Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Ш. Ильясов, Об одном необходимом условии существования положительных решений для класса уравнений с p -Лапласом, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 312–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 07:18:03

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КЛАССА УРАВНЕНИЙ С p -ЛАПЛАСОМ

Я. Ш. Ильясов

В данной работе рассматривается следующая краевая задача Дирихле:

$$-\Delta_p u - \lambda |u|^{p-2} u = f(x) |u|^{\gamma-2} u \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2)$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 < p < \gamma \leq p^*$, $p^* = pN/(N-p)$ при $N > 2$ и $p^* = +\infty$ при $N \leq 2$; f – непрерывная по Гёльдеру функция на Ω , $f \in L^\infty(\Omega)$; $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ – p -Лаплас, где $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_N)$.

Под *решениями* задачи (1), (2) понимаются функции u из $W_0^{1,p}$, удовлетворяющие (1), (2) в слабом смысле. Соболевские пространства функций $W_0^{1,p} \equiv W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, определяются как пополнения $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\| = \left(\int |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

(Здесь и далее “ $\int$ ” обозначает интегрирование по Ω .)

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-0045, фонда INTAS, грант № 96-1060, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96-102.

В данной работе мы рассматриваем так называемые *эллиптические задачи с индефинитными нелинейностями* [1], [2], т.е. не предполагается, что функция f является знакоопределенной. Такие задачи на данном этапе являются менее изученными, чем задачи со знакоопределенными нелинейностями, когда предполагается, что $f(x) \geq 0$ или $f(x) \leq 0$ для всех $x \in \Omega$ (см. [2], [3]).

Обозначим через $\varphi_1 \in W_0^{1,p}$ первую собственную функцию, а через λ_1 соответствующее первое собственное значение оператора $-\Delta_p$, рассматриваемого на $W_0^{1,p}$:

$$-\Delta_p \varphi_1 = \lambda_1 |\varphi_1|^{p-2} \varphi_1, \quad (3)$$

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (4)$$

Известно [4], [5], что при $1 < p < \infty$ собственное значение λ_1 является простым и изолированным, а собственная функция $\varphi_1 > 0$ на Ω и $\varphi_1 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$.

Введем следующее предположение:

$$\int f(x) |\varphi_1|^\gamma dx < 0. \quad (5)$$

В случае $p = 2$ в работах [1], [2] доказано, что условие (5) является *необходимым и достаточным* для существования положительных решений задачи (1), (2) при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$ для некоторого $\lambda^* < \infty$. В работе [6] при $p \in (1, \infty)$ доказано, что условие (5) является *достаточным* для существования положительных решений задачи (1), (2) при $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Отметим, что в этих работах (в [1], [2] при $p = 2$ и в [6] при $p \in (1, \infty)$) при этих же значениях λ доказано, что если дополнительно к (5) справедливо предположение $f^+(x) \equiv \max(0, f(x)) \neq 0$ на некотором подмножестве Ω ненулевой лебеговой меры, то существуют два различных положительных решения задачи (1), (2).

Основным результатом данной заметки является доказательство того, что при любом $p \in (1, \infty)$ условие (5) *необходимо* для существования неотрицательных решений задачи (1), (2) при $\lambda > \lambda_1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $1 < p < \gamma \leq p^*$, где $p^* = pN/(N-p)$ при $N > 2$ и $p^* = +\infty$ при $N \leq 2$; функция f непрерывна по Гёльдеру и $f \in L^\infty(\Omega)$. Пусть при некотором $\lambda > \lambda_1$ существует неотрицательное слабое решение $u \in W_0^{1,p}$ задачи (1), (2). Тогда необходимо выполняется условие (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше доказательство основано на обобщении подхода, предложенного в [2] для случая $p = 2$. В [2] для доказательства такого утверждения используется тождество Пиконе [7]. При этом важным является то, что в случае $p = 2$ оператор $\Delta_p \equiv \Delta$ является симметричным. В общем случае ($1 < p < \infty$) это не так, и напрямую воспользоваться тождеством Пиконе не удастся.

Пусть при некотором $\lambda > \lambda_1$ существует неотрицательное слабое решение $u \in W_0^{1,p}$ задачи (1), (2).

Прежде всего отметим, что из этого предположения стандартным образом (см. [3], [8], [9]) выводится, что $u > 0$ и $u \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$. Далее заметим, что наряду с φ_1 решениями (3) являются также $t\varphi_1$ при любом $t > 0$. Поскольку всегда найдется $t > 0$ такое, что выполнено $t\varphi_1 < u$ при $x \in \Omega$, то в дальнейшем без ограничений общности можно считать, что

$$0 < \frac{\varphi_1}{u} < c < \infty \quad \text{при } x \in \Omega, \quad (6)$$

где $c < \infty$ не зависит от $x \in \Omega$. Домножим уравнение (1) на $(\varphi_1/u)^{\gamma-1} \varphi_1$, а уравнение (3) на $(\varphi_1/u)^{\gamma-p+1} u$ и полученные сложим. Тогда после некоторого преобразования получим

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left[\left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-p+1} u |\nabla \varphi_1|^{p-2} \nabla \varphi_1 - \left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-1} \varphi_1 |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \\ & - \left[\left(\nabla \left(\left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-p+1} u \right), |\nabla \varphi_1|^{p-2} \nabla \varphi_1 \right) - \left(\nabla \left(\left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-1} \varphi_1 \right), |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \right] \\ & = (\lambda - \lambda_1) \left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^\gamma u^p + f |\varphi_1|^\gamma. \end{aligned}$$

Из (6) вытекает, что $(\varphi_1/u)^{\gamma-1}\varphi_1, (\varphi_1/u)^{\gamma-p+1}u \in W_0^{1,p}$. Поэтому мы можем проинтегрировать обе части последнего равенства по Ω . Тогда в силу (2), (4) получим

$$\begin{aligned} & - \int \left[\left(\nabla \left(\left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-p+1} u \right), |\nabla \varphi_1|^{p-2} \nabla \varphi_1 \right) - \left(\nabla \left(\left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-1} \varphi_1 \right), |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \right] \\ & - (\lambda - \lambda_1) \int \left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma} u^p = \int f |\varphi_1|^{\gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Покажем, что подынтегральное выражение первого интеграла левой части (7) неотрицательно. С этой целью сначала перепишем данное выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla \left(\left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-p+1} u \right), |\nabla \varphi_1|^{p-2} \nabla \varphi_1 \right) - \left(\nabla \left(\left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-1} \varphi_1 \right), |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \\ & = \left(\frac{\varphi_1}{u} \right)^{\gamma-p} u^{-p} \left[-(\gamma-p)\varphi_1 u^{p-1} (\nabla u, \nabla \varphi_1) |\nabla \varphi_1|^{p-2} - \gamma u \varphi_1^{p-1} (\nabla u, \nabla \varphi_1) |\nabla u|^{p-2} \right. \\ & \quad \left. + (\gamma-p+1)u^p |\nabla \varphi_1|^p + (\gamma-1)\varphi_1^p |\nabla u|^p \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках правой части (8) через B . Это выражение, если воспользоваться неравенством $(\nabla u, \nabla \varphi_1) \leq |\nabla u| \cdot |\nabla \varphi_1|$, оценивается следующим образом:

$$B \geq -(\gamma-p)(u|\nabla \varphi_1|)^{p-1} \varphi_1 |\nabla u| - \gamma(\varphi_1 |\nabla u|)^{p-1} u |\nabla \varphi_1| + (\gamma-p+1)u^p |\nabla \varphi_1|^p + (\gamma-1)\varphi_1^p |\nabla u|^p.$$

Отсюда, используя неравенство о среднем геометрическом, получаем

$$\begin{aligned} B & \geq -\frac{(\gamma-p)(p-1) + \gamma}{p} u^p |\nabla \varphi_1|^p - \frac{(\gamma-p) + \gamma(p-1)}{p} \varphi_1^p |\nabla u|^p \\ & \quad + (\gamma-p+1)u^p |\nabla \varphi_1|^p + (\gamma-1)\varphi_1^p |\nabla u|^p = 0. \end{aligned}$$

Тогда в силу (8) получим требуемое. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую признательность С. И. Похожаеву за постановку задачи и полезное обсуждение результата.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alama S., Tarantello G. // J. Funct. Anal. 1996. V. 141. №1. P. 159–215.
2. Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 1995. V. 2. №4. P. 553–572.
3. Trudinger N. S. // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 721–747.
4. Anane A. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1987. V. 305. P. 725–728.
5. Lindqvist P. // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. №1. P. 157–164.
6. Drabek P., Pohozhaev S. I. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1997. V. 127. P. 703–726.
7. Kreith K. // Rend. Mat. Appl. 1975. V. 8. P. 251–262.
8. Tolksdorf P. // J. Differential Equations. 1984. V. 51. P. 126–150.
9. Struwe M. Variational Methods. Application to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1996.