Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Юдович, Л. Г. Куракин, Ответвление предельного цикла от подмногообразия равновесий в системе с мультикосимметрией, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:04:48

ОТВЕТВЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОТ ПОДМНОГООБРАЗИЯ РАВНОВЕСИЙ В СИСТЕМЕ С МУЛЬТИКОСИММЕТРИЕЙ

Л. Г. Куракин, В. И. Юдович

Для динамической системы, допускающей k независимых косимметрий, типично существование k -мерных подмногообразий, заполненных равновесиями. В работах [1]–[3] в случае одной косимметрии были указаны новые эффекты, связанные с бифуркацией ответвления предельного цикла от семейства равновесий (запаздывание по параметру и возможность сверхкритических неустойчивых автоколебаний). Здесь эти результаты распространены на случай любого k . При $k > 1$ приходится иметь дело с новым явлением – бифуркацией областей устойчивости на семействе равновесий. Применяются оба основных подхода к задаче возникновения автоколебаний: метод Ляпунова–Шмидта [4] и метод центрального многообразия [5]. Поскольку речь идет о локальной бифуркации, достаточно рассмотреть уравнение на линейном (гильбертовом) пространстве, отождествляя при этом векторы и ковекторы, а косимметрии (пфаффовы формы, аннулирующие данное векторное поле) с векторными полями. Подробно результаты этой заметки изложены в [6], [7].

1. Метод Ляпунова–Шмидта. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\theta} = F(\theta, \lambda) \quad (1)$$

с вещественным параметром $\lambda \in \mathbb{R}$. Здесь $F: H \times \mathbb{R} \rightarrow H$ – аналитический оператор, допускающий зависящую от λ мультикосимметрию $\mathcal{L}: (\theta, \lambda) \rightarrow (L_1(\theta, \lambda), L_2(\theta, \lambda), \dots, L_k(\theta, \lambda))$, где $L_i: H \times \mathbb{R} \rightarrow H$ ($i = 1, 2, \dots, k$) – известные операторы. Это означает [8], что для каждого отображения L_i при всех $\theta \in H, \lambda \in \mathbb{R}$

$$(F(\theta, \lambda), L_i(\theta, \lambda)) = 0.$$

Пусть уравнение (1) при некотором $\lambda = \lambda_0$ имеет равновесие $\theta_0: F(\theta_0, \lambda_0) = 0$. Тогда векторы $L_{0i} = L_i(\theta_0, \lambda_0)$ ($i = 1, \dots, k$) принадлежат ядру оператора A_0^* , сопряженного к производной $A_0 = F'_\theta(\theta_0, \lambda_0)$ [8]. Таким образом, при условии линейной независимости системы $\{L_{01}, \dots, L_{0k}\}$ нуль является собственным значением оператора A_0^* кратности $\geq k$.

Примем следующие гипотезы:

- H1) мультикосимметрия $\mathcal{L}$ непрерывна;
- H2) θ_0 – регулярная точка мультикосимметрии $\mathcal{L}$, т.е. векторы L_{0i} ($i = 1, \dots, k$) образуют линейно независимую систему; ее линейную оболочку обозначим через Y_0 ;
- H3) выполнено условие минимальности вырождения: ядро $\ker A_0 = Y_0$, так что $\dim \ker A_0 = k$;
- H4) пересечение спектра $\sigma(A_0)$ оператора A_0 с мнимой осью состоит из k -кратного нулевого и пары чисто мнимых $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, простых собственных значений;
- H5) точки $0, \pm i\omega_0$ – полюсы оператора A_0 , так что они являются собственными значениями как оператора A_0 , так и его сопряженного A_0^* .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01791, и межвузовской программы “Университеты России – фундаментальные исследования”, грант № 4087.

Пусть $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ – биортогональная система к набору функционалов $\{L_{01}, L_{02}, \dots, L_{0k}\}$; φ, Φ – собственные векторы операторов A_0, A_0^* соответственно, так что $A_0\gamma_j = 0, (\gamma_j, L_{0l}) = \delta_{jl}$ ($j, l = 1, \dots, k$), $A_0\varphi = i\omega_0\varphi, A_0^*\Phi = -i\omega_0\Phi, (\varphi, \Phi) = 1$.

Введем обозначения: $\hat{H} = L_2(S^1, H)$ – гильбертово пространство вектор-функций на окружности S^1 со значениями в H , τ – угловая переменная на окружности, а $\hat{H}^0$ – подпространство в $\hat{H}$, состоящее из вектор-функций вида $u(\tau) = \alpha\varphi e^{i\tau} + \alpha^*\varphi^*e^{-i\tau} + \beta_1\gamma_1 + \dots + \beta_k\gamma_k$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные. Определим проектор $\Pi: \hat{H} \rightarrow \hat{H}^0$ следующим образом:

$$(\Pi f)(\tau) = 2 \operatorname{Re}[(\langle f, \Phi \rangle e^{-i\tau})e^{i\tau}\varphi] + \sum_{j=1}^k (\langle f, L_{0j} \rangle \gamma_j), \quad \langle f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) dt.$$

Обозначим через $\hat{H}'$ дополнительное подпространство, а через Π' дополнительный проектор, так что $\hat{H} = \hat{H}^0 \oplus \hat{H}', \Pi' = I - \Pi$.

Введем оператор $T: Tu = \omega_0 du/d\tau - A_0u$, где $\tau = \omega_0 t$ – новое время. Его сужение T_1 на $\hat{H}'$ – обратимый оператор.

Пусть $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=0}^k$ – матрица, задаваемая выражениями

$$\begin{aligned} a_{0j} &= \operatorname{Re} g_j, \quad g_0 = \left\langle \left(F_0''(\psi, v_2) + \frac{1}{6} F_0''' \psi^3, \Phi \right) e^{-i\tau} \right\rangle, \quad g_l = (F_0''(\varphi, \gamma_l), \Phi), \\ a_{l0} &= \left(\left\langle F_0''(\psi, v_1) + \frac{1}{2} F_0'' v_2^2 + \frac{1}{2} F_0'''(\psi, \psi, v_2) + \frac{1}{24} F_0'''' \psi^4 \right\rangle, L_{0l} \right), \\ a_{lr} &= \left(\left\langle F_0''(\psi, v_{1r}) + F_0''(\gamma_r, v_2) + \frac{1}{2} F_0'''(\psi, \psi, \gamma_r) \right\rangle, L_{0l} \right), \end{aligned}$$

где $l, r = 1, \dots, k$, функция $\psi(\tau) = \varphi e^{i\tau} + \varphi^* e^{-i\tau}$, а $v_1, v_2, v_{1r} \in \hat{H}'$:

$$v_1 = T_1^{-1} \Pi' \left[\frac{1}{6} F_0''' \psi^3 + F_0''(\psi, v_2) \right], \quad v_2 = \frac{1}{2} T_1^{-1} \Pi' F_0'' \psi^2, \quad v_{1r} = T_1^{-1} \Pi' F_0''(\psi, \gamma_r).$$

В записи F_0' штрих соответствует дифференцированию по θ , а индекс 0 означает, что производная вычислена в точке (θ_0, λ_0) .

Далее потребуются определители $\Delta = \det \mathcal{A}, \Delta_j = \det \mathcal{A}_j$ ($j = 1, \dots, k+1$). Матрицы $\mathcal{A}_j$ получаются заменой j -й строки матрицы $\mathcal{A}$ на строку $(-\operatorname{Re} G, -Q_1, \dots, -Q_k)$, где

$$\begin{aligned} Q_l &= \left(\left\langle F_0''(\psi, v_3) + F_0''(v_4, v_2) + F_0'_{0\lambda} v_2 + \frac{1}{2} F_0''_{0\lambda} \psi^2 + \frac{1}{2} F_0'''(\psi, \psi, v_4) \right\rangle, L_{0l} \right), \\ G &= (F_0''(\varphi, v_4) + F_0'_{0\lambda} \varphi, \Phi), \quad v_3 = T_1^{-1} \Pi' [F_0''(\psi, v_4) + F_0'_{0\lambda} \psi], \quad v_4 = T_1^{-1} F_0'_{0\lambda}. \end{aligned}$$

Применение метода Ляпунова–Шмидта приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для уравнения (1) с правой частью F , аналитической в окрестности точки (θ_0, λ_0) , где (θ_0, λ_0) – равновесие: $F(\theta_0, \lambda_0) = 0$, и с мультикосимметрией $\mathcal{L}$ выполнены гипотезы Н1)–Н5). Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При малых $\delta = \lambda - \lambda_0$ равновесия уравнения (1) в окрестности точки θ_0 образуют семейство, аналитически зависящее от δ . Точнее, существует аналитическое отображение $s: W_0 \times (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow H: (\beta, \delta) \rightarrow c(\beta, \delta)$ такое, что $F(c(\beta, \delta), \lambda_0 + \delta) = 0$. Здесь W_0 – некоторая окрестность нуля пространства $\mathbb{R}^k$, а величина $\delta_0 > 0$. Иных равновесий при $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ в W_0 нет.

2) Если вектор $F_0''(\varphi, \varphi^*)$ трансверсален подпространству $Y_0 = \operatorname{Lin}\{L_{01}, \dots, L_{0k}\}$, так что нарушается хотя бы одно из равенств

$$(F_0''(\varphi, \varphi^*), L_{0i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

то при малых δ в окрестности θ_0 нет малых предельных циклов.

3) Пусть выполнены равенства (2) и неравенство $\Delta_1 \neq 0$. Тогда λ_0 есть точка ответвления цикла. При этом имеются лишь две возможности: либо ответвляется единственный нормальный цикл (частота ω при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ стремится к ω_0) и эта бифуркация односторонняя, либо при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство периодических решений $\{\theta_s\}$, зависящее аналитически от малого параметра s (θ_s не является равновесием при $s \neq 0$); если при этом $\delta = \lambda - \lambda_0$ достаточно мало, но отлично от 0, то уравнение (1) не имеет малых периодических решений, отличных от равновесных.

4) Пусть выполняется система равенств (2) и справедливы неравенства $\Delta \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0$. Тогда малый предельный цикл, стягивающийся при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ к равновесию θ_0 , существует, единственен, аналитически зависит от параметра $\sqrt{\delta}$ и разлагается в ряд:

$$\theta(t) = \theta_0 + \sqrt{\kappa_0 \delta} \psi(\omega_0 t) + \delta \left(\sum_{j=1}^k \kappa_j \gamma_j + \kappa_0 v_2 + v_4 \right) + \dots,$$

где опущены члены порядка $\delta^{3/2}$ и выше, а $\kappa_l = \Delta_{l+1}/\Delta$ ($l = 0, 1, \dots, k$) – амплитудные коэффициенты. Это решение вещественно либо при малых $\delta > 0$, если $\kappa_0 > 0$, либо при $\delta < 0$, когда $\kappa_0 < 0$.

Частота ω периодического движения аналитически зависит от δ и имеет вид $\omega = \omega_0 + \mu_1 \delta + \dots$, $\mu_1 = \text{Im } G + \kappa_0 \text{Im } g_0 + \dots + \kappa_k \text{Im } g_k$.

2. Метод центрального многообразия. Дополнительно к гипотезам Н1)–Н5) предположим, что λ – векторный параметр, а спектр $\sigma(A_0)$ лежит в замыкании левой полуплоскости.

От уравнения (1) переходим к нормализованной системе уравнений на центральном многообразии (см. [5]), в которой отбрасываем старшие слагаемые. Полученная система обладает вращательной симметрией. Ее $(k+1)$ -мерная факторсистема

$$\dot{x} = \rho(\varepsilon + a_0 + A_1 x + a\rho), \quad \dot{\rho} = \rho(\beta + (\beta_1 + b_1)x + b\rho + b_2 x^2) \quad (3)$$

определена в полупространстве $\rho \geq 0$ пространства (x, ρ) . Здесь $x \in \mathbb{R}^k$, $\rho \in \mathbb{R}$ – переменные; $A_1: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\beta_1, b_1: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ – линейные операторы, $b_2: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ – квадратичная форма; $a_0, a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}$ – коэффициенты, $a, \varepsilon \in \mathbb{R}^k$, $\beta \in \mathbb{R}$, β_1 – малые параметры.

Уравнение $\rho = 0$ задает k -мерное семейство Γ равновесий системы (3). Предельному циклу системы (1) соответствует равновесие (x_0, ρ_0) системы (3) такое, что $\rho_0 > 0$.

Бифуркация областей устойчивости. Согласно принципу линеаризации [9]–[11] равновесие $(x_*, 0)$ системы (3) устойчиво, если его спектр, кроме точки нуль, лежит в левой полуплоскости. Устойчивость равновесия $(x_*, 0)$ понимается как устойчивость по Ляпунову вместе с асимптотической устойчивостью по переменной ρ .

Равновесия, чья устойчивость определяется линейным приближением, образуют устойчивые и неустойчивые области на гиперплоскости Γ . Если $b_1 \neq 0$, то их общая граница деформируется гладко. Устойчивость граничных равновесий изучена в [12].

Пусть теперь $b_1 = 0$, а форма b_2 невырождена. Это случай коразмерности 1. Заменой переменных добиваемся выполнения в системе (3) условия $\beta_1 = 0$.

В этих условиях возможны две бифуркации.

i) **Бифуркация потери устойчивости семейством равновесий.** Квадратичная форма b_2 является положительно (отрицательно) определенной. Когда параметр β , возрастая, проходит через точку 0, на устойчивом (неустойчивом) первоначально семействе равновесий возникает неустойчивая (устойчивая) окрестность точки $x = 0$.

ii) **Седловая бифуркация областей устойчивости.** Форма b_2 знакопеременна. Когда параметр β пересекает нулевое значение, область устойчивости или неустойчивости локально распадается на две компоненты.

Далее рассматриваются различные случаи, связанные с комбинациями выполнения или нарушения равенств: $a_0 = 0$ – условия ответвления предельного цикла – и $b_1 = 0$, необходимого для бифуркаций i) и ii). Для каждого вида вырождения при выполнении условий типичности строится

главная система, являющаяся упрощенной моделью для изучения локальных бифуркаций исходной системы. Она получается уменьшением числа непрерывных параметров системы (3) с помощью замен переменных, обращения времени, выбора базиса на гиперплоскости Γ и отбрасывания несущественных слагаемых.

1) *Случай общего положения.* Предельный цикл не ответвляется, и области устойчивости не бифурцируют: $a_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0$. Главное семейство

$$\dot{x}_1 = \kappa \rho, \quad \dot{x}^{k-1} = \rho(\xi + x_1), \quad \dot{\rho} = \rho x_1,$$

где $\kappa = \pm 1$, $x = (x_1, x^{k-1})$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x^{k-1} = (x_2, x_3, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$, имеет k интегралов: $I_1(x, \rho) = x_1^2 - 2\kappa\rho$, $I_j(x, \rho) = 2\kappa x_j - x_1^2 - 2\xi_j x_1$ ($j = 2, \dots, k$).

2) *Ответвление предельного цикла без бифуркации области устойчивости:* $a_0 = 0$, $b_1 \neq 0$. Рассмотрим главное семейство

$$\dot{x} = \rho(A_1 x + a\rho), \quad \dot{\rho} = \rho(\beta + b^1 x_1) \quad (4)$$

с ненулевыми коэффициентами $b^1 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^k$, малым параметром $\beta \in \mathbb{R}$ и обратимым оператором A_1 таким, что $A_1^{-1}a = (q_1, \dots, q_k)$, $q_1 \neq 0$.

Гиперповерхность $\beta + b^1 x_1 = 0$ отделяет устойчивую часть равновесий семейства Γ от неустойчивой. Равновесие системы (4) $x_* = -\rho_* A_1^{-1}a$, $\rho_* = \beta/(b^1 q_1)$ при $\rho_* > 0$ соответствует циклу системы (1). Значит, точка $\beta = 0$ есть точка ответвления цикла.

3) *Ответвление предельного цикла в случае бифуркации областей устойчивости:* $a_0 = 0$, $b_1 = 0$. Коэффициент $b \neq 0$, а линейный оператор A_1 и форма b_2 невырождены. Заменой переменных обращаем в 0 функционал β_1 . Изучение фазового портрета главного семейства

$$\dot{x} = \rho(\varepsilon + A_1 x), \quad \dot{\rho} = \rho(\beta + b\rho + b_2 x^2)$$

сводится к проведенному выше исследованию устойчивости равновесий семейства $\rho = 0$ (бифуркации i) и ii)) и рассмотрению системы

$$\dot{x} = \varepsilon + A_1 x, \quad \dot{y} = \beta + by + b_2 x^2$$

в полупространстве $y > 0$ пространства (x, y) .

Бифуркация рождения цикла при изменении параметра (β, ε) вдоль некоторой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^{k+1}$ происходит, когда γ пересекает гиперповерхность S : $\beta = -b_2(A_1^{-1}\varepsilon)^2$. Ответвление цикла без запаздывания (т.е. вместе с образованием области неустойчивости) имеет место только тогда, когда форма b_2 знакоопределенна, а кривая γ пересекает S в точке $(0, 0)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдович В. И. // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 22–34.
2. Kurakin L. G., Yudovich V. I. // Chaos. 1997. V. 7. № 3. P. 376–386.
3. Куракин Л. Г., Юдович В. И. // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 3. С. 346–349.
4. Юдович В. И. // ПММ. 1971. Т. 35. № 4. С. 638–655.
5. Арнольд В. И. // УМН. 1972. Т. 27. № 5. С. 5–220.
6. Куракин Л. Г., Юдович В. И. Бифуркация рождения цикла в динамической системе с несколькими косимметриями. Ч. 1 // Деп. ВИНТИ. 1997. № 1074-B97.
7. Куракин Л. Г., Юдович В. И. Бифуркация рождения цикла в динамической системе с несколькими косимметриями. Ч. 2 // Деп. ВИНТИ. 1998. № 150-B98.
8. Юдович В. И. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.
9. Лягунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
10. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
11. Каменков Г. В. Избранные труды. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Т. 2. М.: Наука, 1972.
12. Куракин Л. Г. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 4. С. 572–578.