Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Санду, О теореме Брака–Слэби для коммутативных
луп Муфанг, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 275–
281

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:58:36

УДК 512.548.77

О ТЕОРЕМЕ БРАКА–СЛЭБИ ДЛЯ КОММУТАТИВНЫХ ЛУП МУФАНГ

Н. И. Санду

Используя связь коммутативных луп Муфанг с альтернативными коммутативными алгебрами, довольно просто доказывается ослабленный вариант теоремы Брака–Слэби: конечнопорожденная коммутативная лупа Муфанг центрально нильпотентна.

Библиография: 12 названий.

Одним из наиболее глубоких результатов теории коммутативных луп Муфанг (кратко КЛМ) является

ТЕОРЕМА БРАКА–СЛЭБИ [1, гл. VIII]. *Коммутативная лупа Муфанг с n ($n \geq 2$) образующими центрально нильпотентна степени не больше, чем $n - 1$.*

Она является ключевым инструментом при исследовании таких луп. Доказательство этого утверждения очень громоздкое, оно основано на сложном индуктивном процессе и использует несколько сотен неассоциативных тождеств. В [2, гл. 1] Ю. И. Маниным групповыми методами доказано более слабое утверждение: *конечная КЛМ периода 3 центрально нильпотентна*. Его доказательство хотя и менее вычислительное, но далеко не простое и использует такие глубокие факты из теории конечных групп как теоремы Томпсона–Фейта о разрешимости группы нечетного порядка и Брауэра–Сузуки о непростоте группы, содержащей обобщенные группы кватернионов. Совсем недавно Смит [3], также используя аппарат конечных групп, получил более простое доказательство результата Манина.

Отметим, что точная верхняя грань степени центральной нильпотентности КЛМ с n образующими равна $n - 1$ [4]–[6].

В данной работе, используя связь КЛМ с альтернативными коммутативными алгебрами, довольно просто доказывается, что любая конечнопорожденная КЛМ центрально нильпотентна (теорема 1). При доказательстве используется только такой факт: альтернативная коммутативная ниль-алгебра индекса 3 локально нильпотентна.

Напомним некоторые понятия и результаты из [1].

Пусть $(Q, \cdot) \equiv Q$ – произвольная лупа. Подлупа H лупы Q называется *нормальной* в Q , если для любых элементов x, y из Q верны равенства $x \cdot yH = xy \cdot H$, $Hx \cdot y = H \cdot xy$, $xH = Hx$. Ассоциатор $[a, b, c]$ элементов a, b, c лупы Q определяется равенством $ab \cdot c = (a \cdot bc)[a, b, c]$.

Лупа Q называется *коммутативной лупой Муфанг* (кратко КЛМ), если в ней верны тождество коммутативности $xy = yx$ и одно из эквивалентных тождеств

Муфанг

$$x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z, \quad (zx \cdot y)x = z(x \cdot yx), \quad yx \cdot zy = y(xz \cdot y). \quad (1)$$

КЛМ можно характеризовать и одним тождеством

$$x^2 \cdot yz = xy \cdot xz. \quad (2)$$

КЛМ является *IP-луной*, т.е. удовлетворяет тождеству $x^{-1} \cdot xy = y$, где $x^{-1}x = 1$, и *диассоциативна*, т.е. любые два ее элемента порождают ассоциативную подлупу.

Если A, B, C – непустые подмножества Q , то через $[A, B, C]$ обозначим подлупу КЛМ Q , порожденную всеми ассоциаторами $[a, b, c]$, где $a \in A, b \in B, c \in C$. Индуктивно определяем: $Q_0 = Q, Q_n = [Q_{n-1}, Q, Q]$. Если существует натуральное число n такое, что $Q_n = 1$, то КЛМ Q называется *центрально нильпотентной*. Наименьшее число n с таким свойством называется *степенью центральной нильпотентности*.

Центр $Z(Q)$ КЛМ Q – это множество $Z(Q) = \{x \in Q \mid [x, y, z] = 1 \ \forall y, z \in Q\}$. Легко заметить, что $Z(Q)$ является нормальной подлупой КЛМ Q .

Ниже, для полноты изложения, приведем элементарное доказательство известного факта из [1].

ЛЕММА 1. *Факторлупа $Q/Z(Q)$ произвольной коммутативной лупы Муфанг Q по ее центру $Z(Q)$ удовлетворяет тождеству*

$$x^3 = 1. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что КЛМ диассоциативна и является *IP-луной*. Согласно (2) в КЛМ Q верно тождество $z^2(x \cdot zy) = (zx)(z \cdot zy)$. Теперь вместо y подставляем $z \cdot xy$, а вместо $x - x^{-1}z^{-1}$. В силу (2) $z \cdot xy = z^{-1}(zx \cdot zy)$. Тогда

$$\begin{aligned} z^2((x^{-1}z^{-1})(z(z^{-1}(zx \cdot zy)))) &= (z \cdot z^{-1}x^{-1})(z(z(z \cdot xy))), \\ z^2((xz)^{-1}(xz \cdot zy)) &= x^{-1}(z^3 \cdot xy), \quad z^2 \cdot zy = x^{-1}(z^3 \cdot xy), \\ z^3y &= x^{-1}(z^3 \cdot xy), \quad z^3y \cdot x = z^3 \cdot yx, \end{aligned}$$

т.е. $z^3 \in Z(Q)$. Лемма доказана.

Пусть Φ – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и Q – лупа. Аналогично групповым алгебрам [7] рассмотрим *луповую алгебру* ΦQ . Это свободный Φ -модуль с базисом $\{q \mid q \in Q\}$, т.е. совокупность конечных формальных сумм $\sum_{q \in Q} \lambda_q q$ ($\lambda_q \in \Phi, q \in Q$) с операциями

$$\sum \lambda_q q + \sum \mu_q q = \sum (\lambda_q + \mu_q) q, \quad \left(\sum_{q \in Q} \lambda_q q \right) \left(\sum_{h \in Q} \mu_h h \right) = \sum_{k \in Q} \left(\sum_{x, y \in Q} \lambda_x \mu_y \right) k.$$

Пусть H – нормальная подлупа лупы Q . Через ωH обозначим идеал алгебры ΦQ , порожденный элементами $1 - h$ ($h \in H$). Если $H = Q$, то аналогично [7] ωQ назовем *фундаментальным идеалом* алгебры ΦQ . Имеет место

ЛЕММА 2. Пусть H – нормальная подлупа лупы Q . Тогда

- 1) если элементы h_i порождают подлупу H , то элементы $1 - h_i$ порождают идеал ωH ;
- 2) фундаментальный идеал порождается как Φ -модуль элементами вида $1 - q$ ($q \in Q$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элементы $\{h_i\}$ порождают подлупу H и I – идеал, порожденный элементами $\{1 - h_i\}$. Очевидно, что $I \subseteq \omega H$. Обратно, пусть $g \in H$ и $g = g_1 g_2$, где g_1, g_2 – слова от h_i . Предположим, что $1 - g_1, 1 - g_2 \in I$. Тогда $1 - g = (1 - g_1)g_2 + 1 - g_2 \in I$, т.е. утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Так как $(1 - q)q' = (1 - qq') - (1 - q')$, фундаментальный идеал ωQ порождается как Φ -модуль элементами вида $1 - q$, где $q \in Q$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что Φ – поле характеристики 3 и лупа Q коммутативна. Согласно определению в луповой алгебре ΦQ элементы из Q линейно независимы, поэтому если лупа Q неассоциативна, то в ΦQ равенство

$$[a, b, c] + [a, c, b] + 1 = 0 \quad \forall a, b, c \in Q \quad (4)$$

неверно. Однако, в дальнейшем будем рассматривать преобразованную алгебру ΦQ . А именно, будем требовать, чтобы в алгебре ΦQ выполнялось равенство (4). Это означает, что на самом деле мы будем рассматривать факторалгебру алгебры ΦQ по идеалу, порожденному всеми элементами левой части равенства (4).

Очевидно, что требование (4) не налагает никаких ограничений на луповую операцию $(\cdot)$, если для элементов a, b, c, u, v, w из Q верны импликации:

$$\begin{aligned} [a, b, c] = [u, v, w] &\implies [a, c, b] = [u, w, v], \\ [a, b, c] \neq 1 &\implies [a, b, c] \neq [a, c, b], \\ [a, b, c] = 1 &\implies [a, c, b] = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь, учитывая (4), для элементов $a, b, c \in Q$ имеем

$$ab \cdot c + bc \cdot a + ca \cdot b = (a \cdot bc)[a, b, c] + a \cdot bc + (a \cdot cb)[a, c, b] = (a \cdot bc)([a, b, c] + 1 + [a, c, b]) = 0,$$

т.е. $ab \cdot c + bc \cdot a + ca \cdot b = 0$ для всех $a, b, c \in Q$.

Отсюда и из определения луповой алгебры следует, что алгебра ΦQ удовлетворяет тождеству

$$xy \cdot z + yz \cdot x + zx \cdot y = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что из коммутативности лупы Q следует коммутативность алгебры ΦQ . Покажем, что алгебра ΦQ альтернативна, т.е. в ней верно тождество $(x, y, z) = -(x, z, y)$, где $(x, y, z) = xy \cdot z - x \cdot yz$. Действительно, из (6), учитывая коммутативность алгебры ΦQ и характеристику поля Φ , получаем

$$\begin{aligned} xy \cdot z - 2yz \cdot x + zx \cdot y &= 0, & xy \cdot z - yz \cdot x &= -(zx \cdot y - yz \cdot x), \\ xy \cdot z - x \cdot yz &= -(xz \cdot y - x \cdot zy), & (x, y, z) &= -(x, z, y). \end{aligned}$$

Имеет место

ЛЕММА 3. Пусть в коммутативной лупе Q верны импликации (5) и луповая алгебра ΦQ удовлетворяет равенству (4). Тогда фундаментальный идеал ωQ будет альтернативной коммутативной Φ -алгеброй, а Q – лупой Муфанг. Более того, если в лупе Q верно тождество $x^{3^k} = 1$, то в алгебре ωQ верно тождество $x^{3^k} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [8], что альтернативные алгебры удовлетворяют тождествам Муфанг, поэтому Q является лупой Муфанг. Оставшаяся часть первого утверждения доказана выше.

Согласно утверждению 2) леммы 2 любой элемент h из ωQ имеет вид $h = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_n q_n$, где $\lambda_i \in \Phi$, $q_i = 1 - g_i$, $g_i \in Q$. Поле Φ имеет характеристику 3, значит из равенства $g^{3^k} = 1$ следует равенство $q^{3^k} = 0$. Более того, используя равенство (6) и альтернативность $x \cdot xy = x^2 y$, легко показать, что $h^{3^k} = 0$, т.е. в алгебре ωQ верно тождество $x^{3^k} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Q – произвольная коммутативная лупа Муфанг и луповая алгебра ΦQ удовлетворяет равенству (4). Тогда фундаментальный идеал ωQ является альтернативной коммутативной Φ -алгеброй. Если в Q верно тождество $x^{3^k} = 1$, то в ωQ верно тождество $x^{3^k} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия 1 вытекает из леммы 3, поскольку в произвольной КЛМ верны импликации (5). Их справедливость легко следует из тождеств

$$[x, y, z]^3 = 1, \quad [x, y, z] = [x, z, y]^{-1}, \quad (7)$$

имеющих место в произвольной КЛМ [1].

Предположим теперь, что коммутативная лупа Q удовлетворяет тождествам (7). Тогда, учитывая характеристику поля Φ , для $a, b, c \in Q$ имеем

$$[a, b, c] + [a, c, b] + 1 = -2[a, b, c] + [a, b, c]^{-1} + 1 = -2[a, b, c] + [a, b, c]^2 + 1 = ([a, b, c] - 1)^2.$$

Получили, что равенство (4) эквивалентно равенству $([a, b, c] - 1)^2 = 0$ для всех $a, b, c \in Q$. Это означает, что требование выполнения (4) в луповой алгебре ΦQ не налагает никаких ограничений на луповую операцию $(\cdot)$. Тогда из леммы 3 вытекает.

СЛЕДСТВИЕ 2. В классе коммутативных луп тождества Муфанг (1) и тождества (7) эквивалентны, т.е. коммутативную лупу Муфанг можно определить как коммутативную лупу, в которой выполняются тождества (7).

По поводу следствия 2 отметим, что в [9] построен пример коммутативной диаассоциативной IP-лупы, удовлетворяющей тождествам $x^2 = 1$, $[x, y, z] = [x, z, y]^{-1}$, которая не является лупой Муфанг.

В дальнейшем будем предполагать, что КЛМ Q удовлетворяет тождеству (3). Тогда из следствия 1 вытекает, что фундаментальный идеал ωQ будет альтернативной коммутативной алгеброй, удовлетворяющей тождеству

$$x^3 = 0. \quad (8)$$

Пусть $u, v, w \in \omega Q$. Тогда $(1 - u)(1 - v) = 1 - (u + v - uv) \in \omega Q$, $(1 - u)^{-1} = 1 + u + u^2 = 1 - (-u - u^2) \in \omega Q$, т.е. $1 - \omega Q$ является КЛМ. Теперь в силу соотношения $[x, y, z] = (xy \cdot z) \cdot (x \cdot yz)^{-1}$ и (8) имеем

$$\begin{aligned} [1 - u, 1 - v, 1 - w] &= (1 - u - v - w + uv + uw + vw - uv \cdot w) \cdot (1 + u + v + w \\ &\quad + uv + uw + vw + u^2 + v^2 + w^2 - u \cdot vw + v \cdot uw + w \cdot uv \\ &\quad + u^2v + u^2w + v^2u + v^2w + w^2u + w^2v + u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 \\ &\quad + u^2 \cdot vw - v^2u \cdot w - v^2 \cdot uw - w^2 \cdot uv \\ &\quad - w^2u \cdot v + u^2 \cdot v^2w + u^2 \cdot w^2v + v^2w^2 \cdot u + u^2 \cdot v^2w^2). \end{aligned} \quad (9)$$

В произвольной алгебре A индуктивно определим

$$A^1 = A^{(1)} = A, \quad A^n = \sum_{i+j=n} A^i \cdot A^j, \quad A^{(n)} = A^{(n-1)}A.$$

Напомним, что алгебра A называется *нильпотентной* (соответственно *правонильпотентной*), если найдется n такое, что $A^n = 0$ (соответственно $A^{(n)} = 0$).

ЛЕММА 4. *Конечнопорожденная ассоциативная Φ -алгебра A , удовлетворяющая тождеству (8), nilьпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в алгебре A верно тождество

$$uvi = -u^2v - vu^2. \quad (10)$$

Действительно, если в (8) положить $x = u + v$, то $uvi + u^2v + vu^2 + vuv + v^2u + uv^2 = 0$. В последнем равенстве меняем v на $-v$ и полученное складываем с этим равенством. Получаем $2(uvi + u^2v + vu^2) = 0$, $uvi + u^2v + vu^2 = 0$, т.е. равенство (10) верно.

Пусть $a_1, \dots, a_m$ — образующие алгебры A и b — произвольный элемент из A степени $\geq 3m + 1$. Тогда, очевидно, слово b содержит подслово вида $a_i v_1 a_i v_2 a_i v_3 a_i$, где $i = 1, \dots, m$, $v_1, v_2, v_3 \in A$, причем v_1, v_2, v_3 могут и отсутствовать. Теперь, учитывая (8) и (10), получаем

$$\begin{aligned} a_i v_1 a_i v_2 a_i v_3 a_i &= (-a_i^2 v_1 - v_1 a_i^2) \cdot v_2 (-a_i^2 v_3 - v_3 a_i^2) \\ &= a_i^2 v_1 v_2 a_i^2 v_3 + a_i^2 v_1 v_2 v_3 a_i^2 + v_1 a_i^2 v_2 a_i^2 v_3 + v_1 a_i^2 v_2 v_3 a_i^2 \\ &= -a_i^4 v_1 v_2 v_3 - v_1 v_2 a_i^4 v_3 - a_i^4 v_1 v_2 v_3 - v_1 v_2 v_3 a_i^4 \\ &\quad - v_1 a_i^4 v_2 v_3 - v_1 v_2 a_i^4 v_3 - v_1 a_i^4 v_2 v_3 - v_1 v_2 v_3 a_i^4 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, алгебра A nilьпотентна индекса не больше, чем $3m + 1$. Лемма доказана.

Отметим, что лемма 4 является частным случаем классической теоремы Левицкого о локальной nilьпотентности nilь-PI-алгебры [10].

Пусть A — альтернативная коммутативная Φ -алгебра с множеством образующих $a_1, \dots, a_m$, удовлетворяющая тождеству (8). Наша дальнейшая цель — привести простое доказательство того, что алгебра A локально nilьпотентна. Этот факт является частным случаем классической теоремы Ширшова о локальной nilьпотентности альтернативной nilь-алгебры ограниченного индекса [8], [11]. Будем следовать идеям

А. И. Ширшова [11]. Отметим, что линеаризация тождества (8) с учетом характеристики поля Φ дает тождество (6).

Пусть $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_s}$ – некоторое ассоциативное слово. Положим

$$\langle a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_s} \rangle = \{ \dots [(a_{i_1} a_{i_2}) a_{i_3}] a_{i_4} \dots \} a_{i_s}.$$

Операцию $\langle \cdot \rangle$ распространим на неассоциативные слова, пренебрегая имеющимися в них скобками. Например, $\langle (ab)(cd) \rangle + \langle m[n(pq)] \rangle = [(ab)c]d + [(mn)p]q$.

ЛЕММА 5. Пусть d – некоторый элемент альтернативной коммутативной Φ -алгебры A , удовлетворяющей тождеству (8). Тогда $d = \langle d \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in A$. Покажем, что

$$md = \langle \overline{m}d \rangle \quad (11)$$

(черта сверху какого-либо подслова будет означать, что данное слово рассматривается в качестве образующего и не подвергается изменению). Действительно, если d имеет степень 1, то равенство (11) справедливо. Пусть d имеет степень > 1 , а для меньших степеней (11) верно, и пусть $d = d_1 d_2$. Тогда в силу линейности операции $\langle \cdot \rangle$, тождества (6) и предположения индукции

$$\begin{aligned} md &= m \cdot d_1 d_2 = -md_1 \cdot d_2 - md_2 \cdot d_1 = -\langle \overline{m}d_1 \rangle d_2 - \langle \overline{m}d_2 \rangle d_1 \\ &= -\langle (\overline{m}d_1)d_2 \rangle - \langle (\overline{m}d_2)d_1 \rangle = \langle \overline{m}d \rangle, \end{aligned}$$

т.е. равенство (11) доказано.

Теперь, используя равенство (11) и индукцию по степени слова d , получаем

$$d = \langle d_1 d_2 \rangle = \langle \langle d_1 \rangle d_2 \rangle = \langle d \rangle.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Конечнопорожденная альтернативная коммутативная Φ -алгебра, удовлетворяющая тождеству (8), нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В свободной ассоциативной Φ -алгебре с множеством образующих $a_1, \dots, a_m$ рассмотрим идеал I , порожденный третьими степенями всех элементов алгебры. Из леммы 4 следует, что для любого одночлена q алгебры A , имеющего степень $> 3m + 1$, верно равенство $q = \sum_r \lambda_r b_r d_r^3 c_r$, где $\lambda_r \in \Phi$, b_r, d_r, c_r – одночлены из A , причем b_r, c_r могут и отсутствовать. Так как последнее равенство выполняется в свободной ассоциативной Φ -алгебре, в любой (неассоциативной) Φ -алгебре с тем же множеством образующих будет выполняться равенство

$$\langle q \rangle = \sum_r \lambda_r \langle \langle b_r \overline{d_r^3} \rangle c_r \rangle = 0.$$

Это означает, что алгебра A правонильпотентна. Но любая коммутативная правонильпотентная алгебра нильпотентна [8]. Действительно, в силу коммутативности

$$A^{2^n} = \sum_{\substack{i+j=2^n \\ i \geq j}} A^i A^j \subseteq A^{2^{n-1}} A$$

и тривиальная индукция дает $A^{2^n} \subseteq A^{(n)}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1 (ослабленный вариант теоремы Брака–Слеби). *Любая конечнопорожденная коммутативная лупа Муфанг центрально нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если факторлупа $Q/Z(Q)$ КЛМ Q по ее центру $Z(Q)$ центрально нильпотентна, то и сама КЛМ Q центрально нильпотентна. В силу леммы 1 $Q/Z(Q)$ удовлетворяет тождеству (3), поэтому для доказательства нашего утверждения предположим, что КЛМ Q конечнопорожденна и удовлетворяет тождеству (3).

Согласно утверждению 1) леммы 2 и следствию 1 фундаментальный идеал $\omega Q = A$ является конечнопорожденной альтернативной коммутативной Φ -алгеброй, удовлетворяющей тождеству (8). Тогда из леммы 6 следует, что A нильпотентна: предположим $A^n = 0$.

Положим $B = 1 - A$, $B^{(i)} = \{1 - a \mid a \in A^i\}$. Очевидно, что $Q \subseteq B$. Пусть $u_i \in A$, $i = 1, 2, \dots$. После раскрытия скобок в (9) и приведения подобных членов получаем, что $[1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3] = 1 - a$, где $a \in A^3$. Тем самым, индукцией по i устанавливаем, что $[1 - u_1, 1 - u_2, \dots, 1 - u_{2i+1}] = 1 - a$, где $a \in A^{2i+1}$, и $[v_1, \dots, v_{2i-1}, v_{2i}, v_{2i+1}] = [[v_1, \dots, v_{2i-1}], v_{2i}, v_{2i+1}]$. Но $B^{(n)} = 1$, поэтому B , а следовательно, и КЛМ Q центрально нильпотентны. Теорема доказана.

Отметим, наконец, что при исследовании КЛМ теорема Брака–Слеби чаще всего используется именно в ослабленном варианте (см., например, [1], [12]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bruck R. H. A Survey of Binary Systems. Berlin: Springer, 1958.
- [2] Манин Ю. И. Кубические формы. М.: Наука, 1972.
- [3] Smith J. D. H. Commutative Moufang loops: the first 50 years // Algebras Groups Geom. 1985. V. 2. №2. P. 209–324.
- [4] Malbos J.-P. Sur la class de nilpotence des boucles commutatives de Moufang et des espaces médiaux // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A–B. 1978. V. 287. №9. P. A691–A693.
- [5] Bénéteau L. Free commutative Moufang loops and anticommutative graded rings // J. Algebra. 1980. V. 67. №1. P. 1–35.
- [6] Smith J. D. H. On the nilpotence class of commutative Moufang loops // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1978. V. 84. №3. P. 387–404.
- [7] Залесский А. Е., Михалёв А. В. Групповые кольца // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1973. С. 5–118.
- [8] Жевлаков К. А., Слинько Ф. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
- [9] Norton D. A. Hamiltonian loops // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 56–65.
- [10] Джекобсон Н. Строение колец. М.: ИЛ, 1961.
- [11] Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Матем. сб. 1957. Т. 41(83). С. 381–394.
- [12] Chein O., Pflugfelder H. O., Smith J. D. H. Quasigroups and Loops: Theory and Applications. Berlin: Heldermann, 1990.

Государственный аграрный университет Молдовы, г. Кишинев

Поступило

01.07.96

Исправленный вариант

19.08.97