Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Андрианов, Приближение функций из классов MH_q^r полиномами Хаара, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 323–335

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:15:56

УДК 517

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ MH_q^r ПОЛИНОМАМИ ХААРА

А. В. Андрианов

Статья посвящена приближениям функций с ограниченной смешанной разностью полиномами Хаара. Рассматриваются два разных типа приближений: классическое наилучшее приближение полиномами Хаара с индексами в гиперболических крестах и наилучшее m -членное приближение полиномами Хаара.

Библиография: 7 названий.

Введение. Статья посвящена приближениям функций с ограниченной смешанной разностью полиномами Хаара. Рассматриваются два разных типа приближений: классическое наилучшее приближение полиномами Хаара с индексами в гиперболических крестах и наилучшее m -членное приближение полиномами Хаара. Второй вид приближения интенсивно изучался в течение последних десяти лет. Во многих случаях были получены точные по порядку оценки m -членного приближения тригонометрическими полиномами и разными типами всплесков (см., например, [1]–[3]) для классов Бесова $B_p^r(L_\tau)$ и классов MW_p^r и MH_p^r с ограниченной смешанной производной и разностью. Также возрастает интерес к изучению связи между наилучшим m -членным приближением и экономичными алгоритмами. Некоторые результаты используют глубокие геометрические идеи, а также технику работы с энтропийными числами.

Система Хаара представляет свой интерес, так как является простейшим примером системы всплесков и базисом во многих пространствах. Напомним ее определение.

Пусть D_s , $s \geq 0$, обозначает множество всех двоичных интервалов на отрезке $[0, 1]$ вида $I := [j2^{-s}, (j+1)2^{-s}]$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$. Для вектора $\mathbf{s} := (s_1, \dots, s_d)$ из $\mathbb{N}^d$, $\mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$, определим

$$D_{\mathbf{s}} := \{I = I_1 \times \dots \times I_d, I_j \in D_{s_j}, j = 1, \dots, d\}$$

и $Q_n := \bigcup_{\|\mathbf{s}\|_1 \leq n} D_{\mathbf{s}}$, где $\|\mathbf{s}\|_1 := s_1 + \dots + s_d$.

Положим для $I \in D_s$, $s \geq 0$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s}]$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$,

$$H_I(t) := |I|^{-1/2} \begin{cases} 1, & t \in [j2^{-s}, (j+1/2)2^{-s}), \\ -1, & t \in [(j+1/2)2^{-s}, (j+1)2^{-s}), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

и в d -мерном случае для $I = I_1 \times \cdots \times I_d$ обозначим

$$H_I(\mathbf{x}) := \prod_{j=1}^d H_{I_j}(x_j), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$$

и

$$\delta_s(f) := \sum_{I \in \mathcal{D}_s} (f, H_I) H_I,$$

где $(\cdot, \cdot)$ есть обычное скалярное произведение. Пусть $L_q([0, 1]^d)$ обозначает пространство всех функций f с нормой

$$\|f\|_q := \left(\int_{[0, 1]^d} |f(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

и с соглашением, что пространство L_∞ состоит из непрерывных функций и снабжено обычной равномерной нормой, когда $q = \infty$. Мы не позволяем для удобства в определении $H_I(\mathbf{x}) = H_{I_i}(x_i)$ быть $\chi_{[0, 1]}$, характеристической функцией интервала $[0, 1]$, чтобы система $\{H_I\}_I$ была базисом в пространстве $L_q^\circ := L_q^\circ([0, 1]^d)$ всех функций f из $L_q([0, 1]^d)$ таких, что

$$\int_{[0, 1]} f(\mathbf{x}) dx_i = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1)$$

Мы также будем использовать следующие множества

$$H(Q_n) := \left\{ f = \sum_{I \in Q_n} c_I H_I, \quad c_I \in \mathbb{R} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Мы изучаем приближение полиномами Хаара функций из классов $M\tilde{H}_q^r$, которые определяются следующим образом: пусть $\Delta_{t_j}^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначает оператор взятия l -й симметрической разности с шагом t_j в направлении j -й переменной. Положим

$$\Delta_{\mathbf{t}}^l := \prod_{j=1}^d \Delta_{t_j}^l, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d).$$

Мы говорим, что $f \in M\tilde{H}_q^r$, $r > 0$, $1 \leq q \leq \infty$, если $f \in L_q^\circ$ и для $l = [r] + 1$ имеем

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^l f\|_q \leq \prod_{j=1}^d |t_j|^r.$$

На протяжении всей статьи $A \ll B$ ($A \gg B$) означает, что существует константа $C > 0$, которая может зависеть от d, p и r , такая, что $A \leq CB$ ($CA \geq B$), и $A \asymp B$ означает, что $A \gg B$ и $B \gg A$.

Пусть $E_{H(Q_n)}(f)_p$ обозначает наилучшее приближение функции f полиномами Хаара из $H(Q_n)$ в метрике L_p и пусть $E_{H(Q_n)}(M\tilde{H}_q^r)_p := \sup_{f \in M\tilde{H}_q^r} E_{H(Q_n)}(f)_p$.

Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$

$$E_{H(Q_n)}(M\tilde{H}_q^r)_p \asymp \begin{cases} 2^{-n(r-1/q+1/p)} n^{(d-1)/p}, & \text{если } 1 \leq q < p < \infty, 1/q - 1/p < r < 1, \\ 2^{-rn} n^{(d-1)/2}, & \text{если } 1 < p \leq q < \infty, q \geq 2 \\ \text{или } q = \infty, 1 < p < \infty, 0 < r < 1, \\ 2^{-rn} n^{(d-1)/q}, & \text{если } 1 < p \leq q \leq 2, \\ \text{или } p = q = 1, 0 < r < 1. \end{cases}$$

Чтобы сформулировать теорему 2, напомним, что для заданного множества $\mathcal{D}$ элементов некоторого Банахова пространства B наилучшее m -членное приближение элемента $f \in B$ по отношению к системе $\mathcal{D}$ есть

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_B := \inf \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j g_j \right\|_B, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\inf$ взят по всем элементам $g_j \in \mathcal{D}$ и коэффициентам $c_j, j = 1, \dots, m$.

Беря в качестве $\mathcal{D}$ систему Хаара $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} := \{H_I\}_I$, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $1 \leq q \leq \infty$ и $1 < p < \infty$ и любого $m \geq 2$

$$\sigma_m(M\tilde{H}_q^r, \mathcal{H})_p \asymp m^{-r} (\ln m)^{(d-1)(r+1/2)}, \quad \frac{1}{q} < r < 1.$$

Здесь $\sigma_m(M\tilde{H}_q^r, \mathcal{H})_p := \sup_{f \in M\tilde{H}_q^r} \sigma_m(f, \mathcal{H})_p$ и $\sigma_m(f, \mathcal{H})_p$ обозначает наилучшее m -членное приближение f в $B := L_p$.

Таким образом, сравнивая теоремы 1 и 2, мы видим, что порядки обычного наилучшего и m -членного приближений по системе Хаара совпадают при $1 < p \leq q < \infty$, $q \geq 2$ и $q = \infty, 1 < p < \infty$. Заметим также, что сравнение оценок в теореме 1 с аналогичными оценками, известными для тригонометрической системы (см. [3]), показывает, что с точки зрения линейного приближения полиномами с коэффициентами из гиперболических крестов система Хаара эквивалентна тригонометрической системе. С другой стороны, известно (см. [3]), что справедлива следующая оценка

$$\sigma_m(M\tilde{H}_q^r, \mathcal{T})_p \asymp m^{-(r-1/q+1/p)} (\ln m)^{(d-1)(r-1/q+2/p)},$$

$$1 < q \leq p \leq 2, \quad r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p},$$

где $\mathcal{T}$ обозначает тригонометрическую систему. Сравнивая эту оценку с оценкой в теореме 2, мы видим, что в случае $1 < q \leq p \leq 2$ система Хаара дает лучший порядок наилучшего m -членного приближения.

Заметим, что доказательства теорем 1 и 2 используют идеи, близкие к приведенным в тригонометрическом случае (см. [3]). Заметим также, что утверждения теорем справедливы и для классов $M\tilde{H}_q^r$, определяемых без ограничения (1), как это было сделано в [4]. Доказательства в этом случае будут почти такими же, с очевидными изменениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Доказательства обеих теорем 1 и 2 основаны на следующей лемме.

ЛЕММА 1. Для любой функции $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$,

$$\|\delta_s(f, \cdot)\|_q \leq 2^{d(1/q-1)} \|\Delta_{2^{-(s_1+1)}} \cdots \Delta_{2^{-(s_d+1)}} f(\cdot)\|_q, \quad s \in \mathbb{N}^d. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. При $q = \infty$ неравенство в лемме 1 легко следует из определений системы Хаара и $\delta_s(f)$. Поэтому мы можем предполагать, что $1 \leq q < \infty$. Мы также можем предположить, что $d = 2$, так как в общем случае доказательство будет следовать путем таких же рассуждений с небольшими изменениями.

Заметим, что для любого $I(\mathbf{j}) \in \mathcal{D}_s$, $I(\mathbf{j}) := [j_1 2^{-s_1} (j_1 + 1) 2^{-s_1}] \times [j_2 2^{-s_2} (j_2 + 1) 2^{-s_2}]$, $\mathbf{j} := (j_1, j_2)$, $0 \leq j_i < 2^{s_i}$, $i = 1, 2$,

$$(f, H_{I(\mathbf{j})}) = 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \int_{j_1/2^{s_1}}^{(j_1+1/2)/2^{s_1}} \int_{j_2/2^{s_2}}^{(j_2+1/2)/2^{s_2}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}} f(x, y) dx dy,$$

что влечет

$$\begin{aligned} \delta_s(f, \mathbf{x}) &= \sum_{j_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{j_2=0}^{2^{s_2}-1} 2^{\frac{\|\mathbf{s}\|_1}{2}} \int_{j_1/2^{s_1}}^{(j_1+1/2)/2^{s_1}} \int_{j_2/2^{s_2}}^{(j_2+1/2)/2^{s_2}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}} \\ &\quad \times f(x, y) dx dy H_{I(\mathbf{j})}(x_1, y_1), \end{aligned}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$, и $\|\mathbf{s}\|_1 = s_1 + s_2$, как и раньше.

Следовательно, при $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned} \|\delta_s(f, \cdot)\|_q^q &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{j_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{j_2=0}^{2^{s_2}-1} 2^{\frac{\|\mathbf{s}\|_1}{2}} \int_{j_1/2^{s_1}}^{(j_1+1/2)/2^{s_1}} \int_{j_2/2^{s_2}}^{(j_2+1/2)/2^{s_2}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}} \right. \\ &\quad \times f(x, y) dx dy H_{I(\mathbf{j})}(x_1, y_1) \left. \right|^q dx_1 dy_1 \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{j_2=0}^{2^{s_2}-1} \left| 2^{\frac{\|\mathbf{s}\|_1}{2}} \int_{j_1/2^{s_1}}^{(j_1+1/2)/2^{s_1}} \int_{j_2/2^{s_2}}^{(j_2+1/2)/2^{s_2}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}} \right. \\ &\quad \times f(x, y) dx dy H_{I(\mathbf{j})}(x_1, y_1) \left. \right|^q dx_1 dy_1 \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{j_2=0}^{2^{s_2}-1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1 q} \\ &\quad \times \left(\int_{j_1/2^{s_1}}^{(j_1+1/2)/2^{s_1}} \int_{j_2/2^{s_2}}^{(j_2+1/2)/2^{s_2}} \left| \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}} \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}} f(x, y) \right| dx dy \right)^q \\ &\quad \times \chi_{I(\mathbf{j})}(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \end{aligned}$$

так как все $H_{I(\mathbf{j})}$ из $\mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ имеют непересекающиеся носители. Здесь $\chi_{I(\mathbf{j})}(\mathbf{x})$ обозначает характеристическую функцию параллелепипеда $I(\mathbf{j})$. Используя неравенство Гёльдера, мы можем оценить $\|\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_q^q$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_q^q &\leq 2^{2(1-q)} \sum_{j_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{j_2=0}^{2^{s_2}-1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 \int_{j_1/2^{s_1}}^{(j_1+1/2)/2^{s_1}} \int_{j_2/2^{s_2}}^{(j_2+1/2)/2^{s_2}} \left| \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}}^1 \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}}^1 f(x, y) \right|^q dx dy \\ &\quad \times \chi_{I(\mathbf{j})}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \\ &\leq 2^{2(1-q)} \sum_{j_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{j_2=0}^{2^{s_2}-1} \int_{j_1/2^{s_1}}^{(j_1+1/2)/2^{s_1}} \int_{j_2/2^{s_2}}^{(j_2+1/2)/2^{s_2}} \left| \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}}^1 \right. \\ &\quad \left. \times \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}}^1 f(x, y) \right|^q dx dy, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_0^1 \int_0^1 \chi_{I(\mathbf{j})}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 = 2^{-\|\mathbf{s}\|_1}.$$

Суммирование в последнем интеграле дает

$$\begin{aligned} \|\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_q^q &\leq 2^{2(1-q)} \int_0^1 \int_0^1 \left| \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}}^1 \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}}^1 f(x, y) \right|^q dx dy \\ &= 2^{2(1-q)} \left\| \Delta_{\frac{1}{2^{s_1+1}}}^1 \Delta_{\frac{1}{2^{s_2+1}}}^1 f \right\|_q^q, \end{aligned}$$

что влечет неравенство в лемме 1.

В качестве следствия неравенства (2) мы получаем для любой $f \in M\tilde{H}_q^r$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < r < 1$, следующую оценку

$$\|\delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\|_q \leq 2^{-\|\mathbf{s}\|_1 r} \frac{1}{2^{d(r+1-1/q)}} \quad (3)$$

для любого вектора $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$.

Мы продолжаем доказательство теоремы 1. Докажем сначала оценки сверху. Мы будем приближать $f(\mathbf{x})$ частичными суммами ряда Фурье–Хаара функции f , содержащими члены с индексами в Q_n

$$S_{H(Q_n)}(f) := \sum_{|I| \geq 2^{-n}} (f, H_I) H_I = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \leq n} \delta_{\mathbf{s}}(f).$$

Тогда мы имеем

$$E_{H(Q_n)}(f)_p \leq \|f - S_{H(Q_n)}(f)\|_p = \left\| \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 > n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_p. \quad (4)$$

При $1 \leq q < p < \infty$ мы используем следующее неравенство, справедливое для любой функции $g \in L_p$ (см. [5])

$$\|g\|_p \leq C(p, q, d) \left[\sum_{\mathbf{s}} \left(\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q 2^{(1/q-1/p)\|\mathbf{s}\|_1} \right)^p \right]^{1/p}.$$

Беря $g := f - S_{H(Q_n)}(f)$ и используя (3), мы получаем

$$E_{H(Q_n)}(f)_p \ll \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 > n} 2^{-(r-1/q+1/p)\|\mathbf{s}\|_1} \right)^{1/p} \ll 2^{-(r-1/q+1/p)n} n^{(d-1)/p},$$

что доказывает верхнюю оценку в этом случае.

Другие верхние оценки достаточно из-за вложения доказать для $p = q$. Напомним, что теорема Литтлвуда–Пэли для системы Хаара утверждает (см. [6]), что для любой функции $f \in L_p([0, 1])$, $1 < p < \infty$,

$$C_1(p) \left\| \left(\sum_I |(f, H_I) H_I|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \|f\|_p \leq C_2(p) \left\| \left(\sum_I |(f, H_I) H_I|^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \quad (5)$$

Отметим два простых ее следствия (см., например, [3])

$$\|f\|_p \leq C_3(p) \left(\sum_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^{p^*} \right)^{1/p^*}, \quad 1 < p < \infty, \quad p^* := \min(p, 2), \quad (6)$$

$$\|f\|_p \geq C_4(p) \left(\sum_{\mathbf{s}} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^2 \right)^{1/2}, \quad 1 < p \leq 2. \quad (7)$$

Применение (6) к (4) влечет в силу (3)

$$E_{H(Q_n)}(f)_p \ll \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 > n} 2^{-r\|\mathbf{s}\|_1 p^*} \right)^{1/p^*} \ll 2^{-rn} n^{(d-1)/p^*},$$

что доказывает оценки сверху для $1 < p = q < \infty$. Оценка сверху для $q = \infty$, $1 < p < \infty$, следует из уже доказанных случаев.

При $p = q = 1$ мы получаем из (4), что

$$E_{H(Q_n)}(f)_1 \leq \left\| \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 > n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right\|_1 \leq \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 > n} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_1 \ll 2^{-rn} n^{d-1}.$$

Оценки сверху, таким образом, доказаны.

Чтобы получить оценки снизу в теореме 1, напомним, что для класса функций F его Фурье-поперечник φ_m определяется следующим образом (см. [3])

$$\varphi_m(F, L_p) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m \subset L_\infty} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i \right\|_p,$$

где $\inf$ взят по всем ортонормированным системам $\{u_i\}_{i=1}^m$ из m элементов. Так как мы приближаем функции из $M\tilde{H}_q^r$ частичными суммами соответствующего ряда Фурье–Хаара, легко видеть, пользуясь ограниченностью оператора проектирования на множество $H(Q_n)$ (при $1 < p < \infty$), что

$$\sup_{f \in M\tilde{H}_q^r} E_{H(Q_n)}(f)_p \gg \sup_{f \in M\tilde{H}_q^r} \|f - S_{H(Q_n)}(f)\|_p \geq \varphi_m(M\tilde{H}_q^r, L_p),$$

где $m := \{\text{размерность пространства } H(Q_n)\}$, которое имеет порядок $2^n n^{d-1}$. Следовательно, в этом случае требуемые оценки снизу следуют из оценок снизу Фурье–поперечников φ_m , доказанных в [7]. Рассмотрим теперь случай $p = q = 1$. Определим

$$h_I(\mathbf{x}) := 2^{-n/2} H_I(\mathbf{x}), \quad |I| = 2^{-n}, \quad I(n) := [0, 2^{-n}], \quad I(\mathbf{s}) := \prod_{i=1}^d I(s_i).$$

Рассмотрим функцию

$$g_l(\mathbf{x}) := \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=l} h_{I(\mathbf{s})}(\mathbf{x}).$$

Тогда известно (см. [7]), что $g_l \in H(Q_l)$ и

$$\|g_l\|_\infty \asymp l^{d-1}, \quad \|g - a_{l,k}\|_\infty \leq C(d)(k-l+2)^d$$

для некоторой функции $a_{k,l}$ из ортогонального дополнения к $H(Q_k)$, $k \geq l$. Возьмем для фиксированного $n \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < r < 1$

$$l := n+1, \quad k := l+1 = n+2, \quad f(\mathbf{x}) := \gamma 2^{-(r-1)l} g_l(\mathbf{x}), \quad g(\mathbf{x}) := g_l(\mathbf{x}) - a_{l,k}(\mathbf{x}),$$

где $\gamma = \gamma(d) > 0$ будет выбрана позже. Тогда для любого $\mathbf{s}$, $\|\mathbf{s}\|_1 = n+1$, имеем $\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_1 = \gamma 2^{-(r-1)l} \|\delta_{\mathbf{s}}(g_l)\|_1 = \gamma 2^{-r(n+1)}$. Следовательно, используя неравенство

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^1 f\|_1 \leq \gamma \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n+1} 2^{-(r-1)(n+1)} \|\Delta_{\mathbf{t}}^1 h_I\|_1$$

и очевидную оценку

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^1 h_I\|_1 \leq \gamma C \prod_{i=1}^d \min(2^{-s_i}, |t_i|), \quad C > 0,$$

мы заключаем, что

$$\|\Delta_{\mathbf{t}}^1 f\|_1 \leq \gamma C \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n+1} \prod_{i=1}^d 2^{-r s_i} \min(1, 2^{s_i} |t_i|) \leq \gamma C(d) \prod_{i=1}^d |t_i|^r, \quad C(d) > 0,$$

т.е. $f \in M\tilde{H}_1^r$, $0 < r < 1$, если мы возьмем $\gamma < 1/C(d)$ ($f \in L_q^\circ$ просто по определению системы Хаара). С другой стороны, если t есть любой полином из $H(Q_n)$, то мы получаем, пользуясь ортогональностью g и t , что

$$|(f, g)| = |(f - t, g)| \leq \|f - t\|_1 \|g\|_\infty,$$

что влечет

$$\|f - t\|_1 \geq \frac{|(f, g)|}{\|g\|_\infty} \gg \frac{2^{-(r-1)(n+1)} |(g_l, g_l)|}{3^d} \asymp 2^{-rn} n^{d-1},$$

так как $\|g_l\|_2^2 \asymp 2^{-n} n^{d-1}$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Нам будет удобно использовать следующие обозначения

$$\begin{aligned}\Delta Q_n &:= Q_n \setminus Q_{n-1}, \quad N_n := \#\{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d, \|\mathbf{s}\|_1 = n\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \\ m_n &:= [\#\{\Delta Q_a\} 2^{-\varkappa(n-a)}], \quad n = a+1, \dots, a \in \mathbb{Z}_+, \quad \varkappa > 0,\end{aligned}$$

так что

$$m := \#\{Q_a\} + \sum_{n=a+1}^{\infty} m_n \leq C(\varkappa, d) 2^a a^{d-1}.$$

Рассмотрим следующее представление

$$f = S_{H(Q_a)}(f) + \sum_{n=a+1}^{\infty} \left(\sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} \delta_{\mathbf{s}}(f) \right),$$

где $S_{H(Q_a)}(f)$ есть частичная сумма ряда Фурье–Хаара функции $f \in M\tilde{H}_q^r$, $1 \leq q \leq \infty$, содержащая члены с индексами из Q_a , и рассмотрим следующую процедуру выбора.

Для каждого $\mathbf{s}$, $\|\mathbf{s}\|_1 = n$, берем $[m_n/N_n]$ самых больших коэффициентов среди всех (f, H_I) , $H_I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}$, $\|\mathbf{s}\|_1 = n$.

Мы знаем, что для любой $f \in M\tilde{H}_q^r$ и любого $\mathbf{s}$, $\|\mathbf{s}\|_1 = n$,

$$\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q \ll 2^{-rn}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_q &= \left\| \sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} (f, H_I) H_I \right\|_q = \left(\int_{[0,1]^d} \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} (f, H_I) H_I(\mathbf{x}) \right)^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} \int_{[0,1]^d} |(f, H_I)|^q |H_I(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} |(f, H_I)|^q 2^{-n(1-q/2)} \right)^{1/q},\end{aligned}$$

что влечет

$$2^{-n(1/q-1/2)} \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} |(f, H_I)|^q \right)^{1/q} \ll 2^{-rn}, \quad \|\mathbf{s}\|_1 = n, \quad (8)$$

где сумма содержит 2^n членов. Если мы удалим $[m_n/N_n]$ самых больших коэффициентов из суммы в (8), то каждый из оставшихся коэффициентов будет удовлетворять следующему неравенству

$$|(f, H_I)| \ll 2^{n(-r+1/q-1/2)} \left(\frac{N_n}{m_n} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (9)$$

поскольку $[m_n/N_n]|(f, H_I)|^q \ll 2^{qn(-r+1/q-1/2)}$. Обозначим через $p(\mathbf{x})$ полином, содержащий все удаленные коэффициенты плюс те, что содержатся в сумме $S_{H(Q_a)}(f)$. Тогда для $f - p$ мы получаем по теореме Литтлвуда–Пэли (5) ($1 < p < \infty$), что

$$\begin{aligned} \|f - p\|_p &\asymp \left\| \left(\sum_I |(f - p, H_I)|^2 |H_I|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\ll \left\| \left(\sum_{n=a+1}^{\infty} \sum_{I \in \Delta Q_n} 2^{2n(-r+1/q-1/2)} \frac{n^{\frac{2}{q}(d-1)}}{m_n^{2/q}} H_I^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\asymp \left\| \left(\sum_{n=a+1}^{\infty} 2^{2n(-r+1/q-1/2)} \frac{n^{\frac{2}{q}(d-1)}}{m_n^{2/q}} 2^n \sum_{I \in \Delta Q_n} \chi_I \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\ll \left\| \left(\sum_{n=a+1}^{\infty} 2^{2n(-r+1/q)} \frac{n^{\frac{2}{q}(d-1)}}{m_n^{2/q}} n^{d-1} \chi_{[0,1]^d} \right)^{1/2} \right\|_p \\ &= \left(\sum_{n=a+1}^{\infty} 2^{2n(-r+1/q)} \frac{n^{\frac{2}{q}(d-1)}}{m_n^{2/q}} n^{d-1} \right)^{1/2} \\ &\asymp \left(\sum_{n=a+1}^{\infty} 2^{2n(-r+1/q)} 2^{n\kappa\frac{2}{q} - (\kappa+1)\frac{2a}{q}} a^{-\frac{2}{q}(d-1)} n^{\frac{2}{q}(d-1)} n^{d-1} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

так как $m_n^{2/q} \asymp 2^{-\kappa\frac{2}{q}n} 2^{a(\kappa+1)\frac{2}{q}} a^{\frac{2}{q}(d-1)}$ по определению. Следовательно,

$$\|f - p\|_p \ll 2^{-(\kappa+1)\frac{a}{q} - \frac{1}{q}(d-1)} \left(\sum_{n=a+1}^{\infty} 2^{2n(-r+1/q+\kappa/q)} n^{(2/q+1)(d-1)} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Мы берем $\kappa > 0$ так, чтобы $-r + 1/q + \kappa/q < 0$, что всегда возможно, так как $r > 1/q$. Тогда, суммируя в (10), мы выводим

$$\|f - p\|_p \ll 2^{-(\kappa+1)a/q} a^{-(d-1)/q} \left(2^{2a(-r+1/q+\kappa/q)} a^{(d-1)(2/q+1)} \right)^{1/2} = 2^{-ra} a^{(d-1)/2},$$

и оценка сверху следует при $m \asymp 2^a a^{d-1}$, поскольку p содержит m членов, число которых порядка $2^a a^{d-1}$. Оценка сверху для других значений m следует из уже рассмотренного случая путем стандартных рассуждений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что в доказательстве верхней оценки в теореме 2 можно воспользоваться (6) для $p \geq 2$ с $p^* = 2$ вместо того, чтобы использовать (5).

Сейчас мы получим нижнюю оценку. Доказательство будет основано на использовании так называемых “шляпочных” функций. Определим их для $d = 1$.

Для $I \in D_s$, $s \geq 0$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s}]$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$, положим

$$N_I(t) := \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin I, \\ (t - j2^{-s})2^{s+1}, & \text{если } t \in [j2^{-s}, (j+1/2)2^{-s}], \\ ((j+1)2^{-s} - t)2^{s+1}, & \text{если } t \in [(j+1/2)2^{-s}, (j+1)2^{-s}]. \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие формулы:

$$1) \|N_I\|_q = 2^{s+1} \left[\int_0^{1/2^{s+1}} |t|^q dt + \int_{1/2^{s+1}}^{1/2^s} |2^{-s} - t|^q dt \right]^{1/q} = \frac{1}{(q+1)^{1/q} 2^{s/q}}, \quad I \in D_s;$$

$$2) \text{ для } |J| = |I| \quad (N_I, H_J) = 0;$$

$$3) \text{ для } |J| = 2^{-t} < 2^{-s} = |I|, \quad J \subset I, \quad (N_I, H_J) = \pm 2^{t/2} 2^s / 2^{2t+1}.$$

Теперь рассмотрим d -мерный случай.

Для $I = \prod_{i=1}^d I_i$, $I_i \in D_{s_i}$, $s_i \geq 0$, определим

$$N_I(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^d N_{I_i}(x_i), \quad g(\mathbf{x}) := \sum_{|I|=2^{-n}} N_I(\mathbf{x}).$$

Тогда для любого $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$, $\|\mathbf{s}\|_1 = n$, и любого $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{I \in \mathcal{D}_s} N_I \right\|_q^q &= \int_{[0,1]^d} \sum_{I \in \mathcal{D}_s} N_I^q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2^{\|\mathbf{s}\|_1} \prod_{i=1}^d \int_{[0,1]} N_{I_i}^q(x_i) dx_i \\ &= 2^{\|\mathbf{s}\|_1} \prod_{i=1}^d \frac{1}{q+1} 2^{-s_i} = \frac{1}{(q+1)^d} \end{aligned}$$

по свойству 1) и, таким образом, для любого $1 \leq q \leq \infty$ и любого $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d$, $\|\mathbf{s}\|_1 = n$,

$$\left\| \sum_{I \in \mathcal{D}_s} N_I \right\|_q = \frac{1}{(q+1)^{d/q}}, \quad (11)$$

поскольку при $q = \infty$ равенство (11) очевидно. Легко видеть также, что выполнено следующее равенство

$$\left\| D_{\mathbf{x}}^1 \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_s} N_I(\mathbf{x}) \right) \right\|_q = 2^{\|\mathbf{s}\|_1 + d}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (12)$$

где $D_{\mathbf{x}}^1 = D_{x_1}^1 (\dots (D_{x_d}^1) \dots)$, а D_x^1 — оператор дифференцирования по x . Следовательно, пользуясь оценкой

$$\|\Delta_y^1 h\|_q \leq |y| \|h'\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

имеющей место для любой одномерной кусочно-непрерывно-дифференцируемой функции h , и, используя (11), мы получим из (12), что

$$\left\| \Delta_{\mathbf{t}}^1 \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_s} N_I \right) \right\|_q \leq \prod_{i=1}^d 2 \min \left(2^{s_i+1} |t_i|, \frac{1}{(q+1)^{1/q}} \right). \quad (13)$$

Тогда, если мы положим

$$f(\mathbf{x}) := \gamma 2^{-rn} (g(\mathbf{x}) - \alpha), \quad 0 < r < 1,$$

где $\gamma, \alpha > 0$ – некоторые константы, зависящие от r и d , то из (13) получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\mathbf{t}}^1 f\|_q &\leq \gamma 2^{-rn} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} \left\| \Delta_{\mathbf{t}}^1 \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} N_I \right) \right\|_q \\ &\leq \gamma \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=n} \prod_{i=1}^d 2 \cdot 2^{-rs_i} \min \left(2^{s_i+1} |t_i|, \frac{1}{(q+1)^{1/q}} \right) \\ &\leq \gamma \prod_{i=1}^d \sum_{s_i=0}^{\infty} 2 \cdot 2^{-rs_i} \min \left(2^{s_i+1} |t_i|, \frac{1}{(q+1)^{1/q}} \right) \leq \gamma C(r, d) \prod_{i=1}^d |t_i|^r, \end{aligned}$$

откуда следует, что, выбирая γ так, чтобы $\gamma C(r, d) \leq 1$, и беря α , чтобы $f \in L_q^{\circ}$, мы имеем $f \in M\tilde{H}_q^r$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < r < 1$.

Для вычисления коэффициентов Фурье–Хаара для f нам будет полезна следующая

ЛЕММА 2. Пусть $J = J_1 \times \dots \times J_d$, $J_i \in \mathcal{D}_{t_i}$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, d$, и $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ такие, что $s_{i_0} \geq t_{i_0}$ выполнено для некоторого $1 \leq i_0 \leq d$. Тогда

$$\sum_{I \in \mathcal{D}_{\mathbf{s}}} (N_I, H_J) = 0. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Без ограничения общности мы можем предположить, что $i_0 = 1$, т.е. $s_1 \geq t_1$. Тогда проекция каждого из $2^{\|\mathbf{s}\|_1}$ параллелепипедов из $\mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ на ось x_1 имеет длину $2^{-s_1} \leq 2^{-t_1}$. Рассмотрим множество D всех параллелепипедов из $\mathcal{D}_{\mathbf{s}}$, чьи проекции на ось x_1 лежат в J_1 . Если $s_1 = t_1$, то для любого $I \in D$ $(N_I, H_J) = 0$, так как

$$\begin{aligned} (N_I, H_J) &= \prod_{i=1}^d \int_{[0,1]} N_{I_i}(x_i) H_{J_i}(x_i) dx_i \\ &= \int_{[0,1]} N_{I_1}(x_1) H_{J_1}(x_1) dx_1 \prod_{i=2}^d \int_{[0,1]} N_{I_i}(x_i) H_{J_i}(x_i) dx_i = 0 \end{aligned}$$

по свойству 2).

Пусть теперь $s_1 > t_1$ и $I \in D$. Тогда его проекция на ось x_1 принадлежит правой или левой части J_1 , так как все двоичные одномерные интервалы или не пересекаются, или вложены друг в друга. Так как параллелепипеды из $\mathcal{D}_{\mathbf{s}}$ образуют разбиение $[0, 1]^d$ и все они подобны, мы заключаем, что существует $I' \in D$ такой, что его проекция на ось x_1 принадлежит другой половине J_1 и симметрична проекции I по отношению к гиперплоскости H , проходящей через центр J_1 и параллельной гиперплоскости $Ox_2 \dots x_d$. Из определений N_I , $N_{I'}$ и H_J следует, что $N_I(\mathbf{x})$ и $N_{I'}(\mathbf{x})$ симметричны по отношению к H , в то время как $H_J(\mathbf{x})$ по определению антисимметрична по отношению к той же самой гиперплоскости. Следовательно,

$$\int_{[0,1]^d} N_I(\mathbf{x}) H_J(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{[0,1]^d} N_{I'}(\mathbf{x}) H_J(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (15)$$

Параллелепипеды из D разбивают J , так как они все не пересекаются и принадлежат $\mathcal{D}_s$. Таким образом, для любого $I \in D$ существует $I' \in D$ такой, что выполнено (15). Поэтому, суммируя по всем $I \in D$, мы получим (14) из (15). Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что для любого J , $|J| > 2^{-(n+d)}$, $(f, H_J) = 0$, так как для любого такого J и любого s , $\|s\|_1 = n$, существует i_0 , $1 \leq i_0 \leq d$, удовлетворяющее $s_{i_0} \geq t_{i_0}$.

Вычислим (f, H_J) для J , $|J| = 2^{-(n+d)}$. Если $J \in \mathcal{D}_t$, где по меньшей мере одна компонента t равна 0, то из леммы 2 следует, что $(f, H_J) = 0$. Пусть $t = (t_1, \dots, t_d)$, $\|t\|_1 = n + d$, $t_i > 0$, $i = 1, \dots, d$, и пусть M обозначает множество всех таких векторов. Заметим, что $\#\{M\} \asymp n^{d-1}$. Тогда единственным разбиением $[0, 1]^d$ параллелепипедами из $\mathcal{D}_s$, $\|s\|_1 = n$, для которого $\sum_{I \in D_s} (N_I, H_J) \neq 0$, по лемме 2 является разбиение с $s'_i = t_i - 1$, $i = 1, \dots, d$. Более того, поскольку $s'_i < t_i$, $i = 1, \dots, d$, то J содержится лишь в одном параллелепипеде I^J из $\mathcal{D}_{s'}$, $s' := (s'_1, \dots, s'_d)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (f, H_J) &= \gamma 2^{-rn} (N_{I^J}, H_J) = \gamma 2^{-rn} \prod_{i=1}^d \int_{[0, 1]} N_{I_i^J}(x_i) H_{J_i}(x_i) dx_i \\ &= \pm \gamma 2^{-rn} \prod_{i=1}^d \frac{2^{t_i/2} 2^{s_i}}{2^{2t_i+1}} = \pm \gamma 2^{-n(r+1/2)-5d/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь было использовано свойство 3) для одномерных функций N_I .

Теперь все готово для получения нижней оценки в теореме 2.

Зафиксируем m . Тогда можно выбрать n такое, что $m \asymp 2^n n^{d-1}$ и число элементов во множестве $F_n = \bigcup_{t \in M} \mathcal{D}_t$ больше, чем $4m$. Это всегда возможно, поскольку $\#\{F_n\} \asymp 2^n n^{d-1}$. Пусть T – произвольное множество из m векторов. Рассмотрим множества $T \cap \mathcal{D}_t$, $t \in M$. Тогда множество P векторов t таких, что $t \in M$ и $\#\{T \cap \mathcal{D}_t\} \leq (1/2)\#\{\mathcal{D}_t\}$, содержит как минимум половину всех t из множества M и, следовательно, $\#\{P\} \asymp n^{d-1}$. Пусть p – произвольный полином Хаара с гармониками в T . Тогда соотношение (7) влечет для $1 < p \leq 2$, что

$$\begin{aligned} \|f - p\|_p &\gg \left(\sum_{\|t\|_1 = n+d} \|\delta_t(f - p)\|_p^2 \right)^{1/2} \geq \left(\sum_{t \in P} \|\delta_t(f - p)\|_p^2 \right)^{1/2} \\ &\gg 2^{-n(r+1/2)-5d/2} (2^n n^{d-1})^{1/2} \asymp 2^{-rn} n^{(d-1)/2} \end{aligned}$$

в силу (16) и того, что

$$\left\| \sum_{I \in \mathcal{D}_t} H_I \right\|_p = 2^{\|t\|_1/2}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Пользуясь монотонностью L_p -норм, мы получаем оценки снизу для всех $1 < p < \infty$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит профессора В. Н. Темлякова за поддержку в работе над этой статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] DeVore R., Jawerth B., Popov V. Compression of wavelet decompositions // Amer. J. Math. 1992. V. 114. P. 737–785.
- [2] DeVore R., Temlyakov V. Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. 1995. V. 2. P. 29–48.
- [3] Темляков В. Н. Приближение периодических функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1988. Т. 179. С. 3–109.
- [4] Temlyakov V. Approximation of Periodic Functions. New York: Nova Science Publishers. Inc., 1993.
- [5] Temlyakov V. Some inequalities for multivariate Haar polynomials // East J. Appr. 1995. V. 1. № 1. P. 61–72.
- [6] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. Москва: Наука, 1984.
- [7] Темляков В. Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.

Университет Южной Каролины

Поступило

30.12.97

Исправленный вариант

07.04.99