Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Д. Усманов, Связь многообразий решений общей и модельной обобщенных систем Коши–Римана с сингулярной точкой, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 302–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 07:29:29

УДК 517.956.2

СВЯЗЬ МНОГООБРАЗИЙ РЕШЕНИЙ ОБЩЕЙ И МОДЕЛЬНОЙ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ КОШИ–РИМАНА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

З. Д. Усманов

Доказывается однозначная разрешимость вполне определенного двумерного интегрального уравнения. С помощью этого устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами непрерывных решений систем вида $2\bar{z}\partial_{\bar{z}}w - b(z)\bar{w} = 0$ и $2\bar{z}\partial_{\bar{z}}\Phi - b(0)\bar{\Phi} = 0$, заданных в одной и той же области G ($z = 0 \in G$).

Библиография: 4 названия.

1. Введение. В статье рассматривается пара обобщенных систем Коши–Римана следующего вида:

$$2\bar{z}\partial_{\bar{z}}w - b(z)\bar{w} = 0, \quad (1)$$

$$2\bar{z}\partial_{\bar{z}}\Phi - b(0)\bar{\Phi} = 0. \quad (2)$$

Обе системы определены в ограниченной области G комплексного переменного z , содержащей внутри себя точку $z = 0$. Предполагается, что $b(z) \in C(\overline{G})$, $b(0) \neq 0$ и $|b(z) - b(0)| < A|z|^\alpha$, $A, \alpha > 0$, в некоторой малой окрестности $z = 0$. Искомые функции $w(z)$ и $\Phi(z)$ рассматриваются из класса $D_{1,p}(G)$, $p > 2$, т.е. допускают обобщенные производные первого порядка по z и $\bar{z}$, принадлежащие классу $L_p(\overline{G})$, $p > 2$.

В статье установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Между множествами $\{w(z)\}$ и $\{\Phi(z)\}$ решений из класса $D_{1,p}(G)$, $p > 2$, систем (1) и (2) существует взаимно однозначное соответствие.*

В [1] такое соответствие установлено лишь для частных случаев, которые характеризуются либо “малыми” размерами области G , либо значениями $b(z)$, “мало” отличающимися от 0 или $b(0)$. В таких ограничениях теория решений системы (1) развивается на базе соответствующей теории решений модельной системы (2) (см. [2]).

Доказательство существования упомянутого соответствия будет основываться на интегральном уравнении, полученном в [1]:

$$w(z) = \Phi(z) + P_G \bar{w}, \quad z \in G, \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке научного комитета НАТО, грант OUTH.CRG № 960930.

в котором

$$P_G \bar{w} = S_G \left(\frac{b(\zeta) - b(0)}{2\bar{\zeta}} \overline{w(\zeta)} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

$$S_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left(\frac{\Omega_1(z, \zeta)}{\zeta} f(\zeta) + \frac{\Omega_2(z, \zeta)}{\bar{\zeta}} \overline{f(\zeta)} \right) d\xi d\eta,$$

причем функции Ω_1 и Ω_2 задаются в виде

$$\Omega_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|\lambda|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k e^{ik(\varphi-\gamma)} + P_{-k} e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\mu_k}, & |z| < |\zeta|, \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|\lambda|} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{-k} e^{ik(\varphi-\gamma)} + P_k e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{\mu_k}, & |z| > |\zeta|, \end{cases}$$

$$\Omega_2 = \begin{cases} \frac{\lambda}{2|\lambda|} \left(\frac{r}{\rho} \right)^{|\lambda|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_k} \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\mu_k} \cos k(\varphi - \gamma), & |z| < |\zeta|, \\ \frac{\lambda}{2|\lambda|} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{|\lambda|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_k} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{\mu_k} \cos k(\varphi - \gamma), & |z| > |\zeta|, \end{cases}$$

где $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = \rho e^{i\gamma}$, $\lambda = b(0)$, $\mu_k^2 = |\lambda|^2 + k^2$, $P_k = \mu_k + k$, $P_{-k} = \mu_k - k$.

Соотношение (3), устанавливающее связь множеств $\{w(z)\}$ и $\{\Phi(z)\}$ решений из класса $D_{1,p}(G)$, $p > 2$, систем (1) и (2), сопоставляет каждому $w(z)$ единственное $\Phi(z)$. Что касается обратного отображения множества $\{\Phi(z)\}$ на $\{w(z)\}$, его свойства зависят от характера разрешимости уравнения (3) относительно $w(z)$. В [1] установлено, что оператор P_G вполне непрерывен в пространстве $C(\overline{G})$ и отображает это пространство в себя. С учетом этого доказательство теоремы 1 сводится, очевидно, к проверке следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Однородное интегральное уравнение*

$$w^+(z) = P_G \bar{w}^+, \quad z \in G, \quad (4)$$

в классе непрерывных функций имеет только нулевое решение.

2. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1. Пусть $f(z) \in L_p(\overline{G})$, $p > 2$. Тогда функция $h(z) = S_G f$ непрерывна на плоскости E и $h(z) = O(|z|^{-|\lambda|})$ при $z \rightarrow \infty$.

В области G функция $h(z)$ принадлежит классу $D_{1,p}(G)$, $p > 2$, и является решением уравнения

$$2\bar{z}\partial_{\bar{z}}h - \lambda\bar{h} = 2\bar{z}f(z), \quad (5)$$

а в области $E \setminus \overline{G}$ функция $h(z)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$2\bar{z}\partial_{\bar{z}}h - \lambda\bar{h} = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечисленные свойства функции $h(z)$ заимствованы из [1, леммы 2, 4], и лишь одно из них – ее асимптотика при $z \rightarrow \infty$ – нуждается в проверке.

Пусть $D_0 = \{\zeta : |\zeta| \leq R_0\} \supset G$, где R_0 – максимальное расстояние от $\zeta = 0$ до границы области G . Положим $z \in E \setminus \overline{D}_0$. Поскольку $|\zeta| < |z|$, имеем

$$\Omega_1 = -\left(\frac{\rho}{r}\right)^{|\lambda|} \Omega_1^0(z, \zeta), \quad \Omega_2 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{|\lambda|} \Omega_2^0(z, \zeta),$$

где

$$\Omega_1^0 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{-k} e^{ik(\varphi-\gamma)} + P_k e^{-ik(\varphi-\gamma)}}{2\mu_k} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_k - |\lambda|},$$

$$\Omega_2^0 = \frac{\lambda}{2|\lambda|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_k} \cos k(\varphi - \gamma) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu_k - |\lambda|}.$$

Очевидно, что Ω_1^0 и Ω_2^0 являются непрерывными функциями по z и ζ ($z \in E \setminus \overline{D}_0$ и $\zeta \in G$).

Осталось записать $h(z)$ в виде $h(z) = r^{-|\lambda|} h_0(z)$, где

$$h_0(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \rho^{|\lambda|-1} (\Omega_1^0(z, \zeta) e^{-i\gamma} f(\zeta) - \Omega_2^0(z, \zeta) e^{i\gamma} \overline{f(\zeta)}) d\xi d\eta,$$

с тем, чтобы убедиться в справедливости требуемой асимптотики, поскольку из непрерывности Ω_1^0 и Ω_2^0 следует непрерывность функции $h_0(z)$ по $z \in E \setminus \overline{D}_0$, в частности при $z = \infty$. Однако, в дальнейшем нам понадобится оценка для $h(z)$.

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|h_0(z)| \leq \frac{1}{\pi} \left(\iint_G \rho^{(|\lambda|-1)r} d\xi d\eta \right)^{1/r} \left(\iint_G |f(\zeta)|^p d\xi d\eta \right)^{1/p} \\ \times \left(\left(\iint_G |\Omega_1^0(z, \zeta)|^q d\xi d\eta \right)^{1/q} + \left(\iint_G |\Omega_2^0(z, \zeta)|^q d\xi d\eta \right)^{1/q} \right),$$

где $1/p + 1/q + 1/r = 1$, $p, q > 2$ и $1 < r < 2$. Оценивая в правой части этого неравенства первый сомножитель, а также третий сомножитель с помощью неравенств Гёльдера и Минковского, для функции $h(z)$ получаем

$$|h(z)| < M L_p(f, G) |z|^{-|\lambda|}, \quad z \in E \setminus \overline{D}_0, \quad (7)$$

где $M = M(|\lambda|, R_0)$ – константа, зависящая от $|\lambda|$ и R_0 , а $L_p(f, G)$ – норма $f(z)$ в пространстве $L_p(\overline{G})$.

Воспользуемся леммой 1 для описания свойств решений однородного интегрального уравнения (4). Принимая во внимание связь операторов P_G и S_G , устанавливаем, что всякое непрерывное решение $w^+(z)$ уравнения (4) принадлежит классу $D_{1,p}(G)$, $p > 2$, и удовлетворяет согласно (5) уравнению (1). В таком случае из теоремы 1.1 [2, с. 74] следует, что $w^+(z)$ должно подчиняться априорной асимптотике

$$w^+(z) = O(|z|^{|\lambda|}), \quad z \rightarrow 0. \quad (8)$$

Из леммы 1 выводится также, что $w^+(z)$ непрерывно продолжима в области $E \setminus \overline{G}$ вполне определенной непрерывной функцией $w^-(z)$, удовлетворяющей уравнению (6). В соответствии с теорией эллиптических систем $w^-(z)$ является аналитической функцией по z и $\bar{z}$ в $E \setminus \overline{G}$. Еще одно важное свойство функции $w^-(z)$ следует из неравенства (7). Записывая его для решений уравнения (4), положим

$$f(z) = (b(z) - b(0)) \frac{\overline{w^+(z)}}{2\bar{z}}, \quad h(z) \equiv w^-(z).$$

Тогда

$$|w^-(z)| < ML_p \left(\frac{b(z) - b(0)}{2\bar{z}}, G \right) \|w^+\|_{C(G)} |z|^{-|\lambda|}. \quad (9)$$

Таким образом, на плоскости E задается функция

$$W(z) = \begin{cases} w^+(z), & z \in \overline{G}, \\ w^-(z), & z \in E \setminus \overline{G}, \end{cases}$$

являющаяся решением системы

$$2\bar{z}\partial_{\bar{z}}W - B(z)\overline{W} = 0, \quad (10)$$

в которой

$$B(z) = \begin{cases} b(z), & z \in \overline{G}, \\ b(0), & z \in E \setminus \overline{G}. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Если решение системы (10) непрерывно на всей комплексной плоскости и подчиняется условиям (8) и (9), то $W(z) \equiv 0$.

Из леммы 2 следует, что $w^+(z) \equiv 0$, $z \in G$, а значит, справедлива теорема 2.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Предположим противное, т.е. существует хотя бы одно решение $W_0(z) \not\equiv 0$, $z \in E$. Пусть $D = \{z : |z| \leq R\}$ – круг, радиус R которого превосходит максимальное расстояние R_0 от точки $z = 0$ до границы области G , т.е. $R > R_0$. Представим функцию $W_0(z)$, $z \in D$, в виде [3]

$$W_0(z) = \Psi(z)e^{\omega(z)}, \quad (11)$$

где $\Psi(z)$ – аналитическая функция комплексного переменного z ,

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{f(\zeta) d\xi d\eta}{\bar{\zeta}(\zeta - z)}, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

$$f(z) = \begin{cases} B(z) \frac{\overline{W_0(z)}}{W_0(z)} & \text{для точек } z, \text{ в которых } W_0(z) \neq 0, \\ B(z) & \text{для точек } z, \text{ в которых } W_0(z) = 0. \end{cases}$$

Из (11) заключаем, что $\Psi(z)$ является непрерывной функцией вне точки $z = 0$, поскольку таковой является $\omega(z)$. Для того чтобы описать поведение $\Psi(z)$ при $z = 0$ и $|z| = R$, воспользуемся неравенством

$$\iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta| \cdot |\zeta - z|} < 2\pi \ln \frac{R}{|z|} + 5\pi \ln 2 + \pi \ln(1 + \sqrt{2}), \quad (12)$$

проверка которого производится далее в п. 4.

С учетом специфики коэффициента $B(z)$ системы (10) получаем

$$|\omega(z)| < \frac{|b(0)|}{2\pi} \iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta| \cdot |\zeta - z|} + \frac{1}{2\pi} \iint_G \frac{|b(\zeta) - b(0)|}{|\zeta| \cdot |\zeta - z|} d\xi d\eta.$$

Оценивая первый интеграл с помощью (12) и принимая во внимание ограниченность второго интеграла, выводим

$$|\omega(z)| < |\lambda| \ln \frac{R}{|z|} + N.$$

Здесь, как и ранее, $\lambda = b(0)$ и N – константа, не зависящая от R .

Теперь из (11) находим

$$|\Psi(z)| < \left(\frac{R}{|z|}\right)^{|\lambda|} e^N |W_0(z)|, \quad z \in D.$$

Используя (8), устанавливаем, что $\Psi(z)$ ограничена в точке $z = 0$. Если распространить это неравенство на точки $z \in \partial D = \{z : |z| = R\}$ и воспользоваться (9), получим

$$|\Psi(z)| < M e^N \|w^+\|_{C(G)} L_p \left(\frac{b(\zeta) - b(0)}{2\bar{\zeta}}, G \right) R^{-|\lambda|}.$$

В силу принципа максимума модуля для аналитических функций последнее неравенство имеет место для всех точек $z \in D$.

Пусть ε – сколь угодно малое положительное число. За счет выбора достаточно большого $R = R(\varepsilon)$, очевидно, можно добиться выполнения условия $|\Psi(z)| < \varepsilon$ для $z \in D$, а значит, и для $z \in G$. Тогда $\Psi(z) \equiv 0$ по крайней мере для $z \in G$. Тем самым, из (11) следует, что $W_0(z) = w^+(z) \equiv 0$ для $z \in G$. Но тогда согласно теории эллиптических систем $W_0(z) \equiv 0$ в любой окрестности точки $z = 0$. Лемма 2, а вместе с ней теоремы 2 и 1 доказаны.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (12). Обозначим через J интеграл в левой части неравенства (12). Осуществляя переход к полярным координатам $z = r e^{i\varphi}$, $\zeta = \rho e^{i\gamma}$, представим J в виде

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_1 d\alpha + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} J_2 d\alpha, \quad (13)$$

где

$$J_k = \int_0^R g(\rho, r, \alpha) d\rho, \quad k = 1, 2,$$

причем $\alpha = \gamma - \varphi$, $g(\rho, r, \alpha) = ((\rho - r \cos \alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2}$.

Оценивая J_1 , необходимо иметь в виду, что при $\zeta = z$ ($\rho = r$, $\alpha = 0$) подынтегральное выражение обращается в бесконечность. Поэтому

$$\begin{aligned} J_1 &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_0^{r \cos \alpha - \varepsilon_1} g(\rho, r, \alpha) d\rho + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{r \cos \alpha + \varepsilon_2}^R g(\rho, r, \alpha) d\rho \\ &= -2 \ln(r |\sin \alpha|) + \ln(r(1 + \cos \alpha)) + \ln(R - r \cos \alpha + g^{-1}(R, r, \alpha)) \\ &\leq \ln \frac{R}{r} + \ln 2 - 2 \ln |\sin \alpha| + \ln \left(1 - \frac{r}{R} \cos \alpha + g^{-1} \left(1, \frac{r}{R}, \alpha \right) \right). \end{aligned}$$

Оценим J_2 , учитывая условие $\cos \alpha \leq 0$ ($\pi/2 \leq \alpha \leq 3\pi/2$):

$$J_2 \leq \int_0^R \frac{d\rho}{\rho + r|\cos \alpha|} = \ln |R + r|\cos \alpha| - \ln(r|\cos \alpha|) \leq \ln \frac{R}{r} + \ln 2 - \ln |\cos \alpha|.$$

Применяя в (13) полученные оценки для J_1 и J_2 , а также соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln \cos \alpha \, d\alpha &= \int_0^{\pi/2} \ln \sin \alpha \, d\alpha = -\frac{\pi}{2} \ln 2, \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln \left(1 - \frac{r}{R} \cos \alpha + g^{-1} \left(1, \frac{r}{R}, \alpha \right) \right) d\alpha &\leq \ln(1 + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

приходим к неравенству (12).

Отметим, что оценка (12) более точна по сравнению с оценками, имеющимися в [3, с. 55] и [4, с. 104].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Усманов З. Д. Об одном классе обобщенных систем Коши–Римана с сингулярной точкой // Сиб. матем. ж. 1973. Т. 14. № 5. С. 1076–1087.
- [2] Усманов З. Д. Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1993.
- [3] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
- [4] Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд. АН ТаджССР, 1963.

Институт математики АН республики Таджикистан, г. Душанбе
E-mail: usmanov@td.silk.org

Поступило
01.04.97
Исправленный вариант
19.10.98