Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Б. Новак, Арифметические задачи с числами специального вида, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 314–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:18:14

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. А. Карацуба, Б. Новак

Многие проблемы аналитической теории чисел связаны с целыми числами определенной арифметической природы, например: с простыми числами, степенями натуральных чисел, бесквадратными числами и т.д.

В настоящей статье сформулированы теоремы, относящиеся к числам, имеющим четное (нечетное) количество единиц при записи их в двоичной системе счисления. Эти теоремы продолжают исследования М. Н. Дж. Файна [1], А. О. Гельфонда [2], С. М. Воронина и К. М. Эминяна [3], [4]. При доказательстве теорем мы в полной мере пользуемся результатами цитированных выше работ.

Введем необходимое определение и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При $\nu = 0$, $\nu = 1$ множество натуральных чисел n вида

$$n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \dots + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1},$$

где $\varepsilon_j = 0$ или 1 , $j = 0, 1, \dots, k-1$, такие, что $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{k-1} \equiv \nu \pmod{2}$, назовем *множеством* E_ν или, коротко, E_ν . При натуральном числе m , целом числе l через $\pi_\nu(X)$, $\pi_\nu(X; m, l)$, $R_\nu(X; m, l)$ будем обозначать следующие величины:

$$\begin{aligned} \pi_\nu(X) &= \sum_{\substack{n < X \\ n \in E_\nu}} 1, & \pi_\nu(X; m, l) &= \sum_{\substack{n < X, n \in E_\nu \\ n \equiv l \pmod{m}}} 1, \\ R_\nu(X; m, l) &= \pi_\nu(X; m, l) - \frac{1}{2m} X. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\pi_\nu(X) = \pi_\nu(X; 1, 0)$. Постоянные в знаках $\ll$ и O абсолютные. Через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ будем обозначать числа

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\log 3}{\log 4} = 0.7924812504 \dots, & \lambda_2 &= \frac{1}{2}(1 + \log_2 \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = 0.9428883258 \dots, \\ \lambda_3 &= \log_2 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 0.8857766516 \dots, & \lambda_4 &= 1 - \lambda_1 = 0.2075187496 \dots \end{aligned}$$

$\varphi(n)$ – функция Эйлера.

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть m – натуральное число с условием $2 \leq m \leq \sqrt{X}$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi_\nu(X; m, l) = \frac{1}{2m} X (1 + O(Xm^{-2})^{-\lambda_4}).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l, l \geq 2$, – целое число, $\pi_{\nu,l}(X)$ – количество чисел $n < X$, $n \in E_\nu$, $n \not\equiv 0 \pmod{p^l}$ при любом простом числе p . Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi_{\nu,l}(X) = \frac{1}{2\zeta(l)} X + O(x^{\lambda_1}),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана.

СЛЕДСТВИЕ. Для количества $\pi_{\nu,2}(X)$ бесквадратных чисел, не превосходящих X и имеющих четное (нечетное) число единиц в их двоичной записи, справедлива асимптотическая формула

$$\pi_{\nu,2}(X) = \frac{3}{\pi^2}X + O(X^{\lambda_1}).$$

ТЕОРЕМА 3. При $2 < Y \leq X$ справедлива следующая оценка:

$$K = \sum_{m \leq Y} \max_{0 \leq l < m} |R_{\nu}(X; m, l)| \ll X \Delta_1,$$

где $\Delta_1 = (X^{-1+\lambda_1} Y^{1+\lambda_3-2\lambda_1} + X^{-1+0.5\lambda_3} Y + X^{-0.5+0.5\lambda_3}) \log^2 X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $Y \leq \sqrt{X}$, то $K \ll (\sqrt{X})^{1+\lambda_3} \log^2 X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $Y > \sqrt{X}$, то $K \ll Y X^{0.5\lambda_3} \log^2 X = X(Y X^{-1+0.5\lambda_3}) \log^2 X$. Очевидно, что $K \ll X$ при $Y \ll X^{1-0.5\lambda_3} \log^{-2} X$, $1 - 0.5\lambda_3 = 0.5571116742 \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 является аналогом известной теоремы Бомбьерри–Виноградова о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях “в среднем”.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K_{\nu}(X)$ – количество целых точек $M = (x, y)$, лежащих внутри круга радиуса $\sqrt{X}$, таких, что числа $n = x^2 + y^2$ принадлежат E_{ν} . Тогда при $X \geq 2$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K_{\nu}(X) = \frac{\pi}{2}X + O(X^{\lambda_2} \log^3 X).$$

Всюду далее p – простое число, $p \geq p_1 > 0$, $\Delta = \Delta(X; p)$ задается следующими равенствами:

$$\Delta = \Delta(X; p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sqrt{p} \log p}{X}}, & \text{если } \sqrt{p} \log p < X \leq (\sqrt{p})^5 \log p, \\ \frac{1}{\sqrt{p}}, & \text{если } (\sqrt{p})^5 \log p < X \leq (\sqrt{p})^{4+1/\lambda_4}, \\ \left(\frac{X}{p^2}\right)^{-\lambda_4}, & \text{если } (\sqrt{p})^{4+1/\lambda_4} < X. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\chi(n)$ – неглавный характер по модулю p . Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_{\substack{n < X \\ n \in E_{\nu}}} \chi(n) \right| \ll X \Delta.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $m \geq 2$, $m \mid (p-1)$, $K_{m,\nu}(X)$ – количество вычетов степени m по модулю p в последовательности чисел $n < X$, $n \in E_{\nu}$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$K_{m,\nu}(X) = \frac{1}{2m}X(1 + \Delta_1),$$

где $\Delta_1 = m\Delta + X^{-\lambda_4} + p^{-1}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть k – количество простых делителей числа $p-1$, $T_{\nu}(X)$ – количество первообразных корней по модулю p , не превосходящих X и принадлежащих E_{ν} . Тогда справедлива асимптотическая формула

$$T_{\nu}(X) = \frac{\varphi(p-1)}{2(p-1)}X(1 + R),$$

где $R \ll X^{-\lambda_4} \log^2 X + p^{-1} \log^2 X + \Delta 2^k \log X$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fine M. N. J. // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V. 71. P. 651–652. 2. Gelfond A. O. // Acta Arith. 1968. V. 13. № 3. P. 259–265. 3. Эминян К. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 680–686. 4. Эминян К. М. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 634–637.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Карлов университет, г. Прага

Поступило
25.03.99