Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Б. Скаскив, О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 282–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:14:49

УДК 517.53.6

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ И МАКСИМАЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

О. Б. Скаскив

Для целых рядов Дирихле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), установлены условия на показатели λ_n , достаточные для того, чтобы при $x \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества конечной меры выполнялись соотношения

$$\psi(\ln \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}) = (1 + o(1)) \psi(\ln \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}),$$

где $\psi(x)$ – возрастающая к $+\infty$ функция такая, что $x \leq \psi(x) \leq e^x$ ($x \geq 0$).

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)$ – возрастающая к $+\infty$ последовательность неотрицательных чисел, $H(\Lambda)$ – класс целых рядов Дирихле вида

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it. \quad (1)$$

Положим $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $m(\sigma, F) = \inf\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. Пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\}$ – максимальный член ряда (1). Известно [1], для того чтобы для любой функции $F \in H(\Lambda)$ выполнялись соотношения

$$M(\sigma, F) \sim m(\sigma, F) \sim \mu(\sigma, F), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

вне некоторого множества из $[0, +\infty)$ конечной меры, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \quad (3)$$

Известно [2], для того чтобы для любой функции $F \in H(\Lambda)$ выполнялось соотношение

$$\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

вне некоторого множества из $[0, +\infty)$ конечной меры, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty. \quad (5)$$

В настоящей статье решается задача нахождения условий, при которых справедливо соотношение

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

вне некоторого множества конечной меры. В частности, получен ответ на вопрос Шереметы о существовании условия, объединяющего условия (3) и (5) и являющегося окончательным для фиксированных функций $\omega(x)$ таких, что $\ln x \leq \omega(x) \leq x$. Заметим, что соотношение (2) следует из (6) при $\omega(x) = x$, а соотношение (4) – при $\omega(x) = \ln x$. В [3] при некоторых условиях на гладкость и медленном возрастании $\psi(x)$ показано, что

$$\ln n = o(\lambda_n \psi(\lambda_n)), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (7)$$

является достаточным условием того, чтобы для каждой функции $F \in H(\Lambda)$, коэффициенты которой удовлетворяют условию

$$|a_n| \leq e^{-\lambda_n \psi(\lambda_n)}, \quad n \geq n_0, \quad (8)$$

имело место соотношение

$$\psi(\ln M(\sigma, F)) \sim \psi(\ln \mu(\sigma, F)), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

вне множества нулевой линейной плотности. Если ψ – медленно возрастающая функция такая, что $\psi(t\psi(t)) \sim \psi(t \ln t) \sim \psi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, то условие (7) является необходимым и достаточным для того, чтобы для каждой функции, удовлетворяющей условию (8), соотношение (9) имело место вне множества нулевой линейной плотности (см. [4]). Однако, если функции ψ в условии (8) и соотношении (9) разные, то такое утверждение неизвестно. Открытым является вопрос и в случае всего класса $H(\Lambda)$ для соотношения (9) с исключительным множеством конечной меры. В этой заметке получено условие, обеспечивающее (9) при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества конечной меры для функции ψ , $x \leq \psi(x) \leq e^x$, совпадающее в случае $\psi(x) = x$ с (5), а для $\psi(x) = e^x$ с (3). Кроме того, показана неулучшаемость полученного утверждения. Для удобства вместо (9) будем рассматривать соотношение (6).

Обозначим через $n_\Lambda(a, b] = \sum_{a < \lambda_n \leq b} 1$ количество элементов последовательности Λ на интервале $(a, b]$. Пусть L – класс положительных, непрерывных на $[0, +\infty)$ функций; L^+ – подкласс L , состоящий из возрастающих к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ функций $\alpha(x)$; L_1 – класс функций $\psi \in L$, для которых

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

$L_1^+ = L_1 \cap L^+$; L_2 – класс дифференцируемых вогнутых функций $\omega \in L^+$ таких, что

$$\frac{1}{t} = O(\omega'(t)), \quad t \rightarrow +\infty;$$

L_3 – класс функций $\omega \in L^+$ таких, что $\omega'(t) \ln t = o(1)$ при $t \rightarrow +\infty$ и для любой функции $\varepsilon(t) \rightarrow +0$ ($t \rightarrow +\infty$)

$$\frac{1}{\omega'(t\varepsilon(t))} = o\left(\frac{1}{\omega'(t)}\right);$$

L_4 – класс дважды дифференцируемых функций $\omega \in L^+$ таких, что $k'(t)$ не убывает и $\ln(1 + k'(t)/t) = o(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, где $k(t)$ – функция, обратная к $1/\omega'(x)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F \in H(\Lambda)$, $\omega \in L_2$. Если существуют $\psi_1 \in L_1^+$ и $\psi_2 \in L_1$ такие, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{\omega'}(\psi_1^{-1}(t)) \ln n_\Lambda(t - \sqrt{\psi_2(t)}, t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq p, \quad (10)$$

то

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow +\infty \\ \sigma \notin E}} (\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F))) \leq p,$$

где $E \subset [0, +\infty)$ – множество конечной меры.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (10) с $p = 0$ и функцией $\omega \in L_3$ эквивалентно условию

$$\int^{+\infty} \frac{k(\ln n(t))}{t^2} dt < +\infty, \quad (11)$$

где $k(t)$ – функция обратная к $1/\omega'(x)$, а в случае $\omega(x) = x$, $p = 0$ условие (10) эквивалентно условию (3), где $n(t) = n_\Lambda(0, t]$.

Следующая теорема указывает на необходимость условия (11) для справедливости соотношения (6) вне множества конечной меры, а в силу замечания 1 и на необходимость условия (10) с $p = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega \in L_4$. Для каждой последовательности, для которой расходится интеграл

$$\int^{+\infty} \frac{k(\ln n(t))}{t^2} dt = +\infty, \quad (12)$$

существует функция $F \in H(\Lambda)$ такая, что

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \geq b > 0, \quad \sigma \geq \sigma_0. \quad (13)$$

Из теорем 1 и 2 согласно замечанию 1 следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\omega \in L_3 \cap L_4$. Для того чтобы для каждой функции $F \in H(\Lambda)$ соотношение (6) выполнялось при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества конечной меры, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл (11).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условию $\omega \in L_3 \cap L_4$ удовлетворяют функции, которые, кроме некоторых ограничений на правильность изменения, очевидно должны удовлетворять условию

$$\omega(t) = o\left(\frac{t}{\ln t}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следующие два утверждения показывают, что условие (10) в некотором смысле не улучшаемо также в случаях $\omega(t) = O(t/\ln t)$ и $\omega(t) = t/l(t)$, где $l(t)$ – медленно возрастающая функция.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\omega \in L_2$ и, кроме того,

$$\omega'(t) = O\left(\frac{1}{\ln t}\right), \quad \omega'(t \ln t) \sim \omega'(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

Если для функций $\psi_1 \in L_1^+$, $\psi_2 \in L_1$ таких, что $\psi_1(t) = O(t \ln^2 t)$, $\psi_2(t) = o(t \ln^2 t)$ ($t \rightarrow +\infty$), имеет место

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{\omega'}(\psi_1^{-1}(t)) \ln n_\Lambda(t - \sqrt{\psi_2(t)}, t + \sqrt{\psi_2(t)}) = p > 0, \quad (15)$$

то найдется функция $F \in H(\Lambda)$ такая, что

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \geq p + o(1), \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть возрастающая функция $\omega(t) = t/l(t)$ такова, что при $t \rightarrow +\infty$ функция $\omega'(t)$ убывает, $tl'(t)/l(t) \rightarrow 0$, $l(t) \uparrow +\infty$, $l(tl(t)) \sim l(t) \sim l(t \ln t)$. Если для любых функций $\psi_1 \in L_1^+$, $\psi_2 \in L_1$ выполняется

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln n_\Lambda(t, t + \sqrt{\psi_2(t)}) = p > 0, \quad (16)$$

то найдутся функция $F \in H(\Lambda)$ и постоянная $b > 0$ такие, что имеет место (13), где $b = b(\psi_1, \psi_2)$.

2. Доказательство теоремы 1. Введем сначала понятие h -меры множества $E \subset \mathbb{R}$. Пусть $h(x)$ – положительная, интегрируемая на каждом конечном отрезке $[a, b]$ функция такая, что

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx = +\infty,$$

а $E \subset \mathbb{R}_+$ – измеримое множество. Тогда h -мерой множества E назовем

$$h\text{-meas } E = \int_E h(x) dx.$$

Точно так же, как и лемма 6.15 из [5, с. 359], доказывается

ЛЕММА 1. Пусть $\psi \in L_1$ и $g(x)$ – дифференцируемая, положительная, возрастающая функция, а $E = \{x \geq 0 : g'(x) \geq h(x)\psi(g(x))\}$. Тогда $h\text{-meas } E < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\int_E h(x) dx \leq \int_E \frac{g'(x)}{\psi(g(x))} dx \leq \int_E \frac{dg(x)}{\psi(g(x))} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty.$$

Лемма 1 доказана.

Далее для удобства вместо ряда Дирихле будем рассматривать функции F_1 , определенные на $[0, +\infty)$ при помощи сходящегося интеграла

$$F_1(\sigma) = \int_0^{+\infty} a(t)e^{t\sigma} v(dt), \quad (17)$$

где $a(t)$ – положительная, непрерывная на $[0, +\infty)$ функция, v – счетно-аддитивная на $[0, +\infty)$ мера с неограниченным носителем. Заметим, что в этом случае для любого $b > 0$, $e^{b\sigma} = o(F_1(\sigma))$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ имеем $(\ln F_1(\sigma))' \uparrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow +\infty$; более того, F_1 можно произвольное число раз дифференцировать под знаком интеграла.

Зафиксируем $\sigma > 0$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{F_1(\sigma)} \int_0^x a(t)e^{t\sigma} v(dt) & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\Phi(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины R , т.е. $\Phi(x) = P\{R < x\}$, где P – некоторая вероятностная мера. Тогда для $g_1(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \ln F_1(\sigma)$ имеем математическое ожидание

$$MR = \int_0^{+\infty} x d\Phi(x) = g_1'(\sigma)$$

и дисперсию $DR = MR^2 - (MR)^2 = g_1''(\sigma)$. Поэтому, используя неравенство Чебышева

$$P\{|R - MR| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DR}{\varepsilon^2}$$

для $\varepsilon = \sqrt{cDR}$, $c > 1$, получим

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \int_{|t - g_1'(\sigma)| < \sqrt{cg_1''(\sigma)}} a(t) e^{t\sigma} v(dt) + F_1(\sigma) P\{|R - MR| \geq \varepsilon\} \\ &\leq \int_{|t - g_1'(\sigma)| < \sqrt{cg_1''(\sigma)}} a(t) e^{t\sigma} v(dt) + \frac{1}{c} F_1(\sigma). \end{aligned}$$

Отсюда следует

ЛЕММА 2. Пусть $g_1(\sigma) = \ln F_1(\sigma)$, $F_1 \in C^{(\infty)}[0, +\infty)$ имеет вид (17). Тогда для каждого $\sigma > 0$ и каждой функции $c = c(\sigma) > 1$

$$F_1(\sigma) \leq \frac{c}{c-1} \int_{|t - g_1'(\sigma)| < \sqrt{cg_1''(\sigma)}} a(t) e^{t\sigma} v(dt).$$

Обозначим $v(a, b] = v((a, b])$, $\mu(\sigma) = \sup\{a(t)e^{t\sigma} : t > 0\}$. Теорема 1 непосредственно вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функции ω, ψ_1, ψ_2 такие же, как и в теореме 1, а функция F_1 такая же, как и в лемме 2. Если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln v(t - \sqrt{\psi_2(t)}, t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq p, \quad (18)$$

то найдется множество E конечной меры такое, что имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow +\infty \\ \sigma \notin E}} (\omega(\ln F_1(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma))) \leq p. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что

$$\ln F_1(\sigma) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad \sigma \rightarrow +\infty \quad (20)$$

($\sigma \notin E_1$, E_1 — множество конечной меры). Заметим, что из условий $\omega \in L_2$ и (18) следует

$$\ln v(t - \sqrt{\psi_2(t)}, t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq O(\psi_1^{-1}(t)), \quad t \rightarrow +\infty.$$

В последнем соотношении функцию $\psi_1(t) \in L_1^+$ можно заменить функцией $\tilde{\psi}_1 \in L_1^+$ такой, что

$$\ln v(t - \sqrt{\psi_2(t)}, t + \sqrt{\psi_2(t)}) = o(\tilde{\psi}_1^{-1}(t)), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (21)$$

Используя лемму 2, а также лемму 1 с функциями $g(\sigma) = g_1'(\sigma)$, $h(x) \equiv 1$, $\psi(t) = \psi_2(t)/c$, $c = c(\sigma) \equiv \text{const} > 1$, приходим к неравенству

$$F_1(\sigma) \leq \frac{c}{c-1} \mu(\sigma) v\left(g_1'(\sigma) - \sqrt{\psi_2(g_1'(\sigma))}, g_1'(\sigma) + \sqrt{\psi_2(g_1'(\sigma))}\right),$$

справедливому при $\sigma \notin E_2$ (E_2 – множество конечной меры). Отсюда и из (21) при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E_2$) имеем

$$\ln F_1(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma) + o(\tilde{\psi}_1^{-1}(g'_1(\sigma)));$$

откуда, применяя лемму 1 с $h(x) \equiv 1$, $g(\sigma) = g_1(\sigma)$, $\psi(t) = \tilde{\psi}_1(t)$, получаем (20) при $\sigma \rightarrow +\infty$, $\sigma \notin E_1 = E_2 \cup E_3$ (E_3 – множество конечной меры). Далее, поскольку $\psi_2 \in L_1$, для функции

$$\tilde{\psi}_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{l(t)}, \quad l(t) = \left(\int_t^{+\infty} \frac{dx}{\psi_2(x)} \right)^{-1/2},$$

это условие также имеет место. Применим теперь лемму 2 и лемму 1 с функциями $h(x) \equiv 1$, $\psi(t) = \tilde{\psi}_2(t)$, $g(\sigma) = g'_1(\sigma)$, а функцию $c(\sigma) \rightarrow +\infty$ ($\sigma \rightarrow +\infty$) выберем ниже. Вспомогая, что $\omega'(t)$ убывает ($t \rightarrow +\infty$), при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E_4$, E_4 – множество конечной меры) имеем

$$\begin{aligned} \omega(\ln F_1(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma)) &\leq \omega'(\ln \mu(\sigma)) (\ln F_1(\sigma) - \ln \mu(\sigma)) \\ &\leq \omega'(\ln \mu(\sigma)) \left(c_1(\sigma) + \ln v \left(g'_1(\sigma) - \sqrt{c\tilde{\psi}_2(g'_1(\sigma))}, g'_1(\sigma) + \sqrt{c\tilde{\psi}_2(g'_1(\sigma))} \right) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$c_1(\sigma) = \ln \frac{c(\sigma)}{c(\sigma) - 1}.$$

Если применить лемму 1 к функции $g_1(\sigma)$ с $h(x) \equiv 1$ и функцией $\psi_1(t/2)$ вместо $\psi(t)$, для всех $\sigma \notin E_5$ (E_5 – множество конечной меры), получим

$$g'_1(\sigma) < \psi_1\left(\frac{1}{2}g_1(\sigma)\right).$$

Кроме того, из (20) при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E_1$) имеем $\ln \mu(\sigma) \geq g_1(\sigma)/2$. Следовательно, при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E_1 \cup E_5$)

$$\ln \mu(\sigma) \geq \psi_1^{-1}(g'_1(\sigma)).$$

Выбирая теперь $c(\sigma) = l(g'_1(\sigma))$ и применяя подстановку $t = g'_1(\sigma)$, из (22) при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E_1 \cup E_4 \cup E_5$) имеем

$$\begin{aligned} \omega(\ln F_1(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma)) &\leq c_1(\sigma) \omega'(\psi_1^{-1}(t)) + \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln v(t - \sqrt{\psi_2(t)}, t + \sqrt{\psi_2(t)}) \\ &\leq p + o(1). \end{aligned}$$

Теорема 6, а вместе с ней и теорема 1 доказаны. Для того чтобы убедиться в последнем, достаточно положить $v(a, b] = n_\Lambda(a, b]$ и $a(\lambda_n) = |a_n|$.

3. Доказательство теоремы 2. Заметим, что из (12) следует расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (k(\ln(n+1)) - k(\ln n)) = +\infty. \quad (23)$$

Не уменьшая общности, можем считать, что $k(0) = 0$ и

$$k(\ln(n+1)) = O(\lambda_n), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (24)$$

В противном случае несложно показать, что существует подпоследовательность (λ_n^*) последовательности (λ_n) , для которой условия (23) и (24) выполняются одновременно. В этом случае если $\lambda_n \notin \{\lambda_j^*\}$, то полагаем $a_n = 0$; остальные коэффициенты выбираем, как и ниже. Таким образом, считаем, что условия (23) и (24) выполняются одновременно. Положим

$$c_n = \beta(k(\ln(n+1)) - k(\ln n)), \quad \beta > 0, \\ \ln a_n = - \sum_{s=1}^n \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s} c_s, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1.$$

Поскольку $t = O(k(t))$, легко видеть, что в силу условий (23) и (24) функция F вида (1) с только что выбранными коэффициентами принадлежит классу $H(\Lambda)$. Заметим, что

$$\varkappa_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \ln \frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{c_s}{\lambda_s} \uparrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Поэтому, как хорошо известно (см., например, [4]), в этом случае для $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ имеем

$$\ln \mu(\sigma, F) = \ln a_n + \sigma \lambda_n \leq \ln a_n + \varkappa_{n+1} \lambda_n = \sum_{s=1}^n c_s = \beta k(\ln(n+1)). \quad (25)$$

Кроме того, для $m \leq n-1$

$$\ln a_m + \sigma \lambda_m \geq \varkappa_n \lambda_m - \sum_{s=1}^m \frac{\lambda_m - \lambda_s}{\lambda_s} c_s \geq \sum_{s=1}^m c_s = \beta k(\ln(m+1)). \quad (26)$$

Положим

$$m_1 = \frac{nk'(\ln(n+1)) - \ln(n+1)}{k'(\ln(n+1)) + \ln(n+1)}, \quad m = [m_1] \leq n-1.$$

Тогда согласно условию $\ln(1 + k'(t)/t) = o(t)$ ($t \rightarrow +\infty$)

$$\ln(n-m) \geq \ln(n-m_1) = \ln(n+1) - \ln\left(1 + \frac{k'(\ln(n+1))}{\ln(n+1)}\right) = (1+o(1)) \ln n, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} k(\ln(n+1)) - k(\ln(m+1)) &\leq \ln \frac{n+1}{m+1} k'(\ln(n+1)) \leq 2 \frac{n-m_1}{m_1} k'(\ln(n+1)) \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{k'(\ln(n+1))}{k'(\ln(n+1)) - \frac{1}{n} \ln(n+1)} \ln(n+1) \\ &= (2 + o(1)) \ln(n+1), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (28)$$

Если выбрать $\beta < 1/2$, то отсюда и из (27) при $n \rightarrow +\infty$ получим

$$\ln(n-m) - \beta(k(\ln(n+1)) - k(\ln(m+1))) \geq (1 - 2\beta + o(1)) \ln(n+1). \quad (29)$$

Поскольку для $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ последовательность $(a_m e^{\sigma \lambda_m})$ убывающая для $m \leq n-1$, то

$$F(\sigma) \geq \sum_{s=m}^n a_s e^{\sigma \lambda_s} \geq (n-m) a_m e^{\varkappa_n \lambda_m}.$$

Применяя (25)–(29), при $n \rightarrow +\infty$ получим

$$\begin{aligned} \omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) &\geq \omega(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1))) - \omega(\beta k(\ln(n+1))) \\ &\geq (1 - 2\beta + o(1)) \ln(n+1) \omega'(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1))) \\ &= \frac{(1 - 2\beta + o(1)) \ln(n+1)}{k^{-1}(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1)))}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку $\min\{k'(t) : t \geq 1\} = k'(1) = c > 0$, то $k((1+1/c)t) \geq k(t) + tk'(t)/c \geq k(t) + t$, а также

$$k^{-1}(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1))) \leq k^{-1}(\ln n + \beta k(\ln n)) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) \ln n.$$

Отсюда и из (30) получим утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 4. Заметим, что можно считать условие (5) выполненным, ибо в противном случае (см. [2]) расходится интеграл

$$\int_0^\infty t^{-2} \ln n(t) dt = +\infty$$

и по теореме 2 (применяемой в случае $\omega(x) = \ln x$) найдется функция $F \in H(\Lambda)$ такая, что для некоторого $b > 0$

$$\ln M(\sigma, F) \geq e^b \ln \mu(\sigma, F), \quad \sigma \geq \sigma_0.$$

Отсюда согласно условию $1/t = O(\omega'(t))$ при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \geq (e^b - 1) \ln \mu(\sigma, F) \omega'(e^b \ln \mu(\sigma, F)) \geq c_1 > 0.$$

Значит, в этом случае теорема 4 доказана. Теперь, считая, что одновременно выполняются условия (5) и (15), рассмотрим ряд Дирихле вида (1) с коэффициентами $\ln a_n = -\lambda_n \ln^+ \ln \lambda_n$. Поскольку из условия (5) следует $\ln n = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow +\infty$), функция F , определяемая рядом (1), принадлежит $H(\Lambda)$. Пусть $h(x) = -x \ln^+ \ln x + x\sigma$, а x_σ – единственная точка максимума $h(x)$ на интервале $[e, +\infty)$, определяемая из уравнения $h'(x) = -\ln \ln x - 1/\ln x + \sigma = 0$. Отсюда

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq h(x(\sigma)) \leq \frac{x(\sigma)}{\ln x(\sigma)}. \quad (31)$$

Обозначим $t_{\pm} = x(\sigma) \pm \sqrt{\psi_2(x(\sigma))}$. Тогда

$$F(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{h(x)} dn(x) \geq \int_{t_-}^{t_+} e^{h(x)} dn(x).$$

Поскольку для $x \in [t_-, t_+]$

$$h(x) = h(x(\sigma)) + \frac{1}{2}(x - x(\sigma))^2 h''(\tilde{x})$$

с некоторым $\tilde{x} \in (t_-, t_+)$ и $h''(\tilde{x}) \sim -(x(\sigma) \ln x(\sigma))^{-1}$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, то

$$h(x) \geq h(x(\sigma)) - \frac{1}{2} \frac{\psi_2(x(\sigma))}{x(\sigma) \ln x(\sigma)} (1 + o(1))$$

для $x \in [t_-, t_+]$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Значит,

$$F(\sigma) \geq \mu(\sigma, F) n_{\Lambda}(t_-, t_+) \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \frac{\psi_2(x(\sigma))}{x(\sigma) \ln x(\sigma)} \right\}. \quad (32)$$

Заметим, что по условию (15)

$$\ln n_{\Lambda}(t_-, t_+) - \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \frac{\psi_2(x(\sigma))}{x(\sigma) \ln x(\sigma)} \geq \frac{p + o(1)}{\omega'(\psi_1^{-1}(x(\sigma)))}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Поэтому из (31) и (32) при $\sigma \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) &\geq \frac{p + o(1)}{\omega'(\psi_1^{-1}(x(\sigma)))} \omega' \left(\ln \mu(\sigma, F) + \frac{p + o(1)}{\omega'(\psi_1^{-1}(x(\sigma)))} \right) \\ &\geq \frac{p + o(1)}{\omega'(\psi_1^{-1}(x(\sigma)))} \omega' \left(\frac{x(\sigma)}{\ln x(\sigma)} + \frac{p + o(1)}{\omega'(\psi_1^{-1}(x(\sigma)))} \right). \end{aligned}$$

Используя условия $\psi_1(t) = O(t \ln^2 t)$, $1/\omega'(t) = O(t)$, $\omega'(t \ln t) \sim \omega'(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, получаем

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \geq \frac{p + o(1)}{\omega'(t)} \omega'(ct \ln t) = p + o(1),$$

где $t = t(\sigma) = \psi_1^{-1}(x(\sigma))$, $c > 0$ – некоторая постоянная. Теорема 4 доказана.

5. Доказательство теоремы 5. Заметим сначала, что найдется положительная и непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $\varphi(t) \uparrow +\infty$ такая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\varphi(t)} = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{l(t)\varphi(t)} < +\infty,$$

а также функция $c(t) \uparrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) такая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{c(t)}{l(t)\varphi(t)} dt < +\infty.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 4, считаем выполненным условие (5), а значит, $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Рассмотрим функцию F вида (1) с коэффициентами

$$\ln a_n = - \int_0^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{\varphi(t)} dt.$$

Легко проверяется, что $F \in H(\Lambda)$. Пусть

$$h(x) = - \int_0^x \frac{x-t}{\varphi(t)} dt + x\sigma.$$

Поскольку $h''(x) = -1/\varphi(x) < 0$, существует единственная точка $x = x(\sigma)$ максимума $h(x)$ на $[0, +\infty)$, определяемая из уравнения

$$h'(x) = - \int_0^x \frac{dt}{\varphi(t)} + \sigma = 0.$$

Отсюда

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq h(x(\sigma)) = \int_0^{x(\sigma)} \frac{t}{\varphi(t)} dt. \quad (33)$$

Пусть теперь

$$\psi_1^{-1}(t) = t(\ln t)^{-2}, \quad \psi_2(t) = \frac{\varphi(t)l(t)}{c(t)}, \quad t(\sigma) = x(\sigma) + \sqrt{\psi_2(x(\sigma))}.$$

Тогда для $x \in [x(\sigma), t(\sigma)]$

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x(\sigma)) + \frac{1}{2} h''(x_+) (x - x(\sigma))^2 \\ &\geq h(x(\sigma)) - \frac{1}{2\varphi(x(\sigma))} \psi_2(x(\sigma)) = h(x(\sigma)) - \frac{1}{2} \frac{l(x(\sigma))}{c(x(\sigma))}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $x_+ \in (x(\sigma), t(\sigma))$. Из (33), (34) последовательно получаем

$$F(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{h(x)} dn(x) \geq \mu(\sigma, F) n_\Lambda(x(\sigma), t(\sigma)) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{l(x(\sigma))}{c(x(\sigma))} \right\},$$

а также

$$\begin{aligned} &\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \\ &\geq \left(\ln n_\Lambda(x(\sigma), t(\sigma)) - \frac{1}{2} \frac{l(x(\sigma))}{c(x(\sigma))} \right) \omega' \left(\ln \mu(\sigma, F) + \ln n_\Lambda(x(\sigma), t(\sigma)) - \frac{1}{2} \frac{l(x(\sigma))}{c(x(\sigma))} \right). \end{aligned}$$

Поскольку из (33) вытекает

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \int_0^{x(\sigma)} \frac{tl(t)}{c(t)\psi_2(t)} dt = o(x(\sigma)l(x(\sigma))), \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

а по условию (16) при $\sigma \rightarrow +\infty$

$$\ln n_\Lambda(x(\sigma), t(\sigma)) \geq \frac{p + o(1)}{\omega'(\psi_1^{-1}(x(\sigma)))} = \frac{p + o(1)}{\omega'(x(\sigma))} = (p + o(1))l(x(\sigma)),$$

то окончательно имеем

$$\begin{aligned} \omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) &\geq (p + o(1))l(x(\sigma))\omega'(x(\sigma)l(x(\sigma))) \\ &= (p + o(1)) \frac{l(x(\sigma))}{l(x(\sigma))l(x(\sigma))} = p + o(1), \quad \sigma \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Несложный анализ доказательств теорем 4 и 5 показывает, что их утверждения справедливы и для функций F_1 вида (17), если только в формулировках заменить $n_\Lambda(a, b]$ на $v(a, b]$.

6. Следствия. Из теоремы 4 вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < \beta < 1$. Для того чтобы для каждой функции $F \in H(\Lambda)$ имело место соотношение

$$(\ln M(\sigma, F))^\beta - (\ln \mu(\sigma, F))^\beta \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

вне некоторого множества конечной меры, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} (\ln n(t))^{1/(1-\beta)} dt < +\infty.$$

При $\beta = 1/2$ получаем решение проблемы 5, которую сформулировал М. Н. Шеремета в [6, с. 118].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\alpha \geq 0$. Для того чтобы для каждой функции $F \in H(\Lambda)$ имело место при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества конечной меры соотношение

$$(\ln \ln M(\sigma, F))^{1+\alpha} - (\ln \ln \mu(\sigma, F))^{1+\alpha} \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} \ln n(t) (\ln \ln n(t))^\alpha dt < +\infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скасків О. Б. Максимум модуля и максимальный член целого ряда Дирихле // Докл. АН УССР. Сер. А. 1984. № 11. С. 22–24.
- [2] Скасків О. Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 1. С. 41–47.
- [3] Хомяк М. М. О максимальном члене ряда Дирихле, задающего целую функцию // Изв. вузов. Матем. 1982. № 10. С. 79–81.
- [4] Шеремета М. Н. О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 2. С. 283–296.
- [5] Hayman W. K. Subharmonic Functions, Vol. 2. London Math. Soc. Monographs. V. 20. London: Acad. Press, 1989.
- [6] Open problems. Матем. студії. Праці Львів. матем. тов-ва. Вип. 3. Львів, 1994.

Львовский государственный университет им. И. Франко

Поступило
12.12.97