Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Витушкин, Вычисление якобиана рационального преобразования $\mathbb{C}^2$ и некоторые приложения, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 308–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:29:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЯКОБИАНА РАЦИОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $\mathbb{C}^2$ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Г. Витушкин

1. Формулировка результата. Пусть x, y – координаты в $\mathbb{C}^2$. Выполним замену переменных $x \mapsto x_0/y_0, y \mapsto 1/y_0$. Фиксируем натуральное число l и набор p из $l-1$ комплексных чисел $p = p_1, p_2, \dots, p_{l-1}$. Выполним следующую последовательность замен переменных: $x_0 \mapsto x_1 y_1, y_0 \mapsto y_1, x_i - p_i \mapsto x_{i+1} y_{i+1}, y_i \mapsto y_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, l-1$). Обозначим через σ_i сферу, определяемую равенством $y_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Полученное многообразие, состоящее из $\mathbb{C}^2$ и набора этих сфер, обозначим через $M(p)$.

Пусть F и G – пара многочленов от x, y . Выполнив все указанные выше замены переменных, эти функции можно записать в виде $F_l = y_l^{-k} f_l(x_l, y_l)$ и $G_l = y_l^{-k} g_l(x_l, y_l)$, где k – целое неотрицательное число, а f_l и g_l – многочлены от x_l, y_l .

Обозначим через J якобиан пары функций F, G и через J_l якобиан пары F_l, G_l . Нетрудно проверить, что если $J(x, y) = 1$, то $J_l(x_l, y_l) = -y_l^{l-3}$. Ясно, что если $l < 3$, то $k \geq 1$; при $l \geq 3$, априори, не исключена возможность того, что $k = 0$, т.е. обе функции F_l и G_l являются многочленами. Существование такой пары многочленов F и G дало бы контрпример к гипотезе о якобиане. Тем самым, в случае произвольного l вопрос о существовании такой пары остается открытым. Для случая $l = 3$ в п. 5 будет доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если для пары многочленов F, G якобиан $J(x, y) = \text{const} \neq 0$, то при любых значениях p_1 и p_2 хотя бы одна из двух функций $F_3(x_3, y_3)$ или $G_3(x_3, y_3)$ не является многочленом.

Это утверждение можно переформулировать так: если для пары многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ якобиан $J(x, y) \equiv 1$, то при любых числах a, b функции $F(xy^2 + ay + b, 1/y)$ и $G(xy^2 + ay + b, 1/y)$ не могут быть одновременно многочленами. Это есть ответ на вопрос, обсуждавшийся в [1]. Если аналогичное утверждение верно хотя бы для случая $l = 4$, то можно будет доказать, что имеющиеся “экзотические” накрывающие $\mathbb{C}^2$, построенные в связи с гипотезой о якобиане, нельзя реализовать полиномиальными отображениями; подробнее об этом см. в [1].

2. Вычисление якобиана. Пусть $\Phi(x, y) = y^{-k} \varphi(x, y)$ и $\Psi(x, y) = y^{-k} \psi(x, y)$, где k – целое неотрицательное число, а φ и ψ – многочлены от x, y , заданные в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{j \geq 0} a_j(x) y^j, \quad \psi(x, y) = \sum_{j \geq 0} b_j(x) y^j,$$

где $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$ – многочлены от x . Якобиан $J(x, y) = \Phi_x \Psi_y - \Psi_x \Phi_y$ пары функций Φ и Ψ запишем в виде

$$J(x, y) = y^{-2k-1} \sum_{s \geq 0} c_s(x) y^s,$$

где $\{c_s\}$ – многочлены от x .

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства*

$$c_s = \sum_{j=0}^s (k-j) \begin{vmatrix} a_j(x) & a'_{s-j}(x) \\ b_j(x) & b'_{s-j}(x) \end{vmatrix}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$c_{2k} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (k-j) \begin{vmatrix} a_j(x) & a_{2k-j}(x) \\ b_j(x) & b_{2k-j}(x) \end{vmatrix} \right).$$

Доказательство этих равенств достаточно просто, поэтому мы его опускаем. Содержание этих лемм в том, что если переписать отображения в координатах, которые получаются после выполнения нескольких σ -процессов, то в некоторых случаях якобиан оказывается записанным в более удобном виде. В частности, соотношение для коэффициента c_{2k} интегрируется. Именно это обстоятельство дало идею доказательства предложения 1.

3. Свойства функций F_2 и G_2 . Пусть $P(x, y)$ — многочлен от x, y , имеющий по совокупности переменных степень n . Положим

$$R_0(x, y) = P\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right), \quad R_1(x, y) = R_0(xy, y), \quad R_2(x, y) = R_1(xy, y).$$

Ясно, что R_0 является рациональной функцией, которую можно записать так:

$$R_0(x, y) = y^{-n} \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{i,j} x^i y^j,$$

где $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ при всех i, j . Отметим, что многочлен, стоящий под знаком суммы, имеет по совокупности переменных степень не выше n . Ясно также, что R_2 тоже является рациональной функцией вида

$$R_2(x, y) = y^{-k} \sum_{i,j \geq 0} \beta_{i,j} x^i y^j,$$

где $\beta_{i,j} \in \mathbb{C}$ при всех i, j и k — целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $k \leq n$. Далее в доказательстве предложения 1 в качестве R_2 будет рассматриваться или F_2 , или G_2 .

ЛЕММА 3. *Если $\beta_{i,j} \neq 0$, то $i \geq j - k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, всякий моном $\beta_{i,j} x^i y^j$ получается из какого-то монома $\alpha_{i,q} x^i y^q$ выполнением двух операций: заменой переменных $x \mapsto xy^2, y \mapsto y$ и делением полученного монома на y^{n-k} . Поэтому $j - 2i + n - k = q$. Следовательно, $i + j - 2i + n - k = i + q \leq n$, т.е. $i \geq j - k$.

ЛЕММА 4. *Если функция $R_3(x, y) = R_2(xy + c, y)$ ($c \in \mathbb{C}$) является многочленом от x, y , то функция R_2 представима в виде*

$$R_2(x, y) = y^{-k} \left(\sum_{j=0}^k \gamma_j(x) (x-c)^{k-j} y^j + \sum_{j>k} \gamma_j(x) x^{j-k} y^j \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу леммы 3 $R_2(x, y) = y^{-k} r_2(x, y)$, где $r_2(x, y)$ – многочлен от x, y такой, что для всякого его монома $\beta_{i,j} x^i y^j$ выполняется неравенство $i \geq j - k$. Поэтому сумму всех мономов, для которых $j > k$, можно записать в виде

$$\sum_{j>k} \gamma_j(x) x^{j-k} y^j.$$

Далее, так как замена $x \mapsto xy + c, y \mapsto y$ преобразует R_2 в R_3 и по условию леммы R_3 – многочлен, то, переразложив $r_2(x, y)$ в виде суммы мономов вида $(x - c)^i y^j$, мы получим, что для всякого такого монома при $j \leq k$ должно выполняться неравенство $i + j \geq k$. Последнее следует из того, что после выполнения указанной замены переменных каждый из вновь полученных мономов должен делиться на y^k . Поэтому сумма всех мономов многочлена $r_2(x, y)$, имеющих по y степень не больше, чем k , имеет вид

$$\sum_{j=0}^k \gamma_j(x) (x - c)^{k-j} y^j.$$

Лемма доказана.

4. О комплексной структуре пространства $M(p)$. Фиксируем два экземпляра пространства $\mathbb{C}^2$: первое с координатами (x, y) , второе с координатами (x^*, y^*) . Фиксируем два набора комплексных чисел: $p = p_1, p_2, \dots, p_{l-1}$ и $p^* = p_1^*, p_2^*, \dots, p_{l-1}^*$. Так же как это делалось в п. 1, пополним первый экземпляр $\mathbb{C}^2$ цепочкой сфер $\sigma_0, \dots, \sigma_l$, а второй экземпляр цепочкой сфер $\sigma_0^*, \dots, \sigma_l^*$, принимая в качестве параметров наборы p и p^* соответственно. Обозначим полученные пространства через $M(p)$ и $M(p^*)$. На пространстве $M(p)$ мы имеем набор координатных карт (x, y) и (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, l$), а на пространстве $M(p^*)$ – аналогичный набор координатных карт (x^*, y^*) и (x_i^*, y_i^*) ($i = 0, 1, \dots, l$).

ЛЕММА 5. Если $p_i = p_i^*$ при всех $i = 2, 3, \dots, l - 1$, то отображение Ω пространства $M(p^*)$ в пространство $M(p)$, задаваемое в аффинных частях этих пространств равенствами $x - p = x^* - p^*, y = y^*$, биголоморфно и, более того, на всякой паре карт (x_i, y_i) и (x_i^*, y_i^*) ($i = 0, 1, \dots, l$) оно линейно и при $i \geq 2$ это отображение на соответствующей паре карт выглядит как тождественное, а именно: $x_i = x_i^*, y_i = y_i^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из условия леммы $y = y^*$, используя соотношения между координатами в различных картах, а именно, равенства $y_0 = 1/y, y_0^* = 1/y^*, y_i = y_{i-1}, y_i^* = y_{i-1}^*$ ($i = 1, 2, \dots, l$), получаем, что $y_i = y_i^*$ при всех значениях $i = 0, 1, \dots, l$. Далее, из условия леммы $x - p_1 = x^* - p_1^*$ и соотношений

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{y_0}, \quad x^* = \frac{x_0^*}{y_0^*}, \quad x_0 = x_1 y_1, \quad x_0^* = x_1^* y_1^*, \\ x_i - p_i &= x_{i+1} y_{i+1}, \quad x_i^* - p_i^* = x_{i+1}^* y_{i+1}^*, \quad i = 1, \dots, l - 1, \end{aligned}$$

получаем

$$x_0 - p_1 y_0 = x_0^* - p_1^* y_0^*, \quad x_1 - p_1 = x_1^* - p_1^*, \quad x_2 = x_2^*, \quad x_3 y_3 + p_2 = x_3^* y_3^* + p_2^*.$$

Но $p_2 = p_2^*$ по условию леммы и, следовательно, $x_3 = x_3^*$. А так как $p_i = p_i^*$ при всех $i \geq 2$, то и для всех значений $i > 3$ аналогично получаем $x_i = x_i^*$. Лемма доказана.

Из леммы 5 следует, что комплексная структура многообразия $M(p)$ не зависит от значения параметра p_1 . Доказать аналогичное утверждение относительно параметров $p_2, \dots, p_{l-1}$ не удается; по-видимому, такое утверждение неверно.

5. Доказательство предложения 1. Рассмотрим сначала случай, когда параметр $p_1 = 0$. Пусть P и Q – многочлены от x, y и их якобиан $J(x, y) \equiv 1$. Покажем, что хотя бы одна из двух функций $P_3(x, y) = P(xy^2 + p_2y, 1/y)$ и $Q_3(x, y) = Q(xy^2 + p_2y, 1/y)$ не является многочленом.

Замена переменных $x \mapsto xy^2 + p_2y, y \mapsto 1/y$ получается последовательным выполнением трех замен: $x \mapsto x/y, y \mapsto 1/y; x \mapsto xy^2, y \mapsto y; x \mapsto xy + p_2, y \mapsto y$. Выполнив две первые замены, мы получим функции $P_2(x, y) = P(xy, 1/y)$ и $Q_2(x, y) = Q(xy, 1/y)$, а после выполнения всех трех замен получим функции P_3 и Q_3 . Запишем P_2 и Q_2 в виде

$$P_2(x, y) = y^{-k} \sum_{j \geq 0} a_j(x) y^j, \quad Q_2(x, y) = y^{-k} \sum_{j \geq 0} b_j(x) y^j.$$

Так как для пары P_2, Q_2 якобиан $J(x, y) = -1/y$, в силу леммы 1 $c_s = 0$ при $s \neq 2k$ и $c_{2k} = -1$. В силу леммы 2

$$c_{2k} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x), \quad \text{где } \lambda(x) = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) \begin{vmatrix} a_j & a_{2k-j} \\ b_j & b_{2k-j} \end{vmatrix},$$

и, следовательно, $\lambda(x) = -x + \text{const}$.

Если предположить, что обе функции P_3, Q_3 являются многочленами, то из леммы 4 получится, что при всяком $j = 0, 1, \dots, k-1$ каждый из коэффициентов $a_j(x)$ и $b_j(x)$ делится на $x - p_2$, и каждый из коэффициентов $a_{2k-j}(x)$ и $b_{2k-j}(x)$ делится на x . Следовательно, $\lambda(x) = x(x - p_2)\mu(x)$, где $\mu(x)$ – многочлен от x . Таким образом, $x(x - p_2)\mu(x) = -x + \text{const}$, что невозможно. Поэтому хотя бы одна из функций P_3, Q_3 не является многочленом.

Пусть теперь p_1 – произвольное комплексное число. Положим $p = (p_1, p_2)$ и $p^* = (0, p_2)$ и воспользуемся существованием биголоморфного отображения Ω пространства $M(p^*)$ на $M(p)$ (см. лемму 5). Положим $P = F(\Omega), Q = G(\Omega), P_3 = F_3(\Omega)$ и $Q_3 = G_3(\Omega)$. Так как на каждой карте отображение Ω линейно, из условия, что F и G – многочлены, следует, что P и Q – тоже многочлены. Поскольку или F_3 , или G_3 не является многочленом, то хотя бы одна из функций F_3 и G_3 не может быть многочленом. Выше было установлено, что или P_3 , или Q_3 не может быть многочленом. Тем самым, предложение 1 доказано.

6. Примеры необратимых рациональных отображений. Приведенная выше схема вычисления якобиана оказалась достаточно удобной для построения примеров отображений, обладающих теми или иными наперед заданными свойствами. Приведем здесь несколько примеров необратимых рациональных отображений $\mathbb{C}^2$ в себя с постоянным ненулевым якобианом, имеющих разнообразную топологическую структуру кривой ветвления обратного отображения. Выкладки приводить не будем. Отметим лишь, что коэффициенты отображающих функций удобнее подбирать после выполнения нескольких σ -процессов, а не в исходных координатах.

Введем несколько обозначений: Π – замена переменных $x \mapsto x/y, y \mapsto 1/y; \Sigma_{xy}$ – замена переменных $x \mapsto xy, y \mapsto y; \Sigma_{yx}$ – замена переменных $x \mapsto x, y \mapsto xy; F, G$ – функции, задающие отображение $\mathbb{C}^2$ в себя; P, Q – многочлены, которые получаются после выполнения необходимой цепочки σ -процессов; J – якобиан пары функций.

Рассмотрим следующие четыре примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $F = x^2y^6 + 2xy^2, G = xy^3 + 1/y, J = -2$.

Замена $\Pi \cdot \Sigma_{xy}^4$ дает $P = x^2 + 2xy, Q = x + y, J = 2y$. Полагая $y = 0$ и $x = t$, получаем параметрическую запись особой кривой обратного отображения: $x = t^2, y = t$.

ПРИМЕР 2. Пусть $F = 2x^3y^9 + xy^2, G = 3x^2y^6 + 1/y, J = -1$.

Замена $\Pi \cdot \Sigma_{xy}^4$ дает $P = 2x^3 + xy, Q = 3x^2 + y, J = y$. Особая кривая: $x = 2t^3, y = 3t^2$.

ПРИМЕР 3. Пусть

$$F = x^6y^{15} + \frac{3}{2}x^3y^7 + \frac{3}{8}\frac{1}{y}, \quad G = x^4y^{10} + xy^2, \quad J = \frac{3}{8}.$$

Замена $\Pi \cdot \Sigma_{xy}^3 \cdot \Sigma_{yx} \cdot \Sigma_{xy}$ дает

$$P = x^3 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{8}xy^2, \quad Q = x^2 + xy, \quad J = -\frac{3}{8}xy^2.$$

Особая кривая: $x = t^3$, $y = t^2$; при этом отображение P, Q переводит всю сферу $x = 0$ в точку $(0, 0)$.

ПРИМЕР 4. Пусть

$$F = x^{15}y^{35} + \frac{5}{2}x^{10}y^{23} + \frac{15}{8}x^5y^{11} + \frac{5}{16}\frac{1}{y}, \quad G = x^6y^{14} + xy^2, \quad J = \frac{5}{16}.$$

Замена $\Pi \cdot \Sigma_{xy}^3 \cdot \Sigma_{yx}^2 \cdot \Sigma_{xy}$ дает

$$P = x^5 + \frac{5}{2}x^4y + \frac{15}{8}x^3y^2 + \frac{5}{16}x^2y^3, \quad Q = x^2 + xy, \quad J = -\frac{5}{16}x^2y^3.$$

Особая кривая: $x = t^5$, $y = t^2$; при этом в точку $(0, 0)$ переходят две сферы. Первая возникает после замены $\Pi \cdot \Sigma_{xy}^3 \cdot \Sigma_{yx}$ и в соответствующих координатах задается уравнением $x = 0$. Вторая сфера появляется после выполнения второй из замен Σ_{yx} и также задается уравнением $x = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витушкин А. Г. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 5. С. 643–653.