_f$ взаимно однозначно. В самом деле, если $f \neq g$, то $g_i^{k_i} \neq g_i^{l_i}$ для некоторого $i \in \text{supp } f \cup \text{supp } g$. Но тогда $\chi_f(g_i) = z^{k_i} \neq z^{l_i} = \chi_g(g_i)$, т.е. $\chi_f \neq \chi_g$.

Соответствие $f \mapsto \chi_f$, как нетрудно проверить, сохраняет умножение, т.е. $\chi_{fg}(h) = \chi_f(h) \chi_g(h)$ для любых $f, g, h \in G$ и, следовательно, является вложением группы G в ее группу характеров $\text{Hom}(G, Z_p)$.

Теперь каждому элементу $f \in G$ сопоставим отображение $\nu_f = \chi_f^{-1}: Z_p \rightarrow L^*$, где $\chi_f: G \rightarrow Z_p$ — характер, соответствующий f , а $L^* = P(G)$. Легко понять, что $\chi_f^{-1}(u) \cap \chi_f^{-1}(v) = \emptyset$ при $u \neq v$ и $\bigcup_{z \in Z_p} \chi_f^{-1}(z) = G$, так что $\nu_f \in Z_p[L^*]$.

Далее,

$$\begin{aligned} (\nu_f \nu_g)(z) &= \bigcup_{z=uv} (\nu_f(u) \cap \nu_g(v)) = \bigcup_{z=uv} (\chi_f^{-1}(u) \cap \chi_g^{-1}(v)) \\ &= \bigcup_{z=uv} (\{h \in G \mid \chi_f(h) = u\} \cap \{h \in G \mid \chi_g(h) = v\}) \\ &= \bigcup_{z=uv} \{h \in G \mid \chi_f(h) = u \text{ \& } \chi_g(h) = v\} \\ &= \{h \in G \mid \chi_f(h) \chi_g(h) = z\} = \{h \in G \mid \chi_{fg}(h) = z\} = \chi_{fg}^{-1}(z) = \nu_{fg}(z) \end{aligned}$$

и, значит, $\nu_{fg} = \nu_f \nu_g$.

Поскольку при $f \neq g$ характеры χ_f и χ_g различны, то в этом случае и $\nu_f \neq \nu_g$.

Итак, группа $G = A/\theta$ вложена в булеву степень $Z_p[L^*]$, где $L^* = P(G)$. Трансформацией этого представления и будет получено вложение группоида A в группоид $Z_p[L]$, где L — квазибулева решетка, к построению которой мы теперь переходим.

Пусть $S := \{\langle \alpha \rangle \mid \alpha \in A\}$ — множество всех непорожденных подгруппоидов группоида A . Согласно 2) каждый подгруппоид $\langle \alpha \rangle$ изоморфен группе Z_p . Очевидно, что если $\langle \alpha \rangle \neq \langle \beta \rangle$, то $\langle \alpha \rangle \cap \langle \beta \rangle = \{e\}$.

Используя порядок на A , определенный в 4), введем на множестве S одноименное отношение " $\leq$ ", полагая

$$\langle \alpha \rangle \leq \langle \beta \rangle \iff (\exists \alpha_0 \in \langle \alpha \rangle, \beta_0 \in \langle \beta \rangle)(\alpha_0 \leq \beta_0).$$

ЛЕММА 4. Если $\langle \alpha \rangle \leq \langle \beta \rangle$, то для любых $\gamma \in \langle \alpha \rangle$, $\delta \in \langle \beta \rangle$ из $(\gamma, \delta) \in \theta$ следует $\gamma \leq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $\langle \alpha \rangle \leq \langle \beta \rangle$, то существуют $\alpha_0 \in \langle \alpha \rangle$, $\beta_0 \in \langle \beta \rangle$ такие, что $(\alpha_0, \beta_0) \in \theta$ и $\alpha_0 \beta_0 = \alpha_0 \alpha_0$. Пусть $\gamma \in \langle \alpha \rangle$, $\delta \in \langle \beta \rangle$ и $(\gamma, \delta) \in \theta$. Тогда $\gamma = \alpha_0^k$, $\delta = \beta_0^k$ для некоторого $k < p$. Ссылаясь на аксиому 3), получаем

$$\gamma \delta = \alpha_0^k \beta_0^k = (\alpha_0 \beta_0)^k = (\alpha_0 \alpha_0)^k = \alpha_0^k \alpha_0^k = \gamma \gamma$$

и, значит, $\gamma \leq \delta$.

ЛЕММА 5. *Отношение “ $\leq$ ” является порядком на S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рефлексивность очевидна. Далее, если $\langle \alpha \rangle \leq \langle \beta \rangle$ и $\langle \beta \rangle \leq \langle \gamma \rangle$, то, считая $(\alpha, \beta) \in \theta$ и $(\beta, \gamma) \in \theta$, получаем $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \gamma$, откуда $\alpha \leq \gamma$ и, значит, $\langle \alpha \rangle \leq \langle \gamma \rangle$, – отношение “ $\leq$ ” транзитивно на S . Для доказательства антисимметричности допустим, что $\langle \alpha \rangle \leq \langle \beta \rangle$ и $\langle \beta \rangle \leq \langle \alpha \rangle$, причем $(\alpha, \beta) \in \theta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, т.е. $\alpha \beta = \alpha \alpha$ и $\beta \alpha = \beta \beta$. В силу коммутативности умножения $\alpha \alpha = \beta \beta$. Таким образом, $\alpha \alpha \in \langle \alpha \rangle \cap \langle \beta \rangle$. Так как $\alpha \alpha \neq e$ (по условию $p > 2$), то $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$.

ЛЕММА 6. *Если $\langle \alpha \rangle \leq \langle \gamma \rangle$ и $\langle \beta \rangle \leq \langle \delta \rangle$, то $\langle \alpha \beta \rangle \leq \langle \gamma \delta \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\alpha \leq \gamma$ и $\beta \leq \delta$, то в силу 4) (стабильность порядка “ $\leq$ ” на A) выполнено $\alpha \beta \leq \gamma \delta$, откуда $\langle \alpha \beta \rangle \leq \langle \gamma \delta \rangle$.

Положим $S(\alpha) := \{\langle \beta \rangle \mid \beta \in \theta(\alpha)\}$, т.е. $S(\alpha)$ – это множество подгруппоидов в A , порожденных элементами θ -класса, содержащего α .

ЛЕММА 7. *Упорядоченное подмножество $(S(\alpha), \leq)$ упорядоченного множества $(S, \leq)$ при любом α является полурешеткой, где $\inf(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) = \langle \gamma \delta \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle \beta \rangle \in S(\alpha)$. Будем считать, что $(\alpha, \beta) \in \theta$. Согласно 5) $\alpha \beta \leq \alpha \alpha$, откуда $\langle \alpha \beta \rangle \leq \langle \alpha \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$. Аналогично, $\langle \alpha \beta \rangle \leq \langle \beta \rangle$. Если $\langle \gamma \rangle \leq \langle \alpha \rangle$ и $\langle \gamma \rangle \leq \langle \beta \rangle$, то, считая $(\alpha, \gamma) \in \theta$, получаем $\gamma \leq \alpha$ и $\gamma \leq \beta$, откуда вследствие 4) $\gamma \gamma \leq \alpha \beta$ и, значит, $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma \gamma \rangle \leq \langle \alpha \beta \rangle$. Таким образом, циклическая группа $\langle \alpha \beta \rangle$ является наибольшей нижней гранью для циклических групп $\langle \alpha \rangle$ и $\langle \beta \rangle$ в $(S(\alpha), \leq)$.

Упорядоченные множества $(S, \leq)$ и $(S(\alpha), \leq)$, $\alpha \in A$, играют определяющую роль в построении квазибулевой решетки L .

Под идеалами упорядоченного множества понимаются его минорантно насыщенные подмножества. Наименьший идеал, содержащий подмножество X , обозначается через $I(X)$.

Пусть $L(\alpha) := \text{Id}(S(\alpha))$ – решетка идеалов полурешетки $(S(\alpha), \leq)$. В булевой решетке $L^* = P(G)$ каждый элемент вида $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)$, $z \in Z_p$, заменим решеткой $L(\alpha)$, обозначая ее в этой ситуации через $L(\alpha, z)$. Каждый элемент l , лежащий в L^* ниже элемента вида $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)$ и отличный от $\emptyset$, заменим решеткой $\text{Id}(S \times S)$ идеалов прямого квадрата $(S \times S, \leq)$ упорядоченного множества $(S, \leq)$, обозначая ее в этой ситуации через $L[l]$ (заметим, что в L^* различные элементы вида $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)$ несравнимы).

Теперь определим порядок в множестве L , полученном из L^* в результате всех указанных замен. Сохраняя все порядковые связи, имеющиеся в решетках вида $L(\alpha, z)$ и $L(l)$, зададим дополнительно следующие соотношения:

- а) наименьший элемент 0 решетки L^* (т.е. $\emptyset$) остается наименьшим элементом в L ;
- б) если $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z) < l$ в L^* , то в L каждый элемент подрешетки $L(\alpha, z)$ считается меньше l ;

- в) если $0 < l_1 < l_2 < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)$ в L^* для некоторых α и z , то каждый элемент подрешетки $L(l_1)$ считается меньше одноименного элемента подрешетки $L(l_2)$;
 г) если $0 < l < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)$ в L^* для некоторых α и z , то считается, что наибольшим минорантом элемента $I \in L(\alpha, z)$ в подрешетке $L(l)$ является идеал

$$J := I(\{(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \in S \times S \mid \langle \gamma \rangle \in I, \text{ или } \langle \delta \rangle \in I, \text{ или } \langle \gamma \delta \rangle \in I\}).$$

Транзитивное замыкание построенного отношения, состоящего из объединения порядков в решетках вида $L(\alpha, z)$ и $L(l)$ и дополнительных связей, введенных в а)–г), упорядочивает множество L .

Покажем, что L с введенным порядком является решеткой. Необходимо рассмотреть два неочевидных случая.

Пусть $I_1, I_2 \in L(\alpha, z)$. В $L(\alpha, z)$ наибольшей нижней гранью для $\{I_1, I_2\}$ будет $I_1 \cap I_2$. Но у этих идеалов есть общие нижние грани и в каждой подрешетке вида $L(l)$, где $l < \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)$. Пусть $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z)$ является покрытием для l в L^* . Наибольшей нижней гранью для $\{I_1, I_2\}$ в $L(l)$ будет пересечение идеалов

$$J_i = I(\{(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \in S \times S \mid \langle \gamma \rangle \in I_i, \text{ или } \langle \delta \rangle \in I_i, \text{ или } \langle \gamma \delta \rangle \in I_i\}), \quad i = 1, 2.$$

Пусть $(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \in J_1 \cap J_2$. Из возможных девяти случаев типичными являются следующие три:

- а) $\langle \gamma \rangle \in I_1, \langle \gamma \rangle \in I_2$;
 б) $\langle \gamma \rangle \in I_1, \langle \delta \rangle \in I_2$;
 в) $\langle \gamma \rangle \in I_1, \langle \gamma \delta \rangle \in I_2$.

В случае а) $\langle \gamma \rangle \in I_1 \cap I_2$. В случае б) в полурешетке $S(\alpha)$ имеем $\langle \gamma \delta \rangle = \inf(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle)$, откуда $\langle \gamma \delta \rangle \leq \langle \gamma \rangle \in I_1$ и $\langle \gamma \delta \rangle \leq \langle \delta \rangle \in I_2$ и, значит, $\langle \gamma \delta \rangle \in I_1 \cap I_2$. В случае в) так как $\langle \gamma \rangle \in S(\alpha)$ и $\langle \gamma \delta \rangle \in S(\alpha)$, то $\theta(\gamma)$ и $\theta(\gamma \delta)$ будут элементами циклической группы $\cup S(\alpha)/\theta$. Поскольку $\theta(\gamma \delta) = \theta(\gamma) \cdot \theta(\delta)$ в A/θ , то $\langle \delta \rangle \in S(\alpha)$. Теперь имеем $\langle \gamma \delta \rangle = \inf(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \leq \langle \gamma \rangle \in I_1$ и, значит, $\langle \gamma \delta \rangle \in I_1$, так что $\langle \gamma \delta \rangle \in I_1 \cap I_2$.

Таким образом, $J_1 \cap J_2 < I_1 \cap I_2$ в L и, следовательно, $\inf_L(I_1, I_2) = I_1 \cap I_2$.

Пусть $J_1, J_2 \in L(l)$, причем l имеет в L^* одним из своих покрытий элемент $\chi_{\theta(\alpha_0)}^{-1}(z_0)$. В $L[l]$ наименьшей верхней гранью для $\{J_1, J_2\}$ будет $J_1 \cup J_2$. Но у этих идеалов есть общие верхние грани и вне $L[l]$. Наименьшей из них является

$$\bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^2 (I(\text{pr}_1 J_i \cap S(\alpha)) \cup I(\text{pr}_2 J_i \cap S(\alpha)) \cup I(\{\langle \gamma \delta \rangle \mid \langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle \in J_i\} \cap S(\alpha))),$$

где $\text{pr}_1 J$ – множество всех первых элементов пар, входящих в отношение $J \subseteq S \times S$, а $\text{pr}_2 J$ – множество всех вторых элементов этих пар. Если финальное объединение (по элементам $\alpha \in A$) содержит не менее двух различных членов, оно даст элемент решетки L больший, чем наибольший элемент подрешетки $L(\alpha_0, z_0)$ и, значит, больший, чем $J_1 \cup J_2$. Пусть $\text{pr}_1 J_i \subseteq S(\alpha_0)$, $\text{pr}_2 J_i \subseteq S(\alpha_0)$ и $\langle \gamma \delta \rangle \in S(\alpha_0)$ для каждой пары $(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \in J_i$, $i = 1, 2$. Тогда наименьшей верхней гранью для $\{J_1, J_2\}$ в $L(\alpha_0, z_0)$ будет объединение $\text{pr}_1(J_1 \cup J_2) \cup \text{pr}_2(J_1 \cup J_2) \cup I(\{\langle \gamma \delta \rangle \mid (\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \in J_1 \cup J_2\})$, которое мажорирует $J_1 \cup J_2$. Таким образом, $\sup_L(J_1, J_2) = J_1 \cup J_2$.

Мы получили, что L – решетка. Очевидно, что она будет полной. Если в L отождествить элементы каждой подрешетки вида $L(\alpha, z)$ и отождествить элементы каждой подрешетки вида $L(l)$, получится канонический $\wedge$ -гомоморфизм решетки L на булеву решетку $L^* = P(G)$. Следовательно, L – квазибулева решетка.

Покажем, что группоид A вкладывается в квазибулеву степень $Z_p[L]$.

Для большей наглядности элементы подрешеток вида $L(\alpha, z)$ будем записывать в виде пар $(I, \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z))$ и вместо $I(\langle \alpha \rangle)$ писать $I(\alpha)$.

Определим отображение $\varphi: A \rightarrow Z_p[L]$, $\alpha \mapsto \nu_\alpha$, полагая $\nu_e(z) = 1$ при $z = e$ и $\nu_e(z) = 0$ в противном случае, и при $\alpha \neq e$, полагая $\nu_\alpha(z) = (I(\alpha), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z))$, $z \in Z_p$.

Поскольку $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(u) \cap \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(v) = \emptyset$ при $u \neq v$, то $\nu_\alpha(u) \cap \nu_\alpha(v) = 0$ при $u \neq v$, а так как $\bigcup_{z \in Z_p} \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(z) = G$, то $\bigvee_{z \in Z_p} \nu_\alpha(z) = 1$, так что $\nu_\alpha \in Z_p[L]$.

Если $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, т.е. $\nu_\alpha = \nu_\beta$, то получаем, что $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ и $\theta(\alpha) = \theta(\beta)$. Согласно аксиоме 2) $\alpha = \beta$. Таким образом, φ инъективно.

Необходимо доказать, что φ – гомоморфизм, т.е. $\nu_{\alpha\beta} = \nu_\alpha \nu_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in A$.

Если $(\alpha, \beta) \in \theta$, т.е. $\theta(\alpha) = \theta(\beta)$, то $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle \in S(\alpha)$ и $I(\alpha) \wedge I(\beta) = I(\alpha\beta)$ в решетке $L(\alpha)$ (см. лемму 7). В частности, $I(\alpha) \wedge I(\alpha) = I(\alpha) = I(\alpha\alpha)$. Используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} (\nu_\alpha \nu_\beta)(z) &= \bigvee_{z=uv} (\nu_\alpha(u) \wedge \nu_\beta(v)) = \bigvee_{z=uv} ((I(\alpha), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(u)) \wedge (I(\beta), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(v))) \\ &= (I(\alpha), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(\sqrt{z})) \wedge (I(\beta), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(\sqrt{z})) = (I(\alpha) \wedge I(\beta), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(\sqrt{z})) \\ &= (I(\alpha\beta), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(\sqrt{z})) = (I(\alpha\beta), \chi_{\theta(\alpha)\theta(\alpha)}^{-1}(z)) \\ &= (I(\alpha\beta), \chi_{\theta(\alpha)\theta(\beta)}^{-1}(z)) = (I(\alpha\beta), \chi_{\theta(\alpha\beta)}^{-1}(z)) = (\nu_{\alpha\beta})(z), \end{aligned}$$

т.е. $\nu_{\alpha\beta} = \nu_\alpha \nu_\beta$ при $(\alpha, \beta) \in \theta$.

В случае $(\alpha, \beta) \notin \theta$ имеем

$$(\nu_\alpha \nu_\beta)(z) = \bigvee_{z=uv} ((I(\alpha), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(u)) \wedge (I(\beta), \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(v))).$$

При построении вложения группы G в булеву степень $Z_p[L^*]$ было показано, что

$$\bigcup_{z=uv} (\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(u) \cap \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(v)) = \chi_{\theta(\alpha\beta)}^{-1}(z).$$

Значит, $(\nu_\alpha \nu_\beta)(z)$ является в L элементом подрешетки $L(\alpha\beta, z)$. Это наименьший из ее элементов, в которых содержатся все элементы $(I(\alpha) \wedge I(\beta), \chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(u) \cap \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(v))$, где $uv = z$. Пусть $\chi_{\theta(\alpha)}^{-1}(u) \cap \chi_{\theta(\beta)}^{-1}(v) = l_{u,v}$ в L^* . В каждой подрешетке $L(l_{u,v})$ наибольшим элементом, содержащимся в $I(\alpha)$, является идеал

$$J_1 = I(\{(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \in S \times S \mid \langle \gamma \rangle \in I(\alpha), \text{ или } \langle \delta \rangle \in I(\alpha), \text{ или } \langle \gamma \delta \rangle \in I(\alpha)\}),$$

а наибольшим элементом, содержащимся в $I(\beta)$, является идеал

$$J_2 = I(\{(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle) \in S \times S \mid \langle \gamma \rangle \in I(\beta), \text{ или } \langle \delta \rangle \in I(\beta), \text{ или } \langle \gamma \delta \rangle \in I(\beta)\}).$$

Нужно показать, что в подрешетке $L(\alpha\beta, z)$ наименьшим мажорантом для $J_1 \cap J_2$ является $I(\alpha\beta)$.

Пусть $(\langle\gamma\rangle, \langle\delta\rangle) \in J_1 \cap J_2$. Из возможных девяти случаев типичными являются следующие три:

- а) $\langle\gamma\rangle \in I(\alpha)$, $\langle\gamma\rangle \in I(\beta)$;
- б) $\langle\gamma\rangle \in I(\alpha)$, $\langle\delta\rangle \in I(\beta)$;
- в) $\langle\gamma\rangle \in I(\alpha)$, $\langle\gamma\delta\rangle \in I(\beta)$.

В случае а) $\langle\gamma\rangle \leq \langle\alpha\rangle$ и $\langle\gamma\rangle \leq \langle\beta\rangle$, откуда, как установлено в лемме 6, $\langle\gamma\gamma\rangle \leq \langle\alpha\beta\rangle$ и, значит, $(\langle\gamma\rangle, \langle\delta\rangle) < I(\alpha\beta)$. В случае б) $\langle\gamma\delta\rangle \leq \langle\alpha\beta\rangle$ и, значит, $(\langle\gamma\rangle, \langle\delta\rangle) < I(\alpha\beta)$. В случае в) согласно аксиоме 4) получаем $\langle(\gamma\gamma)\delta\rangle \leq \langle\gamma(\gamma\delta)\rangle$, а так как $\langle\gamma(\gamma\delta)\rangle \leq \langle\alpha\beta\rangle$, то $\langle(\gamma\gamma)\delta\rangle \leq \langle\alpha\beta\rangle$ и, значит, $(\langle\gamma\rangle, \langle\delta\rangle) = (\langle\gamma\gamma\rangle, \langle\delta\rangle) < I(\alpha\beta)$.

Таким образом, элемент $I(\alpha\beta)$ подрешетки $L(\alpha\beta, z)$ является в L верхней гранью для всех элементов $J_1 \cap J_2$ из подрешеток $L(l_{u,v})$, где $uv = z$. Учитывая $(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) \in J_1 \cap J_2$, получаем, что $I(\alpha\beta)$ на самом деле будет наименьшей верхней гранью для этих элементов. Отсюда следует, что

$$(\nu_\alpha \nu_\beta)(z) = (I(\alpha\beta), \chi_{\theta(\alpha\beta)}^{-1}(z)) = \nu_{\alpha\beta}(z),$$

так что $\nu_{\alpha\beta} = \nu_\alpha \nu_\beta$ и при $(\alpha, \beta) \notin \theta$.

Это завершает доказательство теоремы 3.

Поскольку всякая ассоциация с ассоциативным умножением является группой, пересечение класса группоидов, описанного в теореме 3, с многообразием всех полугрупп совпадает с многообразием элементарных абелевых p -групп, $p > 2$.

Естественный порядок в квазибулевых степенях сингулярных полугрупп, полурешеток и элементарных абелевых p -групп, $p > 2$, может быть выражен через операцию умножения. Этот факт играет ключевую роль в построении соответствующих квазибулевых решеток. Многообразие элементарных 2-групп является в этом смысле исключением. Следующий пример показывает, что в квазибулевых степенях элементарных 2-групп естественный порядок не допускает интерпретации в терминах умножения.

ПРИМЕР. Пусть $L^* = \{0, 1, a, b, c, A, B, C\}$ – булева алгебра с атомами a, b, c и коатомами $A = a', B = b', C = c'$. Заменим элементы b и C двухэлементными множествами $\{b_1, b_2\}$ и $\{C_1, C_2\}$ соответственно. В полученном множестве определим следующие покрытия: элемент 1 непосредственно следует за каждым из элементов A, B, C_2 ; каждый из элементов a, b_1, c является покрытием для 0; далее, $a < C_1$, $a < B$, $b_1 < C_1$, $b_1 < b_2$, $b_2 < A$, $b_2 < C_2$, $c < A$, $c < B$, $C_1 < C_2$. Построенная диаграмма изображает квазибулеву решетку L_1 , канонический $\wedge$ -гомоморфизм которой на L^* получается отождествлением элемента b_1 с элементом b_2 и элемента C_1 с элементом C_2 . В квазибулевой степени $Z_2[L_1]$, где $Z_2 = \{1, -1\}$, элементы $\mu_1 = (C_1, c)$, $\mu_2 = (C_2, c)$, $\nu_1 = (B, b_1)$, $\nu_2 = (B, b_2)$, $\rho = (a, A)$, $e = (1, 0)$ образуют подгруппоид G_1 (отображение $\alpha: Z_2 \rightarrow L$ мы записываем в виде вектора $(\alpha(1), \alpha(-1))$). Таблица умножения в G_1 , которое определяется формулой (1), описывается равенствами

$$\mu_i \mu_j = \nu_i \nu_j = \rho \rho = e, \quad \mu_i \nu_j = \rho, \quad \mu_i \rho = \nu_i, \quad \nu_i \rho = \mu_i,$$

e – единица. При этом $\mu_1 < \mu_2$ и $\nu_1 < \nu_2$. Пусть L_2 есть решетка, диаграмма которой получается из диаграммы решетки L_1 взаимной заменой букв C_1 и C_2 , b_1 и b_2 (т.е. в L_2

окажется $C_2 < C_1$, $b_2 < b_1$ и соответственно изменятся связанные с этими элементами покрытия). Тогда в $Z_2[L_2]$ элементы $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \rho, e$, определенные выше, образуют подгруппоид G_2 , таблица умножения которого совпадает с таблицей умножения группоида G_1 , но в G_2 имеют место противоположные неравенства $\mu_1 > \mu_2$ и $\nu_1 > \nu_2$.

Вопрос о том, какие группоиды с единицей допускают вложение в квазибулевы степени элементарных 2-групп, остается открытым (очевидными необходимыми условиями являются коммутативность и выполнимость тождества $x^2 = e$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Burris S. Boolean powers // Algebra Universalis. 1975. V. 5. № 3. P. 341–360.
- [2] Пинус А. Г. Булевы конструкции в универсальной алгебре // УМН. 1992. Т. 41. № 4. С. 145–180.
- [3] Šešelja B. Lattice powers of unars // Зб. рад. прир.-матем. фак. Сер. матем. 1995. V. 25. № 2. P. 121–129.
- [4] Салий В. Н. О квазибулевых степенях полугрупп // Упорядоченные множества и решетки. Вып. 10. Саратов, 1991. С. 104–108.
- [5] Скорняков Л. А. (ред.) Общая алгебра. Т. 2. М.: Наука, 1991.
- [6] Салий В. Н. Квазибулевы степени сингулярных полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1994. № 11. С. 67–74.
- [7] Salii V. N. On quasi-boolean powers of semilattices // Международная алгебраическая конференция памяти Д. К. Фаддеева. Тезисы докл. СПб., 1997. С. 112.
- [8] Salii V. N. Quasi-boolean lattices and associations // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. Lectures in Univ. Algebra. Szeged (Hungary), 1983. V. 43. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 429–454.
- [9] Мальцев А. И. Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. матем. ж. 1967. Т. 8. № 2. С. 346–365.
- [10] Salii V. N. Lattice extensions of algebras and Malcev products // Tatra Mt. Math. Publ. 1995. V. 5. P. 97–100.
- [11] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
03.09.98