Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Старков, Минимальность и строгая эргодичность однородных действий, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 293–301

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:13:03

УДК 517.987.5+517.938.6

МИНИМАЛЬНОСТЬ И СТРОГАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ДЕЙСТВИЙ

А. Н. Старков

Пусть Γ – решетка в связной группе Ли G , $H \subset G$ – связная подгруппа и Ad – присоединенное представление G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\text{Ad}(H)$ расщепляется в полупрямое произведение редуктивной подгруппы и унипотентного радикала. Мы доказываем, что тогда минимальность левого H -действия на G/Γ влечет его строгую эргодичность. Попутно мы излагаем редукцию изучения конечных эргодических мер для любого действия $(G/\Gamma, H)$, где подгруппа $H \subset G$ связна и $\Gamma \subset G$ дискретна, к случаю абелевой подгруппы H .

Библиография: 19 названий.

Пусть G – группа Ли и $D \subset G$ – замкнутая подгруппа. G -инвариантную меру на G/D (если она существует) будем называть *мерой Хаара*. Если мера Хаара на G/D конечна, то говорят, что пространство G/D имеет *конечный объем*. Если к тому же подгруппа $D \subset G$ дискретна, она называется *решеткой* в G .

Пусть $(G/D, H)$ обозначает левое действие связной подгруппы H группы Ли G на однородном пространстве G/D конечного объема. Мы будем изучать связь таких свойств этой динамической системы, как минимальность и строгая эргодичность. Напомним, что действие называется *минимальным*, если все его орбиты плотны в G/D (иначе говоря, $\overline{Hx} = G/D$ для любой точки $x \in G/D$). Действие называется *строго эргодическим*, если H -инвариантная вероятностная мера на G/D единственна (в таком случае она совпадает с нормированной мерой Хаара).

Предположим, что непрерывное действие аменабельной группы A на компактном топологическом пространстве X строго эргодично и единственная инвариантная мера положительна на открытых подмножествах в X . Хорошо известно, что такое действие минимально. Интересно, что в классе однородных действий $(G/D, H)$ это выполняется для любых связных подгрупп $H \subset G$.

ЛЕММА 1. Пусть G/D – однородное пространство конечного объема и $H \subset G$ – связная подгруппа. Тогда любое компактное H -инвариантное подмножество $M \subset G/D$ имеет H -инвариантную вероятностную меру. В частности, если пространство G/D компактно, то строго эргодическое действие $(G/D, H)$ является минимальным.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00456.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подгруппа H аменабельна, у нас нет проблем. Пусть теперь $H = S_H \cdot A_H$ – разложение на полупростую подгруппу $S_H \subset H$ без компактных множителей и нормальную аменабельную подгруппу $A_H \subset H$. Если $P_H \subset S_H$ – разрешимая параболическая подгруппа, то группа $B = P_H \cdot A_H$ аменабельна, поэтому M имеет хотя бы одну B -инвариантную вероятностную меру μ . По теореме Ратнер [1] любая P_H -инвариантная вероятностная мера является S_H -инвариантной. Следовательно, мера μ является H -инвариантной.

Заметим, что даже для однородных действий из строгой эргодичности, вообще говоря, не следует минимальность. А именно, Рагунатан (см. [2]) построил пример действия $(G/D, H)$ на некомпактном пространстве G/D конечного объема, которое является строго эргодическим, но не минимальным (в этом примере H является расщепимой разрешимой четырехмерной подгруппой в $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, а действие обладает замкнутой некомпактной орбитой $Hx \subset G/D$).

В работе [3] Фюрстенберг поставил проблему: верно ли, что минимальность однородного действия $(G/D, H)$ на однородном пространстве конечного объема влечет его строгую эргодичность? Напомним известные на сегодняшний день результаты в этом направлении, для чего введем несколько определений.

Пусть $\mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ – присоединенное представление связной вещественной группы Ли G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ является вещественно-алгебраической матричной группой. Скажем, что элемент $g \in G$ является *Ad-унипотентным* (соответственно *Ad-квазиунипотентным*), если все собственные значения матрицы Ad_g равны 1 (соответственно лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$). Элемент $g \in G$ называется *Ad-полупростым* (соответственно *Ad-диагонализуемым*), если матрица Ad_g приводится к диагональному виду над полем $\mathbb{C}$ (соответственно над $\mathbb{R}$).

Благодаря фундаментальным результатам Марины Ратнер (см. обзоры [1] и [4]) на данный момент хорошо изучены действия $(G/D, H)$ для любой связной подгруппы H , порожденной Ad-унипотентными элементами. Дело в том, что все конечные H -инвариантные эргодические меры на G/D имеют алгебраическое происхождение. А именно, любая такая мера совпадает с F -инвариантной мерой Хаара на некоторой замкнутой орбите $Fx \subset G/D$ (при этом $H \subset F \subset G$). Аналогичное утверждение имеет место и для замыканий орбит действия $(G/D, H)$ при условии, что G/D имеет конечный объем. Точнее, для любой точки $x \in G/D$ найдется связная замкнутая подгруппа $F \supset H$ такая, что $\overline{Hx} = Fx \subset G/D$, причем F -инвариантная мера Хаара на орбите Fx конечна. В частности, для таких действий минимальность и строгая эргодичность эквивалентны.

Используя результаты Ратнер и существование ограниченных орбит у любого однопараметрического однородного потока, установленное Клейнбоком и Маргулисом [5], автор в [6] доказал эквивалентность минимальности и строгой эргодичности для любой одномерной подгруппы $H \subset G$.

Мозес и Вейс [7] показали, что минимальность влечет строгую эргодичность при условии, что G является $\mathbb{R}$ -алгебраической полупростой группой, а H – ее $\mathbb{R}$ -алгебраической подгруппой.

Скажем, что связная подгруппа $H \subset G$ является *Ad-расщепимой*, если $\mathrm{Ad}(H)$ расщепляется в полупрямое произведение максимальной редуктивной подгруппы и унитарного радикала (хорошо известно, что такое расщепление всегда имеет место, если подгруппа $\mathrm{Ad}(H) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ алгебраична). Эквивалентное определение состоит в том,

что $H = H_s H_u$, где H_u – нормальная подгруппа в H , порожденная всеми Ad -унипотентными элементами, а подгруппа H_s состоит из Ad -полупростых элементов.

Наша основная теорема усиливает результат [7].

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – решетка в связной группе Ли G и $H \subset G$ – ее Ad -расщепляемая связная подгруппа. Тогда из минимальности действия $(G/\Gamma, H)$ следует его строгая эргодичность.

В п. 1, 2 мы доказываем несколько простых результатов о минимальности, строгой эргодичности и структуре однородных пространств конечного объема. В п. 3 формулируем результат в духе Мозеса [8], Маргулиса и Томанова [9], затем используем его для редукции изучения H -инвариантных мер на G/Γ , где H – любая связная подгруппа в G , к случаю абелевой подгруппы H . Это позволит нам в п. 4 свести доказательство теоремы 2 к случаю $H = C \times H'$, где C – компактная подгруппа, а подгруппа $\text{Ad}(H')$ является $\mathbb{R}$ -диагонализуемой. Затем в п. 5 мы показываем, что действие такой подгруппы H может быть минимальным, лишь если H' является центральной подгруппой в G . В п. 6 завершаем наше доказательство.

1. Несколько общих замечаний о минимальности и строгой эргодичности. В этом пункте мы излагаем несколько простых результатов, которые потребуются в дальнейшем. Пусть X – топологическое пространство, снабженное непрерывным действием группы Ли H . Напомним, что такое действие называется *минимальным*, если X не содержит собственных замкнутых H -инвариантных подмножеств (т.е. все H -орбиты плотны в X). Следуя [10], действие H на X назовем *поточечно-минимальным*, если X является дизъюнктивным объединением замкнутых H -минимальных подмножеств. Иначе говоря, замыкания любых двух H -орбит в X либо совпадают, либо не пересекаются.

ЛЕММА 1.1 [10]. Пусть H – группа Ли, непрерывно действующая на топологическом пространстве X . Если $F \subset H$ – замкнутая нормальная подгруппа такая, что H/F – компактна, то действие F на X поточечно-минимально.

СЛЕДСТВИЕ 1.2 [7]. Пусть G – связная группа Ли и действие $(G/D, H)$ минимально. Предположим, что $D' \subset D$ – нормальная подгруппа конечного индекса. Тогда действие $(G/D', H)$ минимально.

ЛЕММА 1.3. Пусть G – связная группа Ли и $D, H \subset G$ – ее замкнутые подгруппы. Пусть также $C \subset H$ – компактная подгруппа и $G' \supset D$ – замкнутая подгруппа такая, что $G = CG'$ (т.е. каждый элемент $g \in G$ может быть записан в виде произведения $g = cg'$, где $c \in C$, $g' \in G'$). Предположим, что $H' \subset H \cap G'$ – нормальная подгруппа в H . Тогда из строгой эргодичности действия $(G'/D, H')$ следует строгая эргодичность действия $(G/D, H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ обозначает H -инвариантную вероятностную меру на G/D . Разложим ее в условные меры по отношению к расслоению пространства G/D на замкнутые подпространства $gG'D \subset G/D$. Все эти подпространства H' -инвариантны, поэтому все условные меры также H' -инвариантны. Но H' -действие на каждом слое $gG'D$ гладко изоморфно действию $(G'/D, H')$, поэтому все условные меры являются мерами Хаара (на соответствующем подпространстве). Стало быть, μ есть полупрямое произведение H -инвариантной меры на G/G' и меры Хаара на G'/D посредством расслоения G/D над G/G' со слоями, изоморфными G'/D (см. [11]).

Осталось заметить, что H -инвариантная мера на $G/G' = C/C \cap G'$ является мерой Хаара.

ЛЕММА 1.4 [12]. Пусть G/D – пространство конечного объема, причем группы D и G унимодулярны. Тогда если подгруппа $H \subset G$ нормальна и унимодулярна и $G = \overline{HD}$, то действие $(G/D, H)$ строго эргодично.

2. Еще раз об однородных пространствах конечного объема. Скажем, что замкнутая подгруппа $D \subset G$ является *квазирешеткой*, если пространство G/D имеет конечный объем и D не содержит нетривиальных связных нормальных в G подгрупп. Обозначим через R радикал связной группы Ли G , через L подгруппу Леви. Запись $L = SK$ будет обозначать почти прямое разложение L на нормальную подгруппу S без компактных множителей и компактную нормальную подгруппу K . Пусть, наконец, $\text{Int}_F H = \{fHf^{-1}, f \in F\}$. Напомним следующий результат.

ЛЕММА 2.1 [13], [14]. Пусть G/D – пространство конечного объема и $G = \overline{SRD}$. Тогда произведение RD замкнуто. Если, кроме того, D является квазирешеткой, то $D_0 \subset R$ и $D \cap R$ является квазирешеткой в R .

Следующий результат хорошо известен, если D является решеткой в G , но, по-видимому, не был доказан в общем случае.

ЛЕММА 2.2. Пусть пространство G/D имеет конечный объем. Тогда произведение KRD замкнуто. Если, кроме того, D является квазирешеткой, то $D_0 \subset KR$ и $D \cap KR$ является квазирешеткой в KR .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем предположить, что D является квазирешеткой и группа G односвязна. В модификации Дани теоремы плотности Бореля [15] утверждается, что алгебраическая оболочка подгруппы $\text{Ad}(D) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ содержит $\text{Ad}(SN)$, где $N \subset R$ обозначает нильрадикал. Отсюда мы выводим, что группа D_0 аменабельна, т.е. она не содержит некомпактных простых подгрупп. В самом деле, если $S_D \subset S \cap D_0$ – такая подгруппа, то $\text{Int}_{D_0} S_D \subset D_0$, поэтому $\text{Int}_{SN} S_D \subset D_0$. С другой стороны, K коммутирует с S_D , поэтому $\text{Int}_G S_D \subset D_0$. Но поскольку D является квазирешеткой, подгруппа S_D должна быть тривиальной.

Пусть теперь $p_K: G \rightarrow K$ – проекция и $(p_K(D))_0 = K_1 T_1 \subset K$ – почти прямое произведение полупростой группы Ли K_1 и тора T_1 . Определим $G' = (S \times K_1)(T_1 R)$ и $D' = D \cap G'$. Тогда D' – подгруппа конечного индекса в D , а пространство G'/D' имеет конечный объем. Заметим, что группа $R' = T_1 \cdot R$ является радикалом в G' , а произведение $SR'D'$ плотно в G' . По лемме 2.1 произведение $R'D'$ замкнуто (поэтому пространство $R'/D \cap R'$ компактно). Следовательно, произведение KRD также замкнуто. Поскольку группа D_0 аменабельна, из теоремы плотности Бореля [11] следует, что проекция D на S является решеткой в S .

Наконец, если $W \subset D_0$ – максимальная среди связных нормальных в KR подгрупп, то $\text{Int}_D W \subset D_0$, поэтому $\text{Int}_S W \subset D_0$. Отсюда $\text{Int}_G W \subset D_0$ и, поскольку D является квазирешеткой в G , подгруппа W должна быть тривиальной.

В ходе доказательства мы установили следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. Пусть пространство G/D имеет конечный объем. Тогда существует тор $T \subset K$ такой, что пространство $TR/D \cap TR$ компактно.

Напомним, что этот результат (полученный независимо многими авторами в середине 80-х годов) доказывает гипотезу [16] о том, что любое пространство конечного объема *допустимо*.

3. Основная техническая теорема. Пусть подгруппа $H \subset G$ связна, а $\Gamma \subset G$ дискретна. Мы изложим редукцию изучения H -инвариантных вероятностных мер на G/Γ к случаю, когда подгруппа H абелева. Эта редукция играет ключевую роль в доказательстве главного результата.

Пусть $H_u \subset H$ обозначает связную нормальную подгруппу в H , порожденную всеми Ad -унипотентными однопараметрическими подгруппами. Согласно Ратнер (см. [1]) все H_u -инвариантные эргодические вероятностные меры являются мерами Хаара на однородных подпространствах в G/D .

Скажем, что подгруппа H имеет *Ad-треугольный тип*, если H порождена элементами $h \in H$ такими, что все собственные значения оператора Ad_h на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ чисто вещественные. Легко видеть, что следующие условия эквивалентны:

- 1) H имеет *Ad-треугольный тип*;
- 2) максимальная редуктивная подгруппа в алгебраической оболочке подгруппы $\text{Ad}(H) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ не имеет компактных нормальных подгрупп;
- 3) если $H = L_H R_H$ – разложение Леви, то подгруппа Леви L_H не имеет компактных множителей, а $\text{Ad}(R_H)$ сопряжена подгруппе в $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, состоящей из верхнетреугольных матриц.

Ясно, что для такой H $\text{Ad}[H, H] = [\text{Ad}(H), \text{Ad}(H)] \subset \text{Ad}(H_u)$, поэтому факторгруппа H/H_u абелева. Следующая теорема сводит изучение H -инвариантных вероятностных мер для любой подгруппы H , имеющей *Ad-треугольный тип*, к случаю абелевой подгруппы H . Основная ее часть неявно содержится в работах Мозеса [8, доказательство теоремы 1] и Маргулиса и Тomanова [9, основная теорема и ее доказательство для вещественных групп Ли] (в обеих работах предполагалось, что H порождена Ad -унипотентными и Ad -диагонализуемыми элементами; однако доказательство проходит для любой подгруппы Ad -треугольного типа); близкая формулировка содержится в работе Мозеса и Вейсса [7].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть Γ – дискретная подгруппа в G , $H \subset G$ – связная подгруппа *Ad-треугольного типа* и μ – H -инвариантная эргодическая вероятностная мера на G/Γ . Тогда найдется связная замкнутая подгруппа $L \subset G$ такая, что μ -почти все H_u -эргодические компоненты μ являются L -инвариантными вероятностными мерами на замкнутых L -орбитах в G/Γ . Пусть теперь

$$P = \text{SN}_G(L) = \{p \in G : \text{сопряжение } g \rightarrow p g p^{-1} \text{ сохраняет } L \text{ и меру Хаара на ней}\}.$$

Тогда $H \subset P$ и найдется точка $x \in G/\Gamma$ такая, что орбита $Px \subset G/\Gamma$ замкнута и $\mu(Px) = 1$.

Из теоремы 3.1 следует, что однородное пространство Px является H -инвариантным и $\mu(Px) = 1$. Поскольку группа L нормальна в P , то все L -орбиты в Px замкнуты и образуют расслоение над однородным P/L -пространством. Заметим, что $H_u \subset L$, мера μ является L -инвариантной и факторгруппа H/H_u абелева. Таким образом, изучение H -инвариантных вероятностных мер для подгрупп *Ad-треугольного типа* сводится к случаю, когда подгруппа H абелева.

Если $H \subset G$ – произвольная связная подгруппа, то иногда она расщепляется в полу-прямое произведение $H = C \cdot H'$ компактной подгруппы C и нормальной подгруппы H' , имеющей Ad -треугольный тип. Это позволяет описывать H -инвариантные меры, используя знание H' -инвариантных мер.

В общем случае можно действовать следующим образом. Без ограничения общности будем считать, что группа G связна и односвязна. Предположим вначале, что подгруппа H разрешима. Рассмотрим алгебраическую оболочку $\mathcal{A}(\text{Ad}(H))$ в вещественно-алгебраической группе Ли $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Тогда $\mathcal{A}(\text{Ad}(H)) = T \cdot M$, где T – компактный тор и M – нормальная триангуляризуемая подгруппа. Пусть $\tilde{G} = T \cdot G$ и $\tilde{H} = T \cdot H$. Легко видеть, что $\tilde{H} = T \cdot H'$, где $H' \subset \tilde{H}$ – нормальная подгруппа Ad -треугольного типа. Заметим, что H -инвариантные меры на G/G находятся во взаимно однозначном соответствии с $\tilde{H}$ -инвариантными мерами на $\tilde{G}/\tilde{G}$. В частности, действие $(G/G, H)$ строго эргодично тогда и только тогда, когда действие $(\tilde{G}/\tilde{G}, \tilde{H})$ таково. То же относится и к орбитам. В частности, действие $(G/G, H)$ минимально в том и только том случае, когда действие $(\tilde{G}/\tilde{G}, \tilde{H})$ минимально.

Для общей подгруппы $H = L_H R_H$ проделаем описанную выше процедуру с ее радикалом R_H и заметим, что тор $T \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ можно выбрать коммутирующим с $L_H = K_H S_H$. Более того, $T \cdot R_H = T \cdot R'_H$, где $R'_H \subset \tilde{H} = T \cdot H$ – нормальная подгруппа Ad -треугольного типа в $\tilde{G} = T \cdot G$. Тогда $\tilde{H} = C H'$, где $C = K_H \times T$ и $H' = S_H R'_H \subset \tilde{H}$ – нормальная подгруппа Ad -треугольного типа. В этом случае снова изучение инвариантных мер (и орбит) для действий $(G/G, H)$ и $(\tilde{G}/\tilde{G}, \tilde{H})$ эквивалентны.

4. Редукция к случаю, когда H состоит из Ad -полупростых элементов.

Скажем, что связная подгруппа $H \subset G$ является Ad -изотропной, если $H = H_s H_u$, где подгруппа $\text{Ad}(H_s) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ является $\mathbb{R}$ -диагонализуемой. Легко видеть, что H является Ad -изотропной тогда и только тогда, когда она одновременно Ad -расщепима и имеет Ad -треугольный тип.

Для доказательства теоремы 2 мы применим результаты п. 3. Пусть $(G/G, H)$ – минимальное действие Ad -расщепимой подгруппы H . Как уже отмечалось в п. 3, без ограничения общности можно считать, что $H = C H'$, где подгруппа C компактна и H' – нормальная Ad -изотропная подгруппа в H . Пусть μ – H -инвариантная вероятностная мера на G/G . Применив теорему 3.1 к любой из ее H' -эргодических компонент, мы найдем подгруппу $L \subset G$ и точку $x \in G/G$ такие, что $\overline{H_u x} = Lx$ и орбита $Px \subset G/G$ замкнута, где $P = S_N G(L) \supset H'$. Поскольку $H \subset CP$ и H -действие минимально, мы выводим равенство $G = CP$ (действительно, G покрывается счетным семейством CP замкнутых многообразий, поэтому CP замкнуто и открыто в G).

Так как P нормализует L , а C нормализует H_u , любая сопряженная к H_u подгруппа лежит внутри L . Следовательно, $\overline{H_u x} = \overline{Ux} = Lx$, где $U \subset G$ – наименьшая нормальная подгруппа, содержащая H_u . Это означает, что H' -эргодическая компонента μ , сосредоточенная на Px , является мерой Хаара на каждом слое $\overline{Uy}$, $y \in Px$. Аналогично мы выводим, что μ является мерой Хаара на всех слоях $\overline{Uy}$, $y \in G/G$. Точнее, μ есть полупрямое произведение посредством однородного расслоения $G/G \rightarrow G/\overline{UT}$ меры μ_1 на пространстве $G/\overline{UT}$ и меры Хаара на $\overline{UT}/G$.

Пусть $W \subset (\overline{UT})_0$ – наибольшая связная нормальная подгруппа в G , $G_1 = G/W$, $\Gamma_1 = \overline{UT}/W$, $H_1 = HW/W$. Тогда действие $(G_1/\Gamma_1, H_1)$ минимально и μ_1 есть H_1 -инвариантная вероятностная мера на пространстве конечного объема G_1/Γ_1 . Поскольку $H_u \subset U \subset W$, подгруппа H_1 состоит из Ad -полупростых элементов. Ясно, что до-

статочно доказать G_1 -инвариантность меры μ_1 . Относительно Γ_1 мы знаем, что это квазирешетка в G_1 (но не обязательно решетка). Также заметим, что H_1 есть коммутативное произведение своей максимальной компактной подгруппы и абелевой подгруппы, состоящей из Ad -диагонализуемых элементов.

5. Разрешимый случай. Пусть $H \subset G$ – связная подгруппа и $U \subset G$ – *неустойчивая нормальная подгруппа* по отношению к H (см. [16], [17]). По определению U – наименьшая нормальная подгруппа в G такая, что образ H в G/U состоит из Ad -квазиунипотентных элементов. Если $\text{Ad}(H)$ является $\mathbb{R}$ -диагонализуемой, то образ H в G/U является центральной подгруппой и действие $(G/D, H)$ эргодично в том и только том случае, когда $G = \overline{HUD}$.

ЛЕММА 5.1. Пусть G – связная разрешимая группа Ли, $H \subset G$ – связная абелева подгруппа такая, что группа $\text{Ad}(H) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ является $\mathbb{R}$ -диагонализуемой, и $(G/D, H)$ – поточечно-минимальное действие на компактном разрешимом многообразии. Тогда $U \subset D_0$. Другими словами, H является центральной подгруппой в G (и потому сама группа G абелева) при условии, что D – квазирешетка в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем считать, что действие $(G/D, H)$ эргодично. В самом деле, определим $G' = (\overline{HUD})_0$. Тогда G' является подгруппой в G , а $D' = D \cap G'$ имеет конечный индекс в D . Действие $(G'/D', H)$ эргодично и по следствию 1.2 поточечно-минимально. Осталось заметить, что $U \subset G'$ и $D'_0 = D_0$.

Итак, мы можем считать действие $(G/D, H)$ эргодичным (и потому минимальным), группу G связной и односвязной, а D квазирешеткой в G . Теперь воспользуемся *конструкцией полупростого расщепления* группы G (см. [16], [17]). Пусть $\mathcal{A}(\text{Ad}(G)) = A \cdot M \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ – разложение алгебраической оболочки $\text{Ad}(G)$ в полупрямое произведение абелевой редуктивной подгруппы A и унитарного радикала M . Определим $A(G) = A \cdot G$. Тогда $A(G) = A \cdot W$, где W – нильрадикал в $A(G)$, называемый *нильтенью* G . Группа $A(G)$ допускает структуру вещественно-алгебраической группы, в которой A является максимальной редуктивной подгруппой, а W – унитарным радикалом (ясно, что группа G нормальна и плотна по Зарисскому в $A(G)$). Заметим, что все Ad -унитарные элементы в G являются унитарными в $A(G)$ (поэтому лежат в W). Каждый Ad -полупростой элемент $g \in G$ после подходящего сопряжения лежит в $A \times Z$, где $Z \subset W$ обозначает центр группы $A(G)$.

Пусть $p: A(G) = A \cdot W \rightarrow A$ – естественная проекция вдоль W . Если D – квазирешетка в G , то подгруппа $T_G = p(G) \subset A$ замкнута в евклидовой топологии и $T_D = p(D)$ – решетка в T_G (усиленная теорема Мостова из [17]).

Известно (см. [17]), что для любой равномерной подгруппы $D \subset G$ ее алгебраическая оболочка $\mathcal{A}(D) \subset A(G)$ нормальна и равномерна. В частности, $\mathcal{A}(D)$ содержит все унитарные и $\mathbb{R}$ -диагонализуемые элементы из $A(G)$. Следовательно, $H \subset \mathcal{A}(D)$ и ввиду эргодичности $\mathcal{A}(D) = A(G)$, т.е. D плотна по Зарисскому в $A(G)$. В частности, D_0 нормальна в G . Поэтому D – (плотная по Зарисскому) решетка в G .

Так как H – абелева группа из Ad -полупростых элементов, она сопряжена подгруппе в $A \times Z$. Поэтому мы можем считать, что A коммутирует с H . Докажем, что группа G абелева. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда нильтень W абелева. В самом деле, произведение $D[W, W]$ замкнуто, и мы можем заменить G на $G' = G/[W, W]$, а D на $D' = D[W, W]/[W, W]$. Если мы докажем, что группа G' абелева, это будет означать, что $[A(G), A(G)] = \mathcal{A}([G, G]) \subset [W, W]$, поэтому группа A тривиальна, т.е.

группа G нильпотентна. Но для нильпотентной группы G нет проблем: H лежит в центре G и поэтому действует минимально на G/D , лишь если группа G абелева.

Итак, мы можем предположить, что нильтень W является векторной группой. Тогда $\tilde{D} = T_D D$ – плотная по Зарисскому дискретная подгруппа в $A(G)$, которая пересекает W по решетке. Снова мы можем считать, что $H \subset A \times Z$. Так как $\mathcal{A}(\tilde{D}) = A(G)$, произведение $Z\tilde{D}$ замкнуто, значит произведение $(A \times Z)\tilde{D}$ также замкнуто. Из минимальности следует, что $G \subset A \times Z$. Но это означает, что группа G абелева (и поэтому $A(G) = G = W = Z$). Лемма доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Итак, мы имеем минимальное действие $(G/D, H)$, где $H = C \times H'$. Здесь C – компактная подгруппа, а группа $\text{Ad}(H')$ является $\mathbb{R}$ -диагонализуемой. Используя лемму 2.2, можно легко показать, что в данной ситуации $G = K \cdot R$ (см. обозначения п. 2). В самом деле, пусть $p: G \rightarrow S$ – проекция. Тогда $p(D) \subset S$ является решеткой. Пусть $S' \subset S$ – нормальная подгруппа такая, что решетка $p(D) \cap S'$ неприводима, и $p': G \rightarrow S'$ – соответствующая проекция. Тогда согласно критерию эргодичности Мура [18] действие $(S'/p'(D), p'(H'))$ эргодично при условии, что проекция $p'(H')$ нетривиальна. С другой стороны, она лежит в картановской подгруппе группы S' . Но действие картановской подгруппы на $S'/p'(D)$ всегда обладает инвариантным тором (Мостов, Прасад и Рагунатан [19]), поэтому не может быть поточечно-минимальным. Следовательно, проекция $p(H')$ тривиальна и потому проекция $p(H)$ компактна. Но компактная подгруппа может действовать минимально на $S/p(D)$, лишь если группа S тривиальна.

Таким образом, $G = K \cdot R$ и $H = C \times H'$, где группа $\text{Ad}(H')$ является $\mathbb{R}$ -диагонализуемой; в частности, $H' \subset R$. Используя лемму 2.3, найдем тор $T \subset K$ такой, что пространство $TR/D \cap TR$ компактно. По лемме 1.1 действие $(TR/D \cap TR, H')$ поточечно-минимально, а из леммы 5.1 следует, что связная компонента группы $D \cap TR$ содержит неустойчивую нормальную подгруппу U для группы H' . Но D – квазирешетка в G , поэтому подгруппа H' центральна в G .

Определим теперь $G' = (\overline{H'D})_0$. Поскольку действие $(G/D, H)$ минимально, имеем $G = CG'$. С другой стороны, по лемме 1.4 действие $(G'/D \cap G', H')$ строго эргодично. Осталось применить лемму 1.3.

ДОБАВЛЕНИЕ. После того, как эта работа была написана, автор получил препринт Томанова “On unique ergodicity for subgroup actions on homogeneous spaces”, в котором независимо доказывается по существу тот же результат, что и в теореме 2. Автор благодарен Г. Томанову за обсуждение наших работ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ratner M. Interactions between ergodic theory, Lie groups, and number theory // Proc. of the ICM. Zurich (Switzerland), 1994. Zurich, 1995. P. 157–182.
- [2] Weiss B. Finite-dimensional representations and subgroup actions on homogeneous spaces // Israel J. Math. 1998. V. 106. P. 189–207.
- [3] Furstenberg H. The unique ergodicity of the horocycle flow // Recent Advances in Topological Dynamics. Lecture Notes in Math. V. 318. Berlin: Springer, 1972. P. 95–115.
- [4] Старков А. Н. Новый прогресс в теории однородных потоков // УМН. 1997. Т. 52. С. 87–192.
- [5] Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Bounded orbits of non-quasiunipotent flows on homogeneous spaces // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 171. P. 141–171.

- [6] Starkov A. N. Minimal sets of homogeneous flows // *Ergodic Theory Dynamical Systems*. 1995. V. 15. P. 361–377.
- [7] Mozes S., Weiss B. Minimality and unique ergodicity for subgroup actions // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 1998. V. 48. № 5. P. 1533–1541.
- [8] Mozes S. Epimorphic subgroups and invariant measures // *Ergodic Theory Dynamical Systems*. 1995. V. 15. P. 1207–1210.
- [9] Margulis G. A., Tomanov G. Measure rigidity for almost linear groups and its applications // *J. Anal. Math.* 1996. V. 69. P. 25–54.
- [10] Gottschalk W. H., Hedlund G. A. *Topological Dynamics*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 36. Providence (R.I.), 1955.
- [11] Рагунатан М. С. Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
- [12] Margulis G. A., Tomanov G. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces // *Invent. Math.* 1994. V. 116. P. 347–392.
- [13] Старков А. Н. О критерии эргодичности G -индуцированных потоков // *УМН*. 1987. Т. 42. С. 233–234.
- [14] Witte D. Zero-entropy affine maps on homogeneous spaces // *Amer. J. Math.* 1987. V. 109. P. 927–961.
- [15] Dani S. G. A simple proof of Borel's density theorem // *Math. Z.* 1980. V. 174. P. 81–94.
- [16] Brezin J., Moore C. C. Flows on homogeneous spaces: a new look // *Amer. J. Math.* 1981. V. 103. № 3. P. 571–613.
- [17] Auslander L. An exposition of the structure of solvmanifolds // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1973. V. 79. P. 227–261.
- [18] Moore C. C. Ergodicity of flows on homogeneous spaces // *Amer. J. Math.* 1966. V. 88. P. 154–178.
- [19] Prasad G., Raghunathan M. S. Cartan subgroups and lattices in semisimple groups // *Ann. of Math. (2)*. 1972. V. 96. P. 296–317.

Русско-датский институт эффективности энергии, г. Москва
(Russian-Danish Institute of Energy-efficiency)
E-mail: alex@rdiees.msk.ru

Поступило
25.12.98