Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Платонова, Многообразия разрешимых индекса 2 алгебр типа $(1,1)$, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 409–419

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:04:13

УДК 512.554.5

МНОГООБРАЗИЯ РАЗРЕШИМЫХ ИНДЕКСА 2 АЛГЕБР ТИПА $(1,1)$

С. В. Платонова

Работа посвящена изучению строения множества всех не нильпотентных подмногообразий многообразия разрешимых индекса 2 алгебр типа $(1, 1)$. Построен аддитивный базис свободной метабелевой $(1, 1)$ -алгебры и доказано, что любое тождество не нильпотентной метабелевой $(1, 1)$ -алгебры степени ≥ 6 является следствием четырех определяющих соотношений.

Библиография: 9 названий.

Хорошо известно, что в теории неассоциативных алгебр наряду с понятием нильпотентности важную роль играет понятие разрешимости. Первые примеры разрешимых, но не нильпотентных альтернативных алгебр и алгебр типа $(-1, 1)$ построил Г. В. Дорофеев [1], [2]. Он же привел пример конечномерной правоальтернативной правонильпотентной алгебры, которая не является нильпотентной [2, с. 408].

Изучением многообразий разрешимых индекса 2 (или в другой терминологии метабелевых) алгебр, близких к ассоциативным, занимались разные авторы [3]–[8]. Так, Ю. А. Медведев [4] доказал, что многообразия метабелевых альтернативных, йордановых, мальцевских алгебр и алгебр типа $(-1, 1)$ шпехтовы. С. В. Пчелинцев [5] получил ряд результатов о строении решеток многообразий метабелевых алгебр, близких к ассоциативным. В частности, им было доказано, что любое не нильпотентное многообразие метабелевых алгебр типа $(-1, 1)$ задается тождествами степени ≤ 7 .

В настоящей работе изучаются алгебры типа $(1, 1)$. Они содержатся в классе алгебр типа (γ, δ) , которые были введены А. А. Албертом [9] и представляют собой важный класс 2-многообразий (многообразие называется 2-многообразием, если в алгебрах этого класса выполнено свойство “квадрат идеала – идеал”). Напомним, что алгебра над полем Φ характеристики $\neq 2, 3$ называется *алгеброй типа (γ, δ)* , если она удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}(x, x, x) &= 0, \\ (x, y, z) + \gamma(y, x, z) + \delta(z, x, y) &= 0, \\ (x, y, z) - \gamma(x, z, y) + (1 - \delta)(y, z, x) &= 0,\end{aligned}$$

где $\gamma, \delta \in \Phi$, $\gamma^2 - \delta^2 + \delta - 1 = 0$, $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ – ассоциатор элементов x, y, z .

Предлагаемая заметка состоит из пяти разделов. В п. 1 доказываются простейшие следствия из определяющих соотношений, пп. 2 и 3 посвящены переработке операторных слов длины 3 и 4, в п. 4 вводится функция $\{x, y, z\} := (yx)z + (zx)y$, исследуются

ее свойства и доказываются вспомогательные тождества, необходимые для построения аддитивного базиса свободной алгебры. В п. 5 построен базис свободной метабелевой алгебры типа $(1, 1)$ и доказан основной результат.

ТЕОРЕМА. *Всякое тождество степени ≥ 6 не нильпотентного подмногообразия многообразия $\mathcal{M}$ метабелевых $(1, 1)$ -алгебр над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, является следствием определяющих тождеств многообразия $\mathcal{M}$.*

Используя терминологию работы [5], отсюда получаем следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Множество не нильпотентных многообразий $(1, 1)$ -алгебр конечномерно. Если поле Φ конечно, то указанное множество многообразий также конечно.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Топологический ранг многообразия метабелевых алгебр типа $(1, 1)$ равен 2.*

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору С. В. Пчелинцеву за постановку задачи, полезные обсуждения и помощь при подготовке статьи к печати.

1. Простейшие следствия из определяющих соотношений. В соответствии с определением (γ, δ) -алгебр алгебра над полем Φ характеристики $\neq 2, 3$ называется $(1, 1)$ -алгеброй, если в ней выполнены тождества

$$(x, x, x) = 0, \quad (1)$$

$$(x, y, z) + (y, x, z) + (z, x, y) = 0, \quad (2)$$

$$(x, y, z) - (x, z, y) = 0. \quad (3)$$

Напомним, что алгебра называется *метабелевой*, если в ней справедливо тождество $(xy)(zt) = 0$. В дальнейшем термин “алгебра” означает метабелеву алгебру типа $(1, 1)$, а тождество метабелевости используется без дополнительных пояснений. В алгебре A операторы правого и левого умножения на элемент x , действующие на квадрате A^2 , обозначаются, как обычно, через $R(x)$ и $L(x)$; T является общим обозначением для операторов R, L . Для коммутаторов и йордановых произведений используются стандартные обозначения: $[x, y] = xy - yx$; $x \circ y = xy + yx$.

Полагая в тождестве (2) $z = ab$, получим $-x(yz) - y(zx) + (zx)y = 0$ или в операторной форме: $-L_y L_x - L_x L_y + R_x R_y = 0$, т.е.

$$R_x R_y = L_x \circ L_y. \quad (4)$$

Полагая в тождестве (3) $x = ab$, получим $(xy)z - (xz)y = 0$ или

$$[R_y, R_z] = 0. \quad (5)$$

Аналогично, полагая в (3) $y = ab$, получим $(xy)z - x(yz) + x(zx) = 0$ или в операторной форме $L_x R_z - R_z L_x + L_z L_x = 0$; следовательно,

$$L_x R_z = (R_z - L_z) L_x. \quad (6)$$

Из равенств (4)–(6) очевидной индукцией по длине операторного слова вытекает

ЛЕММА 1. *Всякое операторное слово метабелевой алгебры типа $(1, 1)$ представимо с сохранением состава в виде линейной комбинации слов вида $T_a L_b \dots L_c$.*

2. Переработка операторных слов длины 3. В силу соотношений (4) и (5) получаем

СВОЙСТВО 1. $R_x(L_y \circ L_z) = (L_x \circ L_y)R_z = R_x R_y R_z$ и все указанные функции симметричны по переменным x, y, z .

СВОЙСТВО 2. *Имеет место соотношение*

$$(L_x L_z L_y + L_y L_x L_z) + L_z(L_x \circ L_y) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойство 1, вычислим произведение $R_x R_y R_z$:

$$\begin{aligned} R_x R_y R_z &= (L_x \circ L_y)R_z = L_x L_y R_z + L_y L_x R_z \\ &= L_x((R_z - L_z)L_y) + L_y((R_z - L_z)L_x) \quad (\text{в силу (6)}) \\ &= L_x R_z L_y - L_x L_z L_y + L_y R_z L_x - L_y L_z L_x \\ &= L_x R_z L_y + L_y R_z L_x - (L_x L_z L_y + L_y L_z L_x) \\ &= ((R_z - L_z)L_x)L_y + ((R_z - L_z)L_y)L_x - (L_x L_z L_y + L_y L_z L_x) \quad (\text{в силу (6)}) \\ &= R_z(L_x \circ L_y) - L_z(L_x \circ L_y) - (L_x L_z L_y + L_y L_z L_x) \\ &= R_x R_y R_z - L_z(L_x \circ L_y) - (L_x L_z L_y + L_y L_z L_x), \end{aligned}$$

откуда и вытекает требуемое соотношение.

СВОЙСТВО 3. $\sum L_{x\sigma} L_{y\sigma} L_{z\sigma} = 0$, где σ пробегает симметрическую группу S_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в свойстве 2 $x = y = z$, получаем $4L_x^3 = 0$; значит, $L_x^3 = 0$ (характеристика $\neq 2$). Линеаризация этого тождества и доказывает свойство 2.

СВОЙСТВО 4. *Имеет место соотношение*

$$(L_x \circ L_y)L_z = R_x R_y L_z = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства 2 имеем $(L_x L_z L_y + L_y L_z L_x) + L_z(L_x \circ L_y) = 0$. Отсюда на основании свойства 3 получаем $0 = L_x L_y L_z + L_y L_x L_z = (L_x \circ L_y)L_z$. Учитывая полученное равенство и соотношение (4), имеем $R_x R_y L_z = 0$.

СВОЙСТВО 5. *Имеет место соотношение*

$$(R_a L_y L_b + R_b L_y L_a) + R_y(L_a \circ L_b) - L_y(L_a \circ L_b) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним вначале, что в произвольной алгебре выполняется тождество, которое получается раскрытием ассоциаторов и приведением подобных членов:

$$T(x, y, z, t) := x(y, z, t) + (x, y, z)t - (xy, z, t) + (x, yz, t) - (x, y, zt) = 0.$$

Учитывая определяющие тождества, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= T(x, y, x, x) = x(y, x, x) + (x, y, x)x - (xy, x, x) + (x, yx, x) - (x, y, x^2) \\ &= x(y, x, x) + (x, x, y)x - (xy, x, x) + (x, x, yx) - (x, x^2, y) \\ &= x((yx)x) - x(yx^2) + (x^2y)x - (x(xy))x - ((xy)x)x - x(x(yx)) - x^3y + x(x^2y) \\ &= x((yx)x) + (x, y, x^2) + (x^2, y, x) - (x(xy))x \\ &\quad - ((xy)x)x - x(x(yx)) - (x^2, x, y) + x(x^2y) \\ &= x((yx)x) + (x, y, x^2) - (x(xy))x - ((xy)x)x - x(x(yx)) + x(x^2y) \\ &= x((yx)x) + (x, x^2, y) - (x(xy))x - ((xy)x)x - x(x(yx)) + x(x^2y) \\ &= x((yx)x) + x^3y - x(x^2y) - (x(xy))x - ((xy)x)x - x(x(yx)) + x(x^2y) \\ &= x((yx)x) + x^3y - (x(xy))x - ((xy)x)x - x(x(yx)). \end{aligned}$$

Итак, справедливо тождество

$$x((yx)x) + x^3y - (x(xy))x - ((xy)x)x - x(x(yx)) = 0. \quad (7)$$

Линеаризуем это тождество по x , считая, что $a, b \in A, c \in A^2$, имеем

$$\begin{aligned} &a((yc)b) + b((yc)a) + ((ca)b + (cb)a + (ac)b + (bc)a)y \\ &\quad - (a(cy))b - (b(cy))a - ((cy)a)b - ((cy)b)a - a(b(yc)) - b(a(yc)) = 0. \end{aligned}$$

Запишем последнее тождество в операторной форме:

$$\begin{aligned} &L_y(R_aL_b + R_bL_a) + (R_a \circ R_b)R_y + (L_aR_b + L_bR_a)R_y \\ &\quad - R_y(L_aR_b + L_bR_a) - R_y(R_a \circ R_b) - L_y(L_a \circ L_b) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (5), полученное равенство принимает вид

$$L_y(R_aL_b + R_bL_a) + (L_aR_b + L_bR_a)R_y - R_y(L_aR_b + L_bR_a) - L_y(L_a \circ L_b) = 0.$$

Используя соотношения (6) и (4), преобразуем левую часть последнего равенства:

$$\begin{aligned} &(R_a - L_a)L_yL_b + (R_b - L_b)L_yL_a + L_a(L_b \circ L_y) + L_b(L_a \circ L_y) \\ &\quad - R_y(R_b - L_b)L_a - R_y(R_a - L_a)L_b - L_y(L_a \circ L_b) = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} 0 &= R_aL_yL_b - L_aL_yL_b + R_bL_yL_a - L_bL_yL_a + L_aL_bL_y + L_aL_yL_b + L_bL_aL_y \\ &\quad + L_bL_yL_a - R_yR_bL_a + R_yL_bL_a - R_yR_aL_b + R_yL_aL_b - L_yL_aL_b - L_yL_bL_a \\ &= R_aL_yL_b + R_bL_yL_a + ((L_a \circ L_b)L_y - R_yR_bL_a - R_yR_aL_b) \\ &\quad + R_yL_bL_a + R_yL_aL_b - L_yL_aL_b - L_yL_bL_a. \end{aligned}$$

Отсюда по свойству 4 получаем требуемое соотношение.

СВОЙСТВО 6. *Имеет место соотношение $R_y(L_a \circ L_b) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании свойства 5 имеем

$$(R_a L_b L_y + R_b L_y L_a) + R_y(L_a \circ L_b) - L_y(L_a \circ L_b) = 0.$$

Запишем еще два равенства, которые получаются из него под действием перестановок символов (by) и (ay) :

$$\begin{aligned} (R_a L_y L_b + R_y L_b L_a) + R_b(L_a \circ L_y) - L_b(L_a \circ L_y) &= 0, \\ (R_y L_b L_a + R_b L_a L_y) + R_a(L_y \circ L_b) - L_a(L_b \circ L_y) &= 0. \end{aligned}$$

Сложим последние три равенства:

$$2(R_y(L_a \circ L_b) + R_b(L_a \circ L_y) + R_a(L_y \circ L_b)) - (L_y(L_a \circ L_b) + L_b(L_a \circ L_y) + L_a(L_b \circ L_y)) = 0.$$

Откуда в силу свойств 1 и 3 получаем $6R_a(L_b \circ L_y) = 0$, и ввиду ограничений на характеристику $R_a(L_b \circ L_y) = 0$.

Из свойств 5 и 6 немедленно вытекают

СВОЙСТВО 7. *Имеет место соотношение*

$$R_a L_x L_b + R_b L_x L_a = L_x(L_a \circ L_b).$$

СВОЙСТВО 8. *Имеет место соотношение*

$$(R_a L_b + R_b L_a) L_x = L_a L_x L_b + L_b L_x L_a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства 6 имеем

$$(R_x L_b L_a + R_a L_b L_x) - L_b(L_x \circ L_a) = 0.$$

Переставляя по циклу символы x, b, a , получаем

$$(R_b L_a L_x + R_x L_a L_b) - L_a(L_b \circ L_x) = 0.$$

Сложим два последних равенства:

$$R_x(L_b \circ L_a) + (R_a L_b + R_b L_a) L_x = (L_a \circ L_b) L_x + (L_a L_x L_b + L_b L_x L_a).$$

Учитывая свойства 4 и 6, имеем $(R_a L_b + R_b L_a) L_x = L_a L_x L_b + L_b L_x L_a$.

Из соотношения (4) и свойств 4 и 6 вытекает

СВОЙСТВО 9. *Имеет место соотношение $R_x R_y T_z = 0$.*

Доказанные операторные свойства 1–9 объединим в лемму.

ЛЕММА 2. Во всякой метабелевой $(1, 1)$ -алгебре справедливы соотношения

- а) $R_x(L_y \circ L_z) = (L_x \circ L_y)L_z = R_x R_y T_z = 0$;
- б) $(R_a L_b + R_b L_a)L_x = L_a L_x L_b + L_b L_x L_a$;
- в) $R_a L_x L_b + R_b L_x L_a = L_x(L_a \circ L_b)$.

СЛЕДСТВИЕ. Функция $T_a L_x L_y \dots L_z L_b$ кососимметрична по $x, y, \dots, z$.

3. Переработка операторных слов длины 4.

СВОЙСТВО 10. Имеет место соотношение $(R_a L_b + R_b L_a)L_x L_y = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя свойства 8 и 4, имеем

$$(R_a L_b + R_b L_a)L_x L_y = L_a L_x L_b L_y + L_b L_x L_a L_y = -L_a L_b L_x L_y - L_b L_a L_x L_y = 0.$$

СВОЙСТВО 11. Имеет место соотношение $L_a L_b(L_x \circ L_y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойств 8 и 4

$$0 = R_x L_y L_b + R_y L_x L_b - L_x L_b L_y - L_y L_b L_x = R_x L_y L_b + R_y L_x L_b + L_b(L_x \circ L_y).$$

Умножим полученное равенство слева на L_a и проведем преобразования, используя тождество (6) и свойства 4 и 7:

$$\begin{aligned} -L_a L_b(L_x \circ L_y) &= L_a R_x L_y L_b + L_a R_y L_x L_b \\ &= (R_x - L_x)L_a L_y L_b + (R_y - L_y)L_a L_x L_b \\ &= R_x L_a L_y L_b + R_y L_a L_x L_b - L_x L_a L_y L_b - L_y L_a L_x L_b \\ &= (R_x L_a L_y + R_y L_a L_x)L_b - L_x L_a L_y L_b - L_y L_a L_x L_b \\ &= L_a(L_x \circ L_y)L_b - L_x L_a L_y L_b - L_y L_a L_x L_b \quad (\text{по свойству 7}) \\ &= L_a L_x L_y L_b + L_a L_y L_x L_b - L_x L_a L_y L_b - L_y L_a L_x L_b \quad (\text{по свойству 4}) \\ &= 2L_a(L_x \circ L_y)L_b = 0 \quad (\text{по свойству 4}). \end{aligned}$$

4. Вспомогательные тождества. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие метабелевых алгебр типа $(1, 1)$; A – свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Для элементов $x, y \in A^2$ будем писать $x \approx y(n)$ и $x \equiv y(n)$ соответственно, если для любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ справедливы равенства

$$(x - y)L(a_1)L(a_2) \dots L(a_n) = 0 \quad \text{и} \quad (x - y)T(a_1)T(a_2) \dots T(a_n) = 0.$$

ЛЕММА 3. Имеем $[[x, y], z] \equiv 0(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (2) имеем

$$\begin{aligned}(zx)y - z(xy) + (xz)y - x(zx) + (yz)x - y(zx) &= 0, \\ z(xy) &= (zx)y + (xz)y - x(zx) + (yz)x - y(zx).\end{aligned}$$

Умножая обе части последнего равенства на $R_t L_u$, получим

$$\begin{aligned}(xy)L_z R_t L_u &= ((zx)y + (xz)y - x(zx) + (yz)x - y(zx))R_t L_u \\ &= (zx)R_y R_t L_u + (xz)R_y R_t L_u - (zy)L_x R_t L_u \\ &\quad + (yz)R_x R_t L_u - (zx)L_y R_t L_u \\ &= -(zy)L_x R_t L_u - (zx)L_y R_t L_u \quad (\text{по свойству 9}).\end{aligned}$$

Таким образом, $(xy)L_z R_t L_u = -(zy)L_x R_t L_u - (zx)L_y R_t L_u$. Поскольку правая часть последнего равенства симметрична по x и y , то $(xy)L_z R_t L_u = (yx)L_z R_t L_u$ или

$$[x, y]L_z R_t L_u = 0. \quad (8)$$

В силу (6)

$$[x, y](R_t - L_t)L_z L_u, \quad (9)$$

$$[[x, y], t]L_z L_u = 0. \quad (10)$$

По свойству 9 имеем $[x, y]R_z R_t L_u = 0$. Вычитая из этого равенства равенство (8), получаем $[x, y](R_z - L_z)R_t L_u = 0$, $[[x, y], z]R_t L_u = 0$. Из последнего соотношения, равенства (10) и леммы 1 и вытекает требуемое утверждение.

Введем вспомогательную функцию $\{x, y, z\} := (yx)z + (zx)y$, которая, очевидно, симметрична по y, z , т.е. $\{x, y, z\} = \{x, z, y\}$.

ЛЕММА 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) $\{a, b, x\}L_y + \{a, b, y\}L_x + \{a, x, y\}L_b \approx 0(2)$;
- б) $\{a, b, x\}L_y \approx \{b, a, x\}L_y(2)$;
- в) $\{a, b, x\}L_y \approx 0(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве леммы запись $u \approx v$ означает, что $u \approx v(2)$.

а) Заметив, что свойство 10 имеет вид $R_a L_b + R_b L_a \approx 0$, получаем

$$\begin{aligned}\{a, b, x\}L_y + \{a, b, y\}L_x &= (ba)R_x L_y + (xa)R_b L_y + (ba)R_y L_x + (ya)R_b L_x \\ &\approx (xa)R_b L_y + (ya)R_b L_x \approx -(xa)R_y L_b - (ya)R_x L_b \approx -\{a, x, y\}L_b.\end{aligned}$$

б) Учитывая тождества (2) и (3), получаем

$$\begin{aligned}(ba)x + (xa)b &= (ba)x - b(ax) + b(ax) + (xa)b - x(ab) + x(ab) \\ &= (b, a, x) + (x, a, b) + b(ax) + x(ab) = (b, a, x) + (x, b, a) + b(ax) + x(ab) \\ &= -(a, x, b) + b(ax) + x(ab) = -(ax)b + a(xb) + b(ax) + x(ab) \\ &= [b, ax] + a(xb) + x(ab).\end{aligned}$$

Следовательно, $(ba)x + (xa)b - [b, ax] - a(xb) - x(ab) = 0$.

Действуя на это соотношение оператором $L_u R_y L_v$, имеем

$$\begin{aligned}
 0 &= ((ba)R_x + (xa)R_b - [b, ax] - (xb)L_a - (ab)L_x)L_u R_y L_v \\
 &= ((ba)R_x + (xa)R_b - (xb)L_a - (ab)L_x)L_u R_y L_v \quad (\text{в силу (8)}) \\
 &= ((ba)R_x + (xa)R_b - (xb)L_a - (ab)L_x)(R_y - L_y)L_u L_v \quad (\text{в силу (6)}) \\
 &= (-(ba)R_x L_y - (xa)R_b L_y - (xb)L_a R_y + (xb)L_a L_y \\
 &\quad - (ab)L_x R_y + (ab)L_x L_y)L_u L_v \quad (\text{по свойству 9}) \\
 &= (-(ba)R_x L_y - (xa)R_b L_y - (xb)R_y L_a + (xb)L_y L_a + (xb)L_a L_y - (ab)R_y L_x \\
 &\quad + (ab)L_y L_x + (ab)L_x L_y)L_u L_v \quad (\text{в силу (6)}) \\
 &= (-(ba)R_x L_y - (xa)R_b L_y - (xb)R_y L_a - (ab)R_y L_x)L_u L_v \quad (\text{по свойству 4}).
 \end{aligned}$$

Следовательно, $-(ba)R_x L_y - (xa)R_b L_y - (xb)R_y L_a - (ab)R_y L_x \approx 0$ или

$$\begin{aligned}
 (ba)R_x L_y + (xa)R_b L_y &\approx -(xb)R_y L_a - (ab)R_y L_x \\
 &\approx (xb)R_a L_y + (ab)R_x L_y \quad (\text{по свойству 10}),
 \end{aligned}$$

т.е. $\{a, b, x\}L_y \approx \{b, a, x\}L_y$.

в) Из п. а) и б) следует, что $(\{b, a, x\}L_y + \{b, a, y\}L_x) + \{a, x, y\}L_b \approx 0$. Применяя п. а) к выражению в круглых скобках, получаем $-\{b, x, y\}L_a + \{a, x, y\}L_b \approx 0$, т.е.

$$\{a, x, y\}L_b \approx \{b, x, y\}L_a.$$

Следовательно, функция $\{a, b, x\}L_y L_u L_v$ симметрична по переменным a, b, x, y . Тогда в силу п. а) имеем $3\{a, b, x\}L_y \approx 0$. Откуда ввиду ограничения на характеристику получаем требуемое в п. в).

ЛЕММА 5. Если в алгебре A верно соотношение $A[A^2, A] \equiv 0(n)$ при некотором $n \geq 2$, то алгебра A нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, $[A^2, A]A \subseteq A[A^2, A] + [[A^2, A], A] \equiv 0(n)$, значит, $[A^2, A] \equiv 0(n+1)$. Далее, известно, что в произвольной алгебре выполняется тождество

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y + ((x, y, z) - (x, z, y)) + (z, x, y).$$

Поскольку выражение в круглых скобках равно нулю в силу тождества (3), то

$$\begin{aligned}
 [xy, z] &= x[y, z] + [x, z]y + (z, x, y), \\
 (z, x, y) &= [xy, z] - x[y, z] - [x, z]y.
 \end{aligned}$$

Положим в последнем равенстве $y = w \in A^2$: $(z, x, w) = [xw, z] - x[w, z] \equiv 0(n+1)$, откуда $wL_x L_z \equiv 0(n+1)$. В частности, $wR_c L_x L_z \equiv 0(n+1)$. Наконец, учитывая лемму 1, получаем, что $A^2 \equiv 0(n+4)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если в алгебре A для любых элементов $a, b, x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 3$):

$$[a, b]L(x_1)L(x_2) \dots L(x_n) = 0 \quad \text{или} \quad [a, b]R(x_1)L(x_2) \dots L(x_n) = 0,$$

то алгебра A нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[a, b]L(x_1)L(x_2) \dots L(x_n) = 0$. Кроме того, в силу (8)

$$[a, b]L(x_1)R(x_2)L(x_3) \dots L(x_n) = 0.$$

Из последних двух равенств и леммы 1 следует, что $[a, b]L(x_1) \equiv 0(n-1)$, т.е. $A[A, A] \equiv 0(n)$. Тогда по лемме 5 алгебра A нильпотентна.

ЛЕММА 6. Если в алгебре A для любых элементов $a, b, \dots, c$ выполняется равенство $(R_a - L_a)L_b \dots L_c = 0$, то алгебра A нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя соотношение (6) $L_x R_z - R_z L_x + L_z L_x = 0$ и условие леммы, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (L_x R_z - R_z L_x + L_z L_x)L_b \dots L_c = (L_x L_z - L_z L_x + L_z L_x)L_b \dots L_c \\ &= L_x L_z L_b \dots L_c. \end{aligned}$$

Кроме того, $R_x L_z L_b \dots L_c = 0$; значит, по лемме 1 алгебра A нильпотентна.

5. Базис свободной метабелевой $(1, 1)$ -алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Правильными словами алгебры A от переменных из множества $X_n := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 6$) называются полилинейные одночлены

- а) $(x_1 x_j)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2})$,
- б) $(x_j x_1)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2})$,
- в) $(x_2 x_1)R(3)L(4) \dots L(n)$,

где $T(k) := T(x_k)$ и $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2}$.

ЛЕММА 7. Пространство $P_n(A)$ полилинейных одночленов над X_n ($n \geq 6$) линейно порождается правильными словами алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 пространство $P_n(A)$ линейно порождается словами вида $(x_i x_j)T_a L_b \dots L_c$. Далее, из следствия к лемме 2 и свойства 11 следует, что слова вида $(x_i x_j)L(k_1 \sigma)L(k_2 \sigma) \dots L(k_{n-2} \sigma)$, где $\sigma \in S_{n-2}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2}$, линейно выражаются через слова вида $(x_i x_j)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2})$, $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2}$.

Из свойств 1 и 10 следует, что слова вида

$$(x_i x_j)R(k_1 \sigma)L(k_2 \sigma) \dots L(k_{n-2} \sigma), \quad \text{где } \sigma \in S_{n-2}, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2},$$

линейно выражаются через слова вида $(x_i x_j)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2})$, $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2}$. Далее, в силу тождества (2)

$$(x_1 x_i)x_j - x_1(x_i x_j) + (x_i x_1)x_j - x_i(x_1 x_j) + (x_j x_i)x_1 - x_j(x_i x_1) = 0$$

или

$$x_1(x_i x_j) = (x_1 x_i)x_j + (x_i x_1)x_j - x_i(x_1 x_j) + (x_j x_i)x_1 - x_j(x_i x_1), \quad (11)$$

$$(x_i x_j)x_1 = x_i(x_j x_1) + (x_i x_1)x_j - x_i(x_1 x_j). \quad (12)$$

В силу (3) имеем $(x_i x_j)x_1 - x_i(x_j x_1) - (x_i x_1)x_j + x_i(x_1 x_j) = 0$. Из соотношений (11) и (12) следует, что одночлены вида

$$(x_i x_j)T(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}), \quad \text{где } k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2},$$

линейно выражаются через слова вида

$$\begin{aligned} (x_1 x_j)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}), & \quad (x_j x_1)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}), \\ (x_1 x_j)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}), & \quad (x_j x_1)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}). \end{aligned}$$

В силу (9) $[x, y]R_z L_t L_u = [x, y]L_z L_t L_u$. Следовательно,

$$[x_1, x_j]R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) = [x_1, x_j]L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}),$$

т.е.

$$\begin{aligned} (x_1 x_j)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) - (x_j x_1)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \\ = (x_1 x_j)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) - (x_j x_1)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (x_1 x_j)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) &= (x_j x_1)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \\ &- (x_1 x_j)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) + (x_j x_1)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}). \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим слова вида $(x_j x_1)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2})$, $j \geq 3$:

$$\begin{aligned} (x_j x_1)R(2)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) &= ((x_j x_1)x_2)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \\ &= \{x_1, x_2, x_j\}L(k_2) \dots L(k_{n-2}) - ((x_2 x_1)x_j)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \\ &= -((x_2 x_1)x_j)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \quad (\text{в силу леммы 4в)}) \\ &= -(x_2 x_1)R(j)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \\ &= (-1)^j (x_2 x_1)R(3)L(4) \dots L(n) \quad (\text{в силу свойств 4, 10, 11}). \end{aligned}$$

Но это и означает, что пространство $P_n(A)$ линейно порождается правильными словами алгебры A .

ЛЕММА 8. *Если алгебра A не нильпотентна, то множество ее правильных слов линейно независимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что некоторая линейная комбинация правильных слов алгебры A равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum_j \alpha_j (x_1 x_j)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) + \sum_j \beta_j (x_j x_1)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) \\ + \gamma (x_2 x_1)R(3)L(4) \dots L(n) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $v \in [A, A]$, $w \in A^2$, $j_0 \geq 3$. Полагая $x_{j_0} = v$, получаем ввиду (8)

$$\beta_{j_0}(v x_1)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) = 0.$$

Так как алгебра A не является нильпотентной, то, учитывая следствие из леммы 5, получаем $\beta_{j0} = 0$. Следовательно, в (13) все слагаемые вида $\beta_j(x_j x_1)L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2})$ равны нулю.

Далее, полагая $x_{j0} = w$, получаем ввиду свойства 4

$$\alpha_{j0}(x_1 w)R(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) = 0.$$

Учитывая (6), имеем

$$\alpha_{j0}w(R(k_1)L(x_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2}) - L(k_1)L(k_2) \dots L(k_{n-2})) = 0.$$

Так как алгебра A не нильпотентна, по лемме 6 получаем $\alpha_{j0} = 0$ и равенство (13) принимает вид $\gamma(x_2 x_1)R(3)L(4) \dots L(n) = 0$. Полагая $x_1 = w$, получаем

$$\gamma(x_2 w)R(3)L(4) \dots L(n) = 0.$$

Аналогично предыдущему $\gamma = 0$. Таким образом, множество правильных слов линейно независимо.

Из леммы 8 очевидным образом вытекает теорема 1 и следствие 1. Поскольку не всякая метабелева $(1, 1)$ -алгебра нильпотентна [8], справедливо и следствие 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дорофеев Г. В. Пример разрешимого, но не нильпотентного альтернативного кольца // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 147–150.
- [2] Жевлаков К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
- [3] Белкин В. П. О многообразиях правоальтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 5. С. 491–508.
- [4] Медведев Ю. А. Конечная базиримость многообразий с двучленным тождеством // Алгебра и логика. 1978. Т. 17. № 6. С. 705–726.
- [5] Пчелинцев С. В. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 2. С. 179–203.
- [6] Ильяков А. В. Решетка подмногообразий многообразия двухступенчато разрешимых альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 2. С. 170–177.
- [7] Пчелинцев С. В. Многообразия разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 556–566.
- [8] Никитин А. А. Почти альтернативные алгебры // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 5. С. 501–533.
- [9] Albert A. A. Almost alternative algebras // Portug. Math. J. 1949. V. 8. P. 23–36.

Рязанский государственный педагогический университет
им. С. А. Есенина

Поступило
12.02.2003