Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Бердышева, Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 336–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 09:38:23

УДК 517.5

ДВЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Е. Е. Бердышева

Установлена взаимосвязь задачи Логана для функций, преобразование Фурье которых сосредоточено в центрально-симметричном выпуклом замкнутом множестве пространства $\mathbb{R}^m$, имеющих неотрицательные средние значения на $\mathbb{R}^m$, и задачи Черных об оптимальной точке в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ между наилучшим приближением функции классом целых функций экспоненциального типа и первым модулем непрерывности. В ряде случаев обе задачи точно решены.

Библиография: 18 названий.

1. Задача Логана

1.1. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m -мерное вещественное пространство, $\mathbb{T}^m = (-\pi, \pi]^m$ — m -мерный тор, $\mathbb{Z}^m$ — решетка целых чисел из $\mathbb{R}^m$, $xt = x_1 t_1 + \dots + x_m t_m$ — скалярное произведение элементов $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $t = (t_1, \dots, t_m)$ из $\mathbb{R}^m$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$. Условимся в интегралах по пространству $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указывать. Для центрально-симметричного выпуклого замкнутого (ограниченного) тела $U \subset \mathbb{R}^m$ обозначим через $E_m^+(U)$ пространство вещественных функций, заданных и суммируемых на $\mathbb{R}^m$, преобразование Фурье которых

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int f(x) e^{-ixt} dx$$

обращается в нуль вне множества U и неотрицательно в начале координат:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int f(x) dx \geq 0.$$

В первой части работы в качестве множества U мы будем рассматривать чаще всего куб $\Pi^m = [-1, 1]^m$.

Пусть V — еще одно центрально-симметричное выпуклое замкнутое (ограниченное) тело в $\mathbb{R}^m$; порождаемую этим телом норму, а точнее, функционал Минковского тела V

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00518.

мы будем обозначать через $\|\cdot\|_V$. Для класса $\mathcal{Q}$ функций, принимающих вещественные значения на $\mathbb{R}^m$, введем величину

$$\mathcal{T}(\mathcal{Q}) = \mathcal{T}(\mathcal{Q}; V) = \inf\{T(f; V) : f \in \mathcal{Q}, f \not\equiv 0\}, \quad (1.1)$$

где

$$T(f) = T(f; V) = \sup\{\|t\|_V : f(t) > 0\}.$$

Одна из основных целей данной работы состоит в изучении величины (1.1) в случае, когда в качестве $\mathcal{Q}$ взят класс $E_m^+(\tau\Pi^m)$.

Наряду с классом $E_m^+(U)$ задача (1.1) будет рассматриваться в работе еще на нескольких родственных классах функций. Все эти классы будут принадлежать пространству $\mathcal{E}_m(U)$ функций, преобразование Фурье которых сосредоточено во множестве U . Точнее, обозначим через $\mathcal{E}_m(U)$ множество вещественных функций на $\mathbb{R}^m$, представимых в виде

$$f(x) = \int_U e^{ixt} d\psi(t), \quad (1.2)$$

где ψ – (комплексная, конечная) мера Лебега на множестве U ; такие функции можно записать также в виде

$$f(x) = \int_U \cos xt d\psi_c(t) + \int_U \sin xt d\psi_s(t), \quad (1.3)$$

где ψ_c и ψ_s есть вещественные конечные меры Лебега на $[0, \tau]^m$.

Следуя Логану [1], введем класс $\mathcal{L}_m^+(U)$ (четных) вещественных функций $f \in \mathcal{E}_m^+(U)$, представимых в виде $f(x) = \int_U \cos xt d\psi_c(t)$, где ψ_c – вещественная конечная мера Лебега на множестве U , неотрицательная в некоторой окрестности нуля.

Введем более узкий класс $\mathcal{C}_m^+(U)$ четных функций $f \in E_m^+(U)$, преобразование Фурье которых неотрицательно на всем множестве U . Класс $\mathcal{C}_m^+(U)$ состоит из суммируемых функций f , представимых в виде $f(x) = \int_U \cos xt \varphi(t) dt$, где вещественная функция φ непрерывна и неотрицательна на множестве U и обращается в нуль на границе U .

Определим, наконец, еще один класс функций $\mathcal{E}_m^+(U)$, который будет содержать уже введенные классы $E_m^+(U)$, $\mathcal{L}_m^+(U)$ и $\mathcal{C}_m^+(U)$.

Пусть Φ – измеримая ограниченная функция на $\mathbb{R}^m$, непрерывная в нуле и принимающая в нуле значение, равное единице; такая функция будет интерпретироваться ниже как ядро метода суммирования. Семейство функционалов $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Phi(\varepsilon x) dx$ называют Φ -методом. Если для функции f существует предел l интегралов $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Phi(\varepsilon x) dx$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, то говорят, что интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx$ суммируется Φ -методом к числу l .

В пространстве $\mathcal{E}_m(U)$ выделим подмножество $\mathcal{E}_m^+(U)$ функций f , для каждой из которых существует (свой) метод суммирования с вещественным неотрицательным ядром Φ такой, что

$$0 \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \int f(x)\Phi(\varepsilon x) dx \leq +\infty. \quad (1.4)$$

Если условие (1.4) для метода Φ и функции $f \in \mathcal{E}_m(U)$ нарушено, то оно, очевидно, будет выполнено для функции $-f$ и того же метода Φ . Следовательно, относительно любой функции $f \in \mathcal{E}_m(U)$ можно утверждать, что, по крайней мере, одна из функций $\pm f$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_m^+(U)$. Класс $\mathcal{E}_m^+(U)$, очевидно, содержит все функции $f \in$

$\mathcal{E}_m(U)$, интегралы от которых суммируются каким-либо Φ -методом с неотрицательным ядром к неотрицательному числу. В частности, имеет место вложение $E_m^+(U) \subseteq \mathcal{E}_m^+(U)$.

Допустим, что функция Φ есть преобразование Фурье функции ϕ , причем обе функции ϕ и $\Phi = \hat{\phi}$ суммируемы и, как следствие, непрерывны на $\mathbb{R}^m$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{E}_m(U)$ при любом $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\int f(x) \Phi(\varepsilon x) dx = \frac{1}{(2\pi)^m} \int \phi_\varepsilon(t) d\psi(t), \quad (1.5)$$

где $\phi_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon^m) \phi(t/\varepsilon)$. Дополнительно предположим, что функции ϕ , Φ вещественные, неотрицательные, четные на $\mathbb{R}^m$, функция ϕ имеет компактный носитель и выполняется равенство $\Phi(0) = 1$. Этим ограничениям удовлетворяет, к примеру, функция

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, \dots, x_m) = \left(\frac{\sin x_1}{x_1} \right)^2 \dots \left(\frac{\sin x_m}{x_m} \right)^2,$$

являющаяся преобразованием Фурье произведения m одномерных ядер Фейера. Если мера ψ в представлении (1.2) функции $f \in \mathcal{E}_m(U)$ или, более обще, мера ψ_c в представлении (1.3), являющаяся четной составляющей вещественной части меры ψ , неотрицательны в некоторой окрестности нуля, то при сделанных предположениях правая часть (1.5) будет неотрицательной при достаточно малом ε , поэтому такие функции f принадлежат множеству $\mathcal{E}_m^+(U)$. В частности, $\mathcal{L}_m^+(U) \subset \mathcal{E}_m^+(U)$.

Для введенных выше классов, как уже было сказано, имеют место вложения

$$\mathcal{C}_m^+(U) \subseteq E_m^+(U) \subseteq \mathcal{E}_m^+(U), \quad \mathcal{C}_m^+(U) \subseteq \mathcal{L}_m^+(U) \subseteq \mathcal{E}_m^+(U).$$

1.2. В случае $m = 1$ задача (1.1) была поставлена и решена Б. Логаном [1] на классе $\mathcal{L}_1^+(\tau\Pi)$, $\Pi = [-1, 1]$. Логан показал, что

$$\mathcal{T}(\mathcal{L}_1^+(\tau\Pi); \Pi) = \frac{\pi}{\tau}, \quad (1.6)$$

и экстремальной является функция

$$f_\tau(x) = \frac{(\cos \frac{\tau x}{2})^2}{\pi^2 - (\tau x)^2} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau \sin \frac{\pi}{\tau} t \cos xt dt. \quad (1.7)$$

В связи с этим результатом мы будем называть в дальнейшем задачу вычисления величины (1.1) для классов целых функций одного и нескольких переменных *задачей Логана*.

Задача Логана тесно связана с задачей о точном неравенстве Джексона между наилучшим приближением функции целыми функциями экспоненциального типа или тригонометрическими полиномами и модулем непрерывности функции в пространствах $L_2(\mathbb{R}^m)$ и $L_2(\mathbb{T}^m)$ соответственно (см. [2]–[5], а также вторую часть данной работы). В частности, Н. И. Черных [2], [3], [5] фактически решил (ранее Б. Логана) задачу (1.1) для класса $\mathcal{C}_1^+(\tau\Pi)$. Он показал, что

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}_1^+(\tau\Pi); \Pi) = \frac{\pi}{\tau}, \quad (1.8)$$

и экстремальной является именно функция (1.7).

В одномерном случае имеются следующие два результата А.Г. Бабенко [6] и автора [7], близкие к результатам Логана (1.6) и Черных (1.8). Пусть $\mathcal{P}_n^0$ – множество вещественных тригонометрических полиномов степени n с нулевым средним значением на периоде. Бабенко [6] нашел наименьшее значение меры $\mu(t) = \text{mes}\{x \in \mathbb{T} : t(x) \geq 0\}$ множества неотрицательности полиномов $t \in \mathcal{P}_n^0$. А именно, он показал, что $\inf\{\mu(t) : t \in \mathcal{P}_n^0\} = 2\pi/(n+1)$ и нижняя грань достигается на полиноме

$$t_n(x) = \frac{\left(\cos \frac{n+1}{2}x\right)^2}{\cos x - \cos \frac{\pi}{n+1}}.$$

Аналогичный результат для пространства целых функций экспоненциального типа с неотрицательным средним значением на оси был получен автором [7]. А именно, имеют место равенства

$$\inf_{f \in E_1^+(\tau\Pi)} \text{mes}\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} = \inf_{f \in \mathcal{E}_1^+(\tau\Pi)} \text{mes}\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} = \frac{\pi}{\tau},$$

и нижняя грань достигается на функции (1.7). Как нетрудно понять, этот результат влечет (1.6) и (1.8).

1.3. Положим

$$\zeta(V) = \min\{\|x\|_V : x \in \mathbb{K}^m\}, \quad (1.9)$$

где $\mathbb{K}^m$ есть множество точек $x = (2k_1 + 1, \dots, 2k_m + 1)$, $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$, координаты которых являются целыми нечетными числами. Введем еще одну характеристику множества V

$$\eta(V) = \max\{\|x\|_V : |x| = \sqrt{m}\}. \quad (1.10)$$

Число $\eta = \eta(V)$ является наименьшим положительным числом с тем свойством, что евклидов шар $\mathcal{B}_m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq \sqrt{m}\}$ радиуса $\sqrt{m}$ содержится во множестве ηV . Допустимые множества (1.9) и (1.10), т.е. решетка $\mathbb{K}^m$ и евклидов шар $\mathcal{B}_m$, пересекаются по множеству Σ точек, каждая координата которых есть ± 1 . Будем говорить, что множество V удовлетворяет Σ -условию, если наибольшее значение в (1.10) достигается на каждой точке $s \in \Sigma$. Очевидно, Σ -условие означает, что все точки множества Σ являются общими точками границ шара $\mathcal{B}_m$ и множества ηV , $\eta = \eta(V)$. Ниже в лемме 4 будет показано, что Σ -условие, на самом деле, эквивалентно тому, что имеет место равенство $\zeta(V) = \eta(V)$. Таким образом, в этом случае,

$$\zeta(V) = \eta(V) = \|e\|_V, \quad e = (1, 1, \dots, 1).$$

Основным результатом первой части работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого центрально-симметричного выпуклого замкнутого тела V при любом $\tau > 0$ имеют место соотношения*

$$\frac{\pi\zeta(V)}{\tau} \leq \mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(\tau\Pi^m); V) = \mathcal{T}(E_m^+(\tau\Pi^m); V) \leq \mathcal{T}(C_m^+(\tau\Pi^m); V) \leq \frac{\pi\eta(V)}{\tau}.$$

Если множество V удовлетворяет Σ -условию, то выполняются равенства

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(\tau\Pi^m); V) = \mathcal{T}(E_m^+(\tau\Pi^m); V) = \mathcal{T}(C_m^+(\tau\Pi^m); V) = \frac{\pi\|e\|_V}{\tau}.$$

1.4. В этом пункте мы докажем утверждение, которое будет существенно использоваться несколько раз в первой и второй частях работы.

ЛЕММА 1. *Допустим, что функция f удовлетворяет условиям:*

1) *она представима в виде*

$$f(x) = \int e^{ixt} d\psi(t),$$

где ψ — (комплексная, конечная) мера Лебега на $\mathbb{R}^m$;

2) *всюду на $\mathbb{R}^m$ функция f принимает вещественные значения;*

3) *существует метод суммирования с неотрицательным ядром Φ такой, что*

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \int f(x) \Phi(\varepsilon x) dx > -\infty;$$

4) *мера множества, на котором f принимает положительные значения, конечна.*

Тогда f суммируема на $\mathbb{R}^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведенное ниже доказательство во многом повторяет доказательство в [7] и использует идеи работы [1]. Функция f ограничена на $\mathbb{R}^m$ вариацией меры ψ из представления (1.2), т.е. константой $M(f) = \int_{\mathbb{R}^m} |d\psi(t)|$. Через $M(\Phi)$ обозначим константу, ограничивающую функцию Φ . Введем множества $F^+ = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) > 0\}$ и $F^- = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \leq 0\}$; в силу четвертого предположения леммы мера $\text{mes}(F^+)$ множества F^+ конечна. Интегралы $l(\varepsilon, \Phi) = \int f(x) \Phi(\varepsilon x) dx$ можно преобразовать и оценить следующим образом

$$\begin{aligned} l(\varepsilon, \Phi) &= \int_{F^+} f(x) \Phi(\varepsilon x) dx + \int_{F^-} f(x) \Phi(\varepsilon x) dx \\ &= \int_{F^+} |f(x)| \Phi(\varepsilon x) dx - \int_{F^-} |f(x)| \Phi(\varepsilon x) dx \\ &\leq \int_{F^+} |f(x)| \Phi(\varepsilon x) dx \leq M(f) M(\Phi) \text{mes}(F^+). \end{aligned}$$

В силу этого

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} l(\varepsilon, \Phi) < +\infty. \quad (1.11)$$

Далее, имеем

$$\int_{F^-} |f(x)| \Phi(\varepsilon x) dx = \int_{F^+} |f(x)| \Phi(\varepsilon x) dx - l(\varepsilon, \Phi) \leq M(f) M(\Phi) \text{mes}(F^+) - l(\varepsilon, \Phi),$$

что дает оценку

$$\int |f(x)| \Phi(\varepsilon x) dx \leq 2M(f) M(\Phi) \text{mes}(F^+) - l(\varepsilon, \Phi).$$

Функция Φ непрерывна в нуле и $\Phi(0) = 1$, поэтому существует $a > 0$ такое, что $\Phi(x) \geq 1/2$ при $|x| \leq a$. Тогда

$$\frac{1}{2} \int_{|x| \leq a/\varepsilon} |f(x)| dx \leq \int |f(x)| \Phi(\varepsilon x) dx \leq 2M(f) M(\Phi) \text{mes}(F^+) - l(\varepsilon, \Phi). \quad (1.12)$$

В силу третьего предположения леммы и (1.11) найдется последовательность $\varepsilon_n \rightarrow +0$ такая, что существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\varepsilon_n, \Phi)$. Устремляя в соотношении (1.12) ε к нулю по последовательности ε_n , заключаем, что f абсолютно интегрируема на оси. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(U); V) = \mathcal{T}(E_m^+(U); V). \quad (1.13)$$

Действительно, вложение $E_m^+(U) \subseteq \mathcal{E}_m^+(U)$ влечет неравенство $\mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(U); V) \leq \mathcal{T}(E_m^+(U); V)$. С другой стороны, в силу только что доказанной леммы любая функция $f \in \mathcal{E}_m^+(U)$ со свойством $T(f) < \infty$ принадлежит классу $E_m^+(U)$. Следовательно, справедливо обратное неравенство, а значит, и равенство (1.13).

1.5. Оценка снизу. Нетрудно проверить, что имеет место соотношение

$$\mathcal{T}(E_m^+(\tau U); V) = \frac{\mathcal{T}(E_m^+(U); V)}{\tau}.$$

Поэтому доказательство теоремы достаточно провести для значения $\tau = 1$.

ЛЕММА 2. *Имеет место неравенство*

$$\mathcal{T}(E_m^+(\Pi^m); V) \geq \pi \zeta(V). \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in E_m^+(\Pi^m)$ и $f \not\equiv 0$. Зафиксируем вектор $s = (s_1, \dots, s_m)$, компоненты которого удовлетворяют ограничениям $0 < s_j \leq 2\pi$. Введем обозначение

$$S = \left[-\frac{s_1}{2}, \frac{s_1}{2}\right] \times \dots \times \left[-\frac{s_m}{2}, \frac{s_m}{2}\right].$$

Рассмотрим S -периодизацию функции f :

$$g_S(x) = \sum_{k=(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m} f(x_1 + s_1 k_1, \dots, x_m + s_m k_m), \quad x \in S. \quad (1.15)$$

Подобные конструкции часто используются в математике (см., например, [8, гл. VII, § 2]). Стандартными методами можно показать, что ряд (1.15) сходится (абсолютно) в пространстве $L_1(S)$, и его сумма g_S суммируема на S . В силу неравенства Бернштейна для целых функций в пространстве $L_1(\mathbb{R}^m)$ (см., например, [9, 3.2]) это же можно сказать и про периодизацию любой частной производной $\partial^l f / (\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l})$ функции f порядка $l \geq 1$. Вследствие вложения $W_1^l(S) \rightarrow C(S)$, $l > m$ (см., например, [10, гл. X, § 3]), ряд (1.15) сходится на S равномерно, и его сумма g_S является непрерывной функцией.

Сопоставим функции g_S ее ряд Фурье

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^m} c_l \exp \left\{ i \left(\frac{2\pi}{s_1} l_1 x_1 + \dots + \frac{2\pi}{s_m} l_m x_m \right) \right\}.$$

Для коэффициентов Фурье функции g_S справедлива формула

$$c_l = \frac{(2\pi)^m}{s_1 \dots s_m} \hat{f} \left(\frac{2\pi}{s_1} l_1, \dots, \frac{2\pi}{s_m} l_m \right).$$

Так как $\hat{f}$ обращается в нуль вне куба Π^m , то все коэффициенты Фурье функции g_S , кроме c_0 , равны нулю. Таким образом,

$$g_S(x) \equiv \frac{(2\pi)^m}{s_1 \dots s_m} \hat{f}(0) \geq 0.$$

Следуя работам [1], [11], возьмем $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $0 < \sigma_j \leq \pi$. В формуле (1.15) положим $x_j = \sigma_j$ и $s_j = 2\sigma_j$. Из приведенных только что рассуждений следует, что для $\sigma \in (0, \pi]^m$ имеет место неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} f((2k_1 + 1)\sigma_1, \dots, (2k_m + 1)\sigma_m) \geq 0. \quad (1.16)$$

Докажем, что $T(f) \geq \pi\zeta(V)$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $f(x) \leq 0$ при $\|x\|_V \geq \pi\zeta(V)(1 - \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. В пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны; поэтому существуют константы $M_1, M_2 > 0$ такие, что для любого элемента $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место неравенство $M_1|x| \leq \|x\|_V \leq M_2|x|$. В формуле (1.16) возьмем $\sigma = (\pi(1 - \varepsilon_1), \dots, \pi(1 - \varepsilon_m))$, где $0 \leq \varepsilon_j \leq \varepsilon = \min\{1, M_1\delta/M_2\}$. Для таких σ имеем

$$\begin{aligned} \|((2k_1 + 1)\sigma_1, \dots, (2k_m + 1)\sigma_m)\|_V &= \pi\|((2k_1 + 1)(1 - \varepsilon_1), \dots, (2k_m + 1)(1 - \varepsilon_m))\|_V \\ &\geq \pi(\|((2k_1 + 1), \dots, (2k_m + 1))\|_V - \|((2k_1 + 1)\varepsilon_1, \dots, (2k_m + 1)\varepsilon_m)\|_V). \end{aligned}$$

Оценим $\|((2k_1 + 1)\varepsilon_1, \dots, (2k_m + 1)\varepsilon_m)\|_V$, воспользовавшись эквивалентностью норм $\|\cdot\|_V$ и $|\cdot|$,

$$\begin{aligned} \|((2k_1 + 1)\varepsilon_1, \dots, (2k_m + 1)\varepsilon_m)\|_V &\leq M_2((2k_1 + 1)^2\varepsilon_1^2 + \dots + (2k_m + 1)^2\varepsilon_m^2)^{1/2} \\ &\leq \frac{M_2}{M_1}\varepsilon\|((2k_1 + 1), \dots, (2k_m + 1))\|_V \leq \delta\|((2k_1 + 1), \dots, (2k_m + 1))\|_V. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|((2k_1 + 1)\sigma_1, \dots, (2k_m + 1)\sigma_m)\|_V &\geq \pi(1 - \delta)\|((2k_1 + 1), \dots, (2k_m + 1))\|_V \\ &\geq \pi(1 - \delta)\zeta(V). \end{aligned}$$

Следовательно, все слагаемые в сумме (1.16) неположительны. Но тогда $f(\sigma) = 0$ при $\sigma \in [\pi(1 - \varepsilon), \pi]^m$. При фиксированных $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$ функция $f(x_1, \dots, x_m)$ является целой функцией переменного x_j . Поэтому $f \equiv 0$, что противоречит нашим предположениям. Таким образом, мы заключаем, что для любой функции $f \in E_m^+(\Pi^m)$, $f \not\equiv 0$, имеет место оценка (1.14). Лемма доказана.

1.6. Оценка сверху в теореме 1. В работе В. А. Юдина [4] построена функция из класса $C_m^+(U)$, которая принимает положительные значения внутри евклидова шара некоторого радиуса с центром в нуле и отрицательные значения вне этого шара. Приведем его конструкцию.

Пусть $C = U/2$, ∂C – граница C . Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\Delta u = -\lambda u, \quad u|_{\partial C} = 0, \quad u \in L_2(C), \quad (1.17)$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^m \partial^2 / \partial x_j^2$ – оператор Лапласа. Известно [12, с. 312], что эта задача имеет счетное множество точек спектра $\{\lambda_k(C)\}$ конечной кратности, $0 < \lambda_1(C) < \lambda_2(C) < \dots$. Возьмем первую собственную функцию $u_1 = u_1(C)$, соответствующую первому собственному значению $\lambda_1 = \lambda_1(C)$. Положим $\phi(x) = u_1(x)$, $x \in C$, $\phi(x) = 0$, $x \notin C$. Известно [12, с. 382, 388], что $\phi(x) \geq 0$, $\partial\phi/\partial\nu|_{\partial C} \leq 0$, где $\partial\phi/\partial\nu$ есть производная ϕ по внешней нормали к ∂C . Введем функцию

$$\psi(x) = - \int_{\partial C} \phi(x-u) \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(u) du.$$

Очевидно, что $\psi(x) \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\text{supp } \psi \subseteq 2C = U$. В [4] показано, что преобразование Фурье функции ψ есть

$$f(t) = \hat{\psi}(t) = \left(\int_{\partial C} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x) e^{-ixt} dx \right)^2 \frac{1}{\lambda_1 - |t|^2}. \quad (1.18)$$

Таким образом, $f(t) \geq 0$ при $|t| \leq \sqrt{\lambda_1}$ и $f(t) \leq 0$ при $|t| \geq \sqrt{\lambda_1}$.

Для функции (1.18) выполняются соотношения $f \in \mathcal{C}_m^+(U)$ и $T(f) = (\sqrt{\lambda_1}/\sqrt{m})\eta(V)$. Используя этот результат, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Для произвольных центрально-симметричных выпуклых замкнутых тел U и V имеет место неравенство*

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}_m^+(U); V) \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}} \eta(V),$$

где λ_1 есть первое собственное значение задачи (1.17).

В случае $U = \Pi^m$ первое собственное значение λ_1 равно $\pi^2 m$, и соответствующая собственная функция есть $u_1(x) = \cos \pi x_1 \dots \cos \pi x_m$. В этом случае лемма 3 превращается в следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место неравенство*

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}_m^+(\Pi^m); V) \leq \pi \eta(V).$$

1.7. Завершение доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 4. *Для центрально-симметричного выпуклого замкнутого тела V равенство $\zeta(V) = \eta(V)$ имеет место в том и только том случае, когда множество V удовлетворяет Σ -условию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений (1.9) и (1.10) вытекает, что для любой точки $s \in \Sigma$ справедливы неравенства $\eta(V) \leq \|s\|_V \leq \zeta(V)$. Поэтому равенство $\zeta(V) = \eta(V)$ влечет выполнение Σ -условия для множества V .

Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, что если для всех точек $\theta \in \Sigma$ норма $\|\theta\|_V$ имеет одно и то же значение, которое мы обозначим через r , то для любой точки $x \in \mathbb{K}^m$ имеет место неравенство $\|x\|_V \geq r$. Координаты x_j , $1 \leq j \leq m$, точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ запишем в виде произведений $x_j = (2k_j + 1)\varepsilon_j$, где $k_j \geq 0$, ε_j есть знаки чисел x_j . Рассмотрим точку $\theta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$.

Введем, далее, еще m точек $\theta_k = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, -\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_m)$, $1 \leq k \leq m$. Точки $\theta, \theta_1, \dots, \theta_m$ принадлежат множеству Σ . Легко видеть, что справедливо равенство $\theta = \tau_0 x + \tau_1 \theta_1 + \dots + \tau_m \theta_m$, где

$$\tau_0 = \frac{1}{k_1 + \dots + k_m + 1}, \quad \tau_j = \frac{k_j}{k_1 + \dots + k_m + 1}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Коэффициенты $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$ неотрицательны и в сумме составляют единицу; следовательно, точка θ лежит в выпуклой оболочке точек $x, \theta_1, \dots, \theta_m$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|\theta\|_V \leq \tau_0 \|x\|_V + \tau_1 \|\theta_1\|_V + \dots + \tau_m \|\theta_m\|_V.$$

Поскольку по предположению $\|\theta\|_V = r$, $\|\theta_k\|_V = r$, $1 \leq k \leq m$, отсюда следует неравенство $\|x\|_V \geq r$. Лемма полностью доказана.

Утверждения теоремы 1 вытекают из следствия 1, леммы 2, следствия 2 и леммы 4.

1.8. Легко видеть, что Σ -условие выполняется для единичных шаров $B_p(\mathbb{R}^m)$ пространств $\ell_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p \leq 2$. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(\tau\Pi^m); B_p(\mathbb{R}^m)) &= \mathcal{T}(E_m^+(\tau\Pi^m); B_p(\mathbb{R}^m)) \\ &= \mathcal{T}(\mathcal{C}_m^+(\tau\Pi^m); B_p(\mathbb{R}^m)) = \frac{\pi m^{1/p}}{\tau}. \end{aligned}$$

2. Связь задачи Логана и задачи Черных об оптимальной точке в неравенстве Джексона

2.1. Пусть U и V , как и раньше, есть два центрально-симметричных выпуклых замкнутых (ограниченных) тела в $\mathbb{R}^m$. Через $W(\sigma V)$, $\sigma > 0$, обозначим класс функций из пространства $L_2 = L_2(\mathbb{R}^m)$, преобразование Фурье которых сосредоточено на множестве σV , т.е. класс функций вида

$$g(x) = \int_{\sigma V} \phi(t) e^{ixt} dt, \quad \phi \in L_2.$$

Пусть $f \in L_2$. Наилучшим приближением функции f классом $W(\sigma V)$ в пространстве L_2 называется величина

$$E(f; \sigma V) = \inf\{\|f - g\|_{L_2} : g \in W(\sigma V)\}.$$

С помощью множества U определим модуль непрерывности функции f в точке $\tau > 0$:

$$\omega(f; \tau U) = \sup\{\|f(x+t) - f(x)\|_{L_2} : t \in \tau U\}. \quad (2.1)$$

Исследованная в первой части работы задача Логана имеет непосредственное отношение к неравенству Джексона

$$E(f; \sigma V) \leq K \omega(f; \tau U) \quad (2.2)$$

с наилучшей константой

$$K = K(\sigma V, \tau U) = \sup \left\{ \frac{E(f; \sigma V)}{\omega(f; \tau U)} : f \in L_2, f \neq \text{const} \right\}. \quad (2.3)$$

Вопрос о неравенстве Джексона в различных функциональных пространствах с различными модулями непрерывности имеет богатую историю, за которой мы отсылаем, например, к работе А. Г. Бабенко [13]. Мы же кратко опишем результаты, относящиеся к неравенству Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ для приближений целыми функциями экспоненциального типа и к близкому случаю неравенства Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$ для приближений периодических функций тригонометрическими полиномами.

Первый точный результат в этой области принадлежит Черных. В 1967 году он доказал [2], [3], что

$$E_{n-1}(f) < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(f; \tau), \quad f \neq \text{const}, \quad \tau \geq \frac{\pi}{n}, \quad (2.4)$$

где $E_{n-1}(f)$ есть наилучшее приближение функции $f \in L_2(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами степени не выше $(n-1)$ в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, а $\omega(f; \tau)$ – первый модуль непрерывности функции f . При этом константа $1/\sqrt{2}$ неулучшаема при каждом n . Позднее [5] он доказал, что точку $\tau = \pi/n$ в этом неравенстве нельзя уменьшить без увеличения константы $1/\sqrt{2}$. Неравенство (2.4) было перенесено на случай приближения целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ И. И. Ибрагимовым и Ф. Г. Насибовым [14] и независимо В. Ю. Поповым [15].

В пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$, $m \geq 1$, точное неравенство Джексона получено В. А. Юдиным [4] в 1981 году в случае, когда V есть евклидов единичный шар пространства $\mathbb{R}^m$, а множество U произвольно. Он доказал, что

$$E_R(f) < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega(f; \tau U), \quad f \neq \text{const}, \quad \tau \geq \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{R}, \quad (2.5)$$

где $E_R(f) = \inf \{ \|f - \theta_R\|_{L_2(\mathbb{T}^m)} : \theta_R \in \mathcal{P}_R \}$ есть наилучшее приближение функции f в пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$ множеством $\mathcal{P}_R$ тригонометрических многочленов $\theta_R(x) = \sum_{|\nu| < R} c_\nu e^{i\nu x}$ со спектром в евклидовом шаре радиуса R , а λ_1 есть первое собственное число задачи (1.17), где взято $C = U$. При этом константа $1/\sqrt{2}$ в неравенстве (2.5) неулучшаема. Фактически в [4] получено и соответствующее точное неравенство Джексона для приближения целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$.

В работе А. В. Московского [16] содержится точное неравенство Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ с модулем непрерывности, несколько отличным от (2.1), в случае, когда U и V есть евклидовы единичные шары.

2.2. Перепишем выражение (2.3) наилучшей константы K в неравенстве Джексона (2.2) в терминах преобразований Фурье функций $f \in L_2$. С помощью равенства Парсеваля [8, гл. I, § 2] $\|f\|_{L_2} = (2\pi)^{m/2} \|\hat{f}\|_{L_2}$ нетрудно показать (см., например, [15]), что

$$E^2(f; \sigma V) = (2\pi)^m \int_{t \notin \sigma V} |\hat{f}(t)|^2 dt, \\ \omega^2(f; \tau U) = (2\pi)^m 2 \sup_{u \in \tau U} \int |\hat{f}(t)|^2 (1 - \cos ut) dt.$$

Поэтому

$$K^2(\sigma V, \tau U) = \frac{1}{2} \sup \left\{ \frac{\int_{t \notin \sigma V} \phi(t) dt}{\sup_{u \in \tau U} \int_{t \notin \sigma V} \phi(t)(1 - \cos ut) dt} : \phi \in L_1, \phi \geq 0 \right\}. \quad (2.6)$$

Легко понять, что имеет место соотношение $K(\sigma V, \tau U) = K(V, \sigma \tau U)$, в силу которого можно ограничиться рассмотрением случая $\sigma = 1$.

Пусть

$$K^*(V, U) = \inf \{K(\sigma V, \tau U) : \sigma > 0, \tau > 0\} = \inf \{K(V, \tau U) : \tau > 0\}$$

есть наименьшее значение наилучшей константы $K(\sigma V, \tau U)$ в неравенстве (2.2) по параметрам $\sigma, \tau > 0$. Точку $\theta(V, U)$ будем называть *оптимальной точкой в неравенстве Джексона*, если выполняются следующие два условия:

$$K(V, \tau U) = K^*(V, U) \quad \text{при} \quad \tau \geq \theta(V, U); \quad K(V, \tau U) > K^*(V, U) \quad \text{при} \quad \tau < \theta(V, U).$$

В этом определении мы учли легко проверяемые факты, что точная константа (2.3) в неравенстве Джексона не возрастает по каждому из переменных $\sigma > 0, \tau > 0$ и непрерывна справа по переменному τ .

Как уже отмечалось выше, в случае пространства $L_2(\mathbb{T})$ точное значение оптимальной точки вычислил Черных [2], [3], [5]. Поэтому задачу о вычислении оптимальной точки в неравенстве Джексона будем называть *задачей Черных*.

В 1997 году Московский [16] нашел оптимальную точку в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ с модулем непрерывности, несколько отличающимся от (2.1), в случае, когда U и V есть евклидовы единичные шары.

2.3. Нам удобно вместо константы $K(\sigma V, \tau U)$ изучать ниже величину

$$\Lambda(\tau) = \Lambda(V, \tau U) = \sup \left\{ \frac{\int_{t \notin V} \phi(t) dt}{\sup_{u \in \tau U} \int_{t \notin V} \phi(t)(1 - \cos ut) dt} : \phi \in L_1, \phi \geq 0 \right\}, \quad (2.7)$$

связанную с $K(\sigma V, \tau U)$ в силу (2.6) соотношением

$$2K^2(\sigma V, \tau U) = \Lambda(V, \sigma \tau U). \quad (2.8)$$

Через $M_m^+(\tau U)$ обозначим множество вещественных неотрицательных мер Лебега μ на множестве τU , нормированных условием

$$\mu(\tau U) = \int_{\tau U} d\mu(t) = 1. \quad (2.9)$$

Пусть $F_m^+(\tau U)$ есть класс функций вида

$$f(x) = \int_{\tau U} \cos xt d\mu(t), \quad (2.10)$$

где $\mu \in M_m^+(\tau U)$. Для класса $F_m^+(\tau U)$ определим величину

$$J(\tau) = J(V, \tau U) = \inf_{f \in F_m^+(\tau U)} \sup_{x \notin V} f(x). \quad (2.11)$$

В следующей лемме указаны простейшие свойства величины $J(\tau)$.

ЛЕММА 5. При любом $\tau > 0$ выполняются неравенства $0 \leq J(\tau) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим первое неравенство. Нужно доказать, что $\sup\{f(x) : x \notin V\} \geq 0$ для любой функции $f \in F_m^+(\tau U)$ при произвольном $\tau > 0$. Предположим, что $\sup\{f(x) : x \notin V\} \leq 0$. Тогда в силу леммы 1 функция f суммируема на $\mathbb{R}^m$. Но в этом случае $\sup\{f(x) : x \notin V\} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ и, значит, $\sup\{f(x) : x \notin V\} = 0$.

Для доказательства второго неравенства достаточно привести пример функции f из класса $F_m^+(\tau U)$, для которой $\sup\{f(x) : x \notin V\} < 1$. В случае $\tau U = \Pi^m$ таким примером может служить функция

$$f^*(x) = \frac{1}{2^m} \int_{\Pi^m} \cos xt \, dt = \frac{\sin x_1}{x_1} \frac{\sin x_2}{x_2} \dots \frac{\sin x_m}{x_m}.$$

Для произвольного множества τU можно взять функцию $f(x) = f^*(tx)$, где $t > 0$ выбрано так, чтобы имело место вложение $t\Pi^m \subseteq \tau U$. Лемма доказана.

В следующей лемме с помощью соображений двойственности устанавливается связь между величинами (2.7) и (2.11).

ЛЕММА 6. При любом $\tau > 0$ имеет место равенство

$$\Lambda(\tau) = \frac{1}{1 - J(\tau)} \quad (2.12)$$

и существует функция $\bar{f}_\tau \in F_m^+(\tau U)$, на которой в (2.11) достигается нижняя грань.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для задачи на торе в одномерном случае соотношение двойственности для задачи (2.7) было получено Бабенко [17]; в более общей ситуации это соотношение было получено В. В. Арестовым [18]. Следуя их схеме доказательства, в нашем случае заключаем, что имеет место соотношение

$$\Lambda(V, \tau U) = \frac{1}{\mathcal{J}(V, \tau U)}, \quad \mathcal{J}(V, \tau U) = \sup_{\mu \in M_m^+(\tau U)} \inf_{x \notin V} \int_{\tau U} (1 - \cos xt) \, d\mu(t) \quad (2.13)$$

и существует мера $\bar{\mu}_\tau \in M_m^+(\tau U)$, на которой в (2.13) достигается нижняя грань. Используя (2.9) и (2.10), получаем равенство (2.12). При этом нижняя грань в (2.11) достигается на функции $\bar{f}_\tau(x) = \int_{\tau U} \cos xt \, d\bar{\mu}_\tau(t)$. Лемма доказана.

2.4. В данном пункте устанавливается взаимосвязь между свойствами величин $J(\tau)$ и $\mathcal{T}(\tau) = \mathcal{T}(F_m^+(\tau U); V)$.

Введем класс $\mathcal{F}_m^+(\tau U)$ функций вида (2.10), где μ – вещественная неотрицательная (конечная) мера Лебега на множестве τU . Класс $F_m^+(\tau U)$ есть подкласс класса $\mathcal{F}_m^+(\tau U)$, состоящий из функций, значение которых в нуле есть единица. Поэтому $\mathcal{T}(F_m^+(\tau U); V) = \mathcal{T}(\mathcal{F}_m^+(\tau U); V)$. Для класса $\mathcal{F}_m^+(\tau U)$ имеют место вложения $\mathcal{C}_m^+(\tau U) \subseteq \mathcal{F}_m^+(\tau U) \subseteq \mathcal{E}_m^+(\tau U)$, в силу которых выполняются неравенства

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(\tau U); V) \leq \mathcal{T}(\mathcal{F}_m^+(\tau U); V) \leq \mathcal{T}(\mathcal{C}_m^+(\tau U); V). \quad (2.14)$$

Отметим два простых свойства величины $\mathcal{T}(\tau) = \mathcal{T}(F_m^+(\tau U); V) = \mathcal{T}(\mathcal{F}_m^+(\tau U); V)$:

$$\mathcal{T}(\tau) = \frac{\mathcal{T}(1)}{\tau}, \quad (2.15)$$

$$0 < \mathcal{T}(\tau) < \infty, \quad \tau > 0. \quad (2.16)$$

Соотношение (2.15) легко проверяемо. Соотношение (2.16) достаточно проверить только при $\tau = 1$. Чтобы доказать первое неравенство в (2.16), выберем t столь большим, чтобы имели место вложения $U \subseteq t\Pi^m$ и, следовательно, $\mathcal{F}_m^+(U) \subseteq \mathcal{F}_m^+(t\Pi^m)$. Тогда будут выполняться неравенства

$$\mathcal{T}(1) = \mathcal{T}(\mathcal{F}_m^+(U); V) \geq \mathcal{T}(\mathcal{F}_m^+(t\Pi^m); V) \geq \mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(t\Pi^m); V) \geq \frac{\pi\zeta(V)}{t} > 0.$$

Из второго неравенства в (2.14) и леммы 3 первой части работы вытекает оценка $\mathcal{T}(1) = \mathcal{T}(\mathcal{F}_m^+(U); V) \leq \mathcal{T}(\mathcal{C}_m^+(U); V) < \infty$, завершающая доказательство соотношения (2.16).

ЛЕММА 7. *Равенство $J(\tau) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \geq \mathcal{T}(1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что при $\tau \geq \mathcal{T}(1)$ имеет место равенство $J(\tau) = 0$. Пусть сначала $\tau > \mathcal{T}(1)$. Тогда в силу соотношения (2.15) имеем $\mathcal{T}(\tau) < 1$ и, значит, существует функция $f \in F_m^+(\tau U)$ со свойством $T(f) < 1$. Но для такой функции $\sup \{f(x) : x \notin V\} = 0$; следовательно, $J(\tau) = 0$.

Вследствие соотношения (2.12) величина $J(\tau)$ непрерывна справа по переменному τ вместе с величиной $\Lambda(\tau)$. Поэтому $J(\tau) = 0$ также и при $\tau = \mathcal{T}(1)$.

2) Докажем, что если $J(\tau) = 0$, то $\tau \geq \mathcal{T}(1)$. Пусть $\tilde{f}_\tau$ – экстремальная функция в (2.11). Для этой функции имеем $\sup \{\tilde{f}_\tau(x) : x \notin V\} = 0$; следовательно, $T(\tilde{f}_\tau) \leq 1$ и, тем более, $\mathcal{T}(\tau) \leq 1$. В силу соотношения (2.15) это означает, что $\tau \geq \mathcal{T}(1)$. Лемма доказана.

Леммы 5 и 7 и соотношения (2.8) и (2.12) дают следующую теорему, являющуюся основным утверждением второй части работы.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых двух центрально-симметричных выпуклых замкнутых тел U, V имеют место равенства*

$$K^*(V, U) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta(V, U) = \mathcal{T}(F_m^+(U); V).$$

Отметим некоторые свойства экстремальных функций задачи Логана и задачи (2.11) при $\tau \geq \theta(V, U)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\tau \geq \theta(V, U)$ экстремальная функция $\tilde{f}_\tau \in F_m^+(\tau U)$ задачи (2.11) суммируема и, следовательно, в ее представлении (2.10) мера $\mu = \tilde{\mu}_\tau$ абсолютно непрерывна (на всем пространстве $\mathbb{R}^m$), т.е. $\tilde{f}_\tau \in \mathcal{C}_m^+(\tau U)$.

В самом деле, из доказательства леммы 7 видно, что при $\tau \geq \theta(V, U) = \mathcal{T}(1)$ экстремальная функция $\tilde{f}_\tau$ задачи (2.11) обладает свойством $\sup \{\tilde{f}_\tau(x) : x \notin V\} = 0$. Согласно лемме 1 из этого вытекает, что $\tilde{f}_\tau \in L(\mathbb{R}^m)$. Следовательно, мера $\tilde{\mu}_\tau$, являющаяся преобразованием Фурье функции $\tilde{f}_\tau$, абсолютно непрерывна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\theta = \theta(V, U)$ задача (2.11) и задача Логана для класса $F_m^+(\theta U)$ имеют одну и ту же экстремальную функцию $\bar{f}_\theta \in F_m^+(\theta U)$.

Действительно, пусть $\bar{f}_\theta$ – экстремальная функция в (2.11) при $\theta = \theta(V, U)$. Как мы только что отметили, $\sup \{ \bar{f}_\theta(x) : x \notin V \} = 0$, а потому $T(\bar{f}_\theta) \leq 1$. Однако из второго утверждения теоремы 2 и соотношения (2.15) вытекает, что $T(\theta) = 1$. Следовательно, $\bar{f}_\theta$ является экстремальной функцией также и в задаче Логана для класса $F_m^+(\theta U)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\bar{f}_\theta$ есть экстремальная функция задачи (2.11) и задачи Логана для класса $F_m^+(\theta U)$ при $\theta = \theta(V, U)$. Тогда можно утверждать следующее.

- 1) Функция $\bar{f}_\theta$ будет экстремальной в задаче (2.11) при любом $\tau \geq \theta$.
- 2) Функция f_τ , определенная формулой

$$f_\tau(x) = \bar{f}_\theta\left(\frac{\tau}{\theta}x\right), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

будет экстремальной в задаче Логана для класса $F_m^+(\tau U)$ при $\tau \geq \theta$.

2.5. Соотношения (2.14) содержат неравенства

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_m^+(U); V) \leq \mathcal{T}(F_m^+(U); V) \leq \mathcal{T}(C_m^+(U); V).$$

Взяв здесь в качестве множества U куб Π^m и применив теорему 1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого центрально-симметричного выпуклого замкнутого тела V имеют место неравенства*

$$\pi\zeta(V) \leq \theta(V, \Pi^m) \leq \pi\eta(V).$$

Если же множество V удовлетворяет Σ -условию, то имеет место равенство

$$\theta(V, \Pi^m) = \pi \|e\|_V.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Тогда

$$K^*(B_p(\mathbb{R}^m), \Pi^m) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta(B_p(\mathbb{R}^m), \Pi^m) = \pi m^{1/p}.$$

В заключение я хочу выразить глубокую признательность моему научному руководителю профессору В.В. Арестову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. II. Eventually negative functions // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. № 2. P. 253–257.
- [2] Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1968. Т. 88. С. 71–74.
- [3] Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
- [4] Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 309–315.
- [5] Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2 -approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces. Proc. Conf. Gdan'sk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
- [6] Бабенко А. Г. Об одной экстремальной задаче для полиномов // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 3. С. 349–356.
- [7] Berdysheva E. E. An extremal problem for entire functions of exponential type with non-negative mean value // East J. Approx. 1997. V. 3. № 4. P. 393–402.
- [8] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [9] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [10] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
- [11] Logan B. F. Extremal problems for positive-definite bandlimited functions. I. Eventually positive functions with zero integral // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. № 2. P. 249–252.
- [12] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. Л.: Гостехиздат, 1951.
- [13] Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 333–355.
- [14] Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г. Об оценке наилучшего среднеквадратичного приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 5. С. 1013–1016.
- [15] Попов В. Ю. О наилучших среднеквадратичных приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Матем. 1972. № 6 (399). С. 65–73.
- [16] Московский А. В. Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. матем., мех., информатика. 1997. Т. 3. № 1. С. 44–70.
- [17] Бабенко А. Г. О точной константе Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 651–664.
- [18] Арестов В. В., Попов В. Ю. Неравенства Джексона на сфере в L_2 // Изв. вузов. Матем. 1995. № 8 (399). С. 13–20.

Уральский государственный университет
E-mail: Elena.Berdysheva@usu.ru

Поступило
23.03.98
Исправленный вариант
29.03.99