Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Бродский, О продолжении UV^n -значных отображений, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 351–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:17:51

УДК 515.126.83

О ПРОДОЛЖЕНИИ UV^n -ЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Н. Б. Бродский

Представлен новый способ продолжения полунепрерывных сверху UV^n -значных отображений. Доказано, что для любого полунепрерывного сверху UV^n -значного отображения $\Psi: A \rightarrow Y$ замкнутого подмножества A сепарабельного метрического пространства X в полное, n -связное, локально n -связное метрическое пространство Y , удовлетворяющее свойству дизъюнктивности $(n+1)$ -мерных дисков, существует полунепрерывное сверху UV^n -значное отображение $\Psi': X \rightarrow Y$ такое, что $\Psi'|_A = \Psi$.

Также получены некоторые результаты о n -мягких отображениях.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. В данной статье рассматривается задача продолжения полунепрерывных сверху компактнозначных отображений (необходимые определения можно найти в п. 2). Представлен новый способ продолжения UV^n -значных отображений, а также его применения к изучению n -мягких отображений. Основная идея того, как можно продолжать UV^n -значные отображения, заключена в лемме 5. Эта лемма находит непосредственное применение в п. 3 для доказательства теоремы 1 о делении n -мягкого отображения. В случае n -мягкого отображения метризуемых компактов теорема о делении была объявлена Е. В. Щепиным [1] и доказана в работе [2].

Мягкие в размерности n отображения имеют различные характеристики в терминах многозначных ретракций [3]. Эти характеристики являются параметрическими версиями соответствующих результатов для $AE(n)$ -компактов. Однако, есть результаты об $AE(n)$ -компактах, которые до сих пор не получили распространения на отображения. А. Н. Дранишников в работе [4] охарактеризовал компактные $AE(0)$ - и $AE(1)$ -пространства как абсолютные полунепрерывные сверху компактнозначные и, соответственно, континуумзначные ретракты. Соответствующую теорему для 0-мягких и 1-мягких отображений доказал В. В. Федорчук [3]. Л. В. Широков обобщил результаты Дранишникова на произвольные $AE(n)$ -компакты [5]. Понятие проективно UV^n -значного отображения позволяет дать параметрическую версию результатов Широкова и охарактеризовать n -мягкие отображения как абсолютные проективно UV^n -значные ретракты (теорема 4).

Теорема об однозначной аппроксимации для UV^n -значных отображений широко известна и доказана во многих работах (см., например, [6], [7]). Оказывается, что подобно

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант № 96-01-01166а.

UV^n -значным отображениям проективно UV^n -значные можно аппроксимировать однозначными отображениями (теорема 2).

Наконец, основным результатом п. 5 является теорема 5 о продолжении UV^n -значных отображений.

Отметим, что задача продолжения непрерывных UV^n -значных отображений в гильбертово пространство решена в работе [8], а задача продолжения полунепрерывных сверху UV^n -значных отображений в сепарабельное гильбертово пространство решена в работе [9].

2. Определения и обозначения. Если не оговорено противное, то под отображением мы понимаем непрерывное однозначное отображение. Все топологические пространства считаем нормальными.

Графиком многозначного отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ называется подмножество $\Gamma_\Phi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \Phi(x)\}$ произведения $X \times Y$. Для произвольного множества $\mathcal{U} \subset X \times Y$ обозначим через $\mathcal{U}(x)$ подмножество $\text{pr}_Y(\mathcal{U} \cap (\{x\} \times Y))$ пространства Y (при этом не исключается случай $\mathcal{U}(x) = \emptyset$). Тогда для графика Γ_Φ имеем $\Gamma_\Phi(x) = \Phi(x)$. Многозначное отображение $\Phi: X \rightarrow Y$ называется *полным*, если в некотором G_δ -подмножестве произведения $X \times Y$ замкнуты все множества вида $\{x\} \times \Phi(x)$. Многозначное отображение $\Psi: X \rightarrow Y$ называется *селекцией* многозначного отображения $\Phi: X \rightarrow Y$, если $\Psi(x) \subset \Phi(x)$ для любого $x \in X$.

Будем говорить, что отображение $\phi': Z \rightarrow Y$ (соответственно $\phi': A \rightarrow Y$) является *поднятием* (соответственно *частичным поднятием* на множестве $A \subset Z$) отображения $\phi: Z \rightarrow X$ относительно непрерывного однозначного отображения $f: Y \rightarrow X$, если выполняется соотношение $f \circ \phi' = \phi$ (соответственно $f \circ \phi' = \phi|_A$).

Отображение $f: Y \rightarrow X$ называется (*метрически*) *локально n -мягким*, если для любого отображения $\phi: Z \rightarrow X$ (метризуемого) паракомпакта Z всякое его частичное поднятие на замкнутом множестве $A \subset Z$ продолжается до частичного поднятия $\phi': OA \rightarrow Y$ некоторой окрестности $OA \subset Z$ множества A относительно f . Полагая в этом определении $OA = Z$, мы получим определение (*метрически*) *n -мягкого* отображения. Теперь можно определить $AE(n)$ -компакт как такой компакт, постоянное отображение которого на себя является n -мягким.

Будем называть *n -непрерывным снизу* такое многозначное отображение $\Phi: X \rightarrow Y$, что проектирование его графика $\text{pr}_X: \Gamma_\Phi \rightarrow X$ является локально n -мягким. Тогда 0-непрерывность снизу совпадает с известным свойством полунепрерывности снизу. *Непрерывность* многозначного отображения Φ складывается из его полунепрерывности снизу и полунепрерывности сверху. При этом Φ называется *полунепрерывным сверху*, если для всякого открытого множества $U \subset Y$ множество $\{x \in X \mid \Phi(x) \subset U\}$ открыто в X . Говоря о компактнозначных отображениях, мы всегда будем считать их полунепрерывными сверху.

Скажем, что метрическое пространство Y удовлетворяет *свойству дизъюнктности n -мерных дисков* (кратко, *свойству $DD^n P$*), если для любой пары отображений $f, g: D^n \rightarrow Y$ стандартного n -мерного диска D^n и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие отображения $f', g': D^n \rightarrow Y$, что $\text{dist}(f, f') < \varepsilon$, $\text{dist}(g, g') < \varepsilon$ и $f'(D^n) \cap g'(D^n) = \emptyset$.

Для подмножества A пространства X через $\text{St}(A, \Omega)$ будем обозначать *звезду множества A относительно покрытия Ω пространства X* .

Специального обсуждения заслуживает такое свойство пространства, как аппроксимативная n -связность. Пара пространств (U, V) , в которой V содержится в U , называ-

ется n -связной, если любое отображение сферы размерности $\leq n$ в V гомотопно нулю в U . Включение компакта K в пространство E обладает UV^n -свойством, если всякая окрестность U компакта K в E содержит такую его окрестность V , что пара (U, V) является n -связной. (Будем считать, что UV^{-1} -свойство означает непустоту компакта K .)

Следующая лемма является относительным вариантом леммы 11.1 из [10] и доказывается индукцией по остовам полиэдра N .

ЛЕММА 1. Пусть компакт K содержится в локально n -связном пространстве E , лежащем в банаховом пространстве. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого непрерывного отображения $\psi: (M, N) \rightarrow (O(K, \delta), O(K, \delta) \cap E)$ полиэдральной пары (M, N) размерности $(n + 1)$ существует непрерывное отображение $\psi': M \rightarrow E$, совпадающее с ψ на подполиэдре N и ε -близкое к ψ .

Компакт называется *аппроксимативно n -связным* (сокращенно UV^n -компактом), если он обладает UV^n -свойством в каком-нибудь ANR -пространстве. Независимость UV^n -свойств компакта от вложения в ANR -пространство хорошо известна [11]. Однако нам потребуется независимость UV^n -свойств от вложения в локально n -связное метризуемое пространство.

ЛЕММА 2. Метризуемый компакт K аппроксимативно n -связен тогда и только тогда, когда K является UV^n -компактом в любом метризуемом LC^n -пространстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное метрическое LC^n -пространство E , содержащее K , и его вложение в банахово пространство B .

Пусть K обладает UV^n -свойством в E . Для окрестности U компакта K в B найдем его окрестность W в E такую, чтобы пара $(U \cap E, W)$ была n -связной. Теперь по лемме 1 найдем такую окрестность V компакта K в B , что всякий m -мерный сфероид $s: S^m \rightarrow V$ при $m \leq n$ гомотопен в U сфероиду $s': S^m \rightarrow W$. Тогда стягивание сфероида s определим как композицию гомотопии его в сфероид s' и стягивания s' внутри $U \cap E$.

Пусть K обладает UV^n -свойством в B . Для окрестности U компакта K в E найдем по лемме 1 его окрестность W в B . Пользуясь UV^n -свойством, найдем для W окрестность V' компакта K в B , и положим $V = V' \cap E$. Тогда всякий m -мерный сфероид $s: S^m \rightarrow V$ при $m \leq n$ можно стянуть внутри W , а потом сдвинуть это стягивание в U , оставив неподвижным сам сфероид s .

Мы называем UV^n -значным полунепрерывное сверху многозначное отображение, при котором образы точек являются UV^n -компактами. Непрерывное замкнутое отображение топологических пространств $f: Z \rightarrow X$ называется *совершенным*, если прообраз $f^{-1}(x)$ любой точки $x \in X$ является компактным. Непрерывное совершенное отображение, все слои которого являются UV^n -компактами, называется UV^n -отображением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем полунепрерывное сверху компактнозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ *проективно UV^n -значным*, если существуют пространство $\tilde{Y}$, непрерывное отображение $g: \tilde{Y} \rightarrow Y$ и непрерывное UV^n -отображение $f: \tilde{Y} \rightarrow X$ такие, что

$F = g \circ f^{-1}$. В случае метрических X и Y потребуем метризуемости и от пространства $\tilde{Y}$.

3. О делении n -мягких отображений.

ЛЕММА 3. Пусть UV^n -компакт K содержится в слое $\Phi(x_0)$ многозначного n -непрерывного снизу отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ паракомпакта X в полное метрическое пространство Y . Тогда для любой окрестности $\mathcal{U} \subset X \times Y$ компакта $\{x_0\} \times K$ найдется такая его окрестность $\mathcal{V}$, что пара $(\mathcal{U}(x) \cap \Phi(x), \mathcal{V}(x) \cap \Phi(x))$ является n -связной для любого $x \in \text{pr}_X(\mathcal{V})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку всякое полное метрическое пространство вкладывается в банахово, то мы можем считать Y банаховым пространством. Для данной окрестности $\mathcal{U}$, пользуясь леммой о сдвиге полиэдра из работы [12], можно найти такую окрестность $\mathcal{W}$ компакта $\{x_0\} \times K$, что для всякого $x \in \text{pr}_X(\mathcal{W})$ и любого непрерывного отображения $\psi: (M, N) \rightarrow (\mathcal{W}(x), \mathcal{W}(x) \cap \Phi(x))$ полиэдральной пары (M, N) размерности $(n+1)$ существует непрерывное отображение $\psi': M \rightarrow \mathcal{U}(x) \cap \Phi(x)$, совпадающее с ψ на подполиэдре N . Поскольку K обладает UV^n -свойством в Y , то для окрестности $\mathcal{W}$ можно найти такую окрестность $\mathcal{V}$, что пара $(\mathcal{W}(x), \mathcal{V}(x))$ является n -связной для любого $x \in \text{pr}_X(\mathcal{V})$.

Теперь произвольный сфероид $s: S^n \rightarrow \mathcal{V}(x) \cap \Phi(x)$ мы можем стянуть в точку внутри $\mathcal{W}(x)$, а потом это стягивание сдвинуть во множество $\mathcal{U}(x) \cap \Phi(x)$, оставляя неподвижным сфероид s .

ЛЕММА 4. Пусть на замкнутом подмножестве A паракомпакта X задана UV^n -значная селекция $\Psi: A \rightarrow Y$ многозначного n -непрерывного снизу отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ в полное метрическое пространство Y . Тогда для любой окрестности $\mathcal{U} \subset X \times Y$ графика Γ_Ψ найдется такая окрестность $\mathcal{V}$ этого графика, что пара $(\mathcal{U}(x) \cap \Phi(x), \mathcal{V}(x) \cap \Phi(x))$ является n -связной для любого $x \in \text{pr}_X(\mathcal{V})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем для каждой точки $x \in A$ ее открытую окрестность $O_x \subset X$ и открытую окрестность $O_{\Psi(x)} \subset Y$ множества $\Psi(x)$ так, что $O_x \times O_{\Psi(x)}$ содержится в $\mathcal{U}$. Лемма 3 позволяет найти такие окрестности $V_{\Psi(x)}$ множества $\Psi(x)$ и $U'_x \subset O_x$ точки x , что пара $(O_{\Psi(x)} \cap \Phi(x), V_{\Psi(x)} \cap \Phi(x))$ является n -связной для любого $x' \in U'_x$. Пусть U_x — такая содержащаяся в U'_x окрестность точки x , что $\Psi(U_x) \subset V_{\Psi(x)}$.

Рассмотрим открытую окрестность G множества A , содержащуюся с замыканием во множестве $U = \bigcup_{x \in X} U_x$. Впишем в открытое покрытие $\{U_x\}_{x \in X}$ паракомпакта $\overline{G}$ локально конечное открытое покрытие $\{W_\lambda\}$ и сопоставим каждому W_λ некоторое множество $V_\lambda = V_{\Psi(x)}$ такое, что $W_\lambda \subset U_x$. Звездно впишем в $\{W_\lambda\}$ локально конечное открытое покрытие Ω множества $\overline{G}$. Наконец, определим множество $\mathcal{V} \subset G \times Y$, положив для каждого $x \in G$

$$\mathcal{V}(x) = \bigcap \{V_\lambda \mid \text{St}(x, \Omega) \subset W_\lambda\}.$$

Свойство n -связности пары $(\mathcal{U}(x) \cap \Phi(x), \mathcal{V}(x) \cap \Phi(x))$ очевидно. В силу локальной конечности Ω для любой точки $x \in G$ существует ее окрестность O_x такая, что для любого $x' \in O_x$ выполняется $\text{St}(x, \Omega) \subset \text{St}(x', \Omega)$. Поэтому для любого $x' \in O_x$ выполнено включение $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{V}(x')$, откуда следует открытость множества $\mathcal{V}$.

Следующая лемма представляет ключевую конструкцию для продолжения UV^n -значных отображений.

ЛЕММА 5. Пусть $\Phi: X \rightarrow Y$ полное, n -непрерывное снизу многозначное отображение метрического пространства X в полное метрическое пространство Y . И пусть на замкнутом множестве $A \subset X$ задана UV^{n-1} -значная селекция $\Psi: A \rightarrow Y$ отображения Φ , причем $\dim(X \setminus A) \leq n$. Тогда существует UV^{n-1} -значная селекция $\Psi': OA \rightarrow Y$ отображения Φ , определенная на некоторой окрестности OA множества A , которая однозначна и непрерывна на множестве $OA \setminus A$ и совпадает с Ψ при ограничении на A .

Если Φ – постоянное отображение (т.е. $\Phi(x) = Y$ для любого $x \in X$), то условия полноты отображения Φ и пространства Y можно опустить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 4, построим последовательность $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^\infty$ открытых в произведении $X \times Y$ окрестностей графика Γ_Ψ , для которой $\mathcal{U}_0 = X \times Y$ и пара $(\mathcal{U}_i(x) \cap \Phi(x), \mathcal{U}_{i+1}(x) \cap \Phi(x))$ является $(n-1)$ -связной для любых $x \in X$ и $i \geq 0$. Мы будем считать, что для любого $i \geq 1$ множество $\mathcal{U}_i$ содержится в $\mathcal{U}_{i-1}$ и в $(1/2^i)$ -окрестности графика Γ_Ψ .

Выберем последовательность $\{F_k\}_{k=n}^\infty$ замкнутых окрестностей множества A таких, что $F_k \subset \text{pr}_X(\mathcal{U}_k)$ и $F_{k+1} \subset \text{Int}(F_k)$ для любого $k \geq n$. Положим $OA = F_n$. Определим многозначные отображения $\{\Phi_m: F_n \setminus A \rightarrow Y\}_{m=0}^n$, положив $\Phi_m(x) = \mathcal{U}_{k-m}(x) \cap \Phi(x)$, если $x \in F_k \setminus F_{k+1}$. Применяя к этим отображениям фильтрационную теорему селекции из работы [12] (в случае постоянного отображения Φ – селекционную теорему 1.1 из [13]), мы получим непрерывную однозначную селекцию $\phi: F_n \setminus A \rightarrow Y$ отображения Φ_n . Доопределив Ψ отображением ϕ на множестве $F_n \setminus A$, мы получим искомое отображение Ψ' . Полунепрерывность сверху Ψ' в точках множества A следует из того, что график отображения ϕ над множеством $F_k \setminus A$ содержится в $\mathcal{U}_{k-n}$ и, следовательно, в $(1/2^{k-n})$ -окрестности графика Γ_Ψ .

В случае постоянного многозначного отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ условие n -непрерывности снизу Φ эквивалентно условию локальной n -связности образа $\Phi(x)$. В этом случае лемма 5 приобретает следующий вид.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – замкнутое подмножество метрического пространства X такое, что $\dim(X \setminus A) \leq n+1$. Тогда всякое UV^n -значное отображение $\Psi: A \rightarrow Y$ в локально n -связное метрическое пространство Y продолжается на некоторую окрестность OA множества A до UV^n -значного отображения $\Psi': OA \rightarrow Y$, которое однозначно и непрерывно на множестве $OA \setminus A$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Gamma_\Phi \subset X \times Y$ – график полного многозначного отображения $\Phi: X \rightarrow Y$ паракомпакта X в полное метрическое пространство Y . Пусть проекция $\text{pr}_X: \Gamma_\Phi \rightarrow X$ является (локально) n -мягкой и представляется в виде композиции $\text{pr}_X = f \circ g$ UV^{n-1} -отображения g и непрерывного отображения f . Тогда f метрически (локально) n -мягко.

Если, кроме того, пространство X метризуемо полной метрикой, то f будет (локально) n -мягким.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через E пространство $g(\Gamma_\Phi)$. Фиксируем произвольное отображение $\varphi: Z \rightarrow X$ метрического пространства Z размерности $\dim Z \leq n$ и его частичное поднятие $\psi: A \rightarrow E$ на замкнутом подмножестве $A \subset Z$ относительно f .

Рассмотрим полное многозначное отображение $\Phi \circ \varphi: Z \rightarrow Y$ и UV^n -значную селекцию этого отображения $\Psi = \text{pr}_Y \circ g^{-1} \circ \psi: A \rightarrow Y$. По лемме 5 на некоторой окрестности OA множества A определена полунепрерывная сверху многозначная селекция $\Psi': OA \rightarrow Y$ отображения $\Phi \circ \phi$, которая однозначна и непрерывна на множестве $OA \setminus A$ и совпадает с Ψ при ограничении на A . Очевидно, если проекция pr_X является n -мягкой, то мы можем положить $OA = Z$. Тогда композиция отображения $\varphi \times \Psi': OA \rightarrow \Gamma_\Phi$ и отображения g дает однозначное полунепрерывное сверху (и следовательно, непрерывное) отображение $\psi': OA \rightarrow E$, продолжающее ψ и являющееся поднятием φ относительно f .

Если X метризуемо полной метрикой, то произведение $X \times Y$ можно считать полным метрическим пространством. Продолжим отображение g гомеоморфизмом на $X \times Y$ до отображения $g': X \times Y \rightarrow E'$. Легко видеть, что $f^{-1}: X \rightarrow E \subset E'$ является полным многозначным отображением в полное метрическое пространство E' . По теореме Майкла [10] метрическая n -мягкость отображения f влечет его n -мягкость.

Следующий пример показывает, что для паракомпактного X отображение f из теоремы 1, вообще говоря, не будет n -мягким. Даже в результате такого простого преобразования n -мягкого отображения, как факторизация одного из слоев по отрезку, можно получить отображение, не являющееся n -мягким.

ПРИМЕР. Пусть $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{a_k\}$ – последовательность точек, сходящаяся к точке a_0 . Положим $X = K \times (S \cup \{a_0\})$, где K нульмерный компакт, не имеющий счетной базы окрестностей в некоторой своей точке x_0 . Пусть $\Gamma_\Phi = X \times I$ график постоянного многозначного отображения $\Phi: X \rightarrow I$ в единичный отрезок. Представим проекцию $\text{pr}_X: \Gamma_\Phi \rightarrow X$ в виде композиции $f \circ g$, где $g: X \times I \rightarrow E$ факторотображение по отрезку $(\{x_0\} \times \{a_0\}) \times I$.

Предположим, что отображение f является 0-мягким. Зададим частичное поднятие $h: \{x_0\} \times (S \cup \{a_0\}) \rightarrow E$ тождественного отображения id_X равенством

$$h(\{x_0\} \times \{a_k\}) = \begin{cases} g^{-1}(\{x_0\} \times \{a_0\}), & \text{если } k = 0, \\ g(\{x_0\} \times \{a_k\} \times \{1\}), & \text{если } k \text{ четно,} \\ g(\{x_0\} \times \{a_k\} \times \{0\}), & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В силу 0-мягкости f существует поднятие $h': X \rightarrow E$ тождественного отображения id_X относительно f , продолжающее h . Тогда на множестве $X \setminus \{x_0\} \times \{a_0\}$ определена непрерывная функция $\psi: X \setminus \{x_0\} \times \{a_0\} \rightarrow I$, являющаяся сужением отображения $\text{pr}_I \circ g^{-1} \circ h'$. В силу отсутствия счетной базы в точке $x_0 \in K$ для некоторой точки $x \in K$, близкой к x_0 , функция $\psi|_{\{x\} \times S}: S \rightarrow I$ совпадает с функцией $\psi|_{\{x_0\} \times S}: S \rightarrow I$ и будет равна единице в точках $\{a_{2m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ и нулю в точках $\{a_{2m-1}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Поэтому функция $\psi|_{\{x\} \times (S \cup \{a_0\})}: S \cup \{a_0\} \rightarrow I$ не может быть непрерывна в точке $\{x\} \times \{a_0\}$. Противоречие.

4. О проективно UV^n -значных отображениях. Проективно UV^n -значные отображения обладают важным аппроксимационным свойством, которое присуще UV^n -значным отображениям:

ТЕОРЕМА 2. Если $\Psi: X \rightarrow Y$ проективно UV^n -значное отображение $(n+1)$ -мерного паракомпакта X в ANR -пространство Y , то всякая окрестность графика Γ_Ψ содержит график некоторого однозначного и непрерывного отображения $\psi: X \rightarrow Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную окрестность $\mathcal{U}$ графика Γ_Ψ . Рассмотрим пространство $\tilde{Y}$, непрерывное отображение $g: \tilde{Y} \rightarrow Y$ и UV^n -значное отображение $\tilde{\Psi}: X \rightarrow \tilde{Y}$ (обратное к UV^n -отображению $f: \tilde{Y} \rightarrow X$) из определения проективно UV^n -значного отображения Ψ . Будем считать пространство $\tilde{Y}$ лежащим в некотором ANR -пространстве W . Тогда каждый компакт $\tilde{\Psi}(x)$ обладает UV^n -свойством в W . Продолжим отображение $g \circ \text{pr}_W: \Gamma_{\tilde{\Psi}} \rightarrow Y$ на некоторую окрестность $\mathcal{W} \subset X \times W$ графика $\Gamma_{\tilde{\Psi}}$ и обозначим это продолжение через $\tilde{g}$. Определим окрестность $\mathcal{V}$ графика $\Gamma_{\tilde{\Psi}}$ равенством $\mathcal{V}(x) = \text{pr}_W \circ \tilde{g}^{-1}(\mathcal{U}(x))$ для любого $x \in X$. По теореме об однозначной аппроксимации [12] для UV^n -значного отображения $\tilde{\Psi}: X \rightarrow W$ найдем непрерывное однозначное отображение $\tilde{\psi}: X \rightarrow W$, график которого содержится в $\mathcal{V}$. Определив ψ как композицию отображений $\text{id}_X \times \tilde{\psi}: X \rightarrow X \times W$ и $\tilde{g}: \mathcal{W} \rightarrow Y$, мы получим $\psi(x) \in \mathcal{U}(x)$ для любого $x \in X$, что и требовалось.

Доказательство следующей теоремы повторяет доказательство относительной смешанной теоремы селекции [12] с той лишь разницей, что на первом шаге нужно применить только что доказанную теорему об однозначной аппроксимации.

ТЕОРЕМА 3. Пусть полное, n -непрерывное снизу многозначное отображение Φ некоторого n -мерного паракомпакта X в полное метрическое пространство Y содержит проективно UV^{n-1} -значное подотображение Ψ , однозначное на замкнутом подмножестве $A \subset X$. Тогда любая окрестность $\mathcal{U}$ графика Γ_Ψ в произведении $X \times Y$ содержит график однозначной непрерывной селекции отображения Φ , совпадающей с $\Psi|_A$ на множестве A .

ЛЕММА 6. Пусть $\Psi: X \rightarrow Y$ полунепрерывное сверху компактнозначное отображение паракомпакта X в метрическое пространство Y . Если для любого $x \in X$ диаметр множества $\Psi(x)$ меньше числа $d > 0$, то существует окрестность $\mathcal{U}$ графика Γ_Ψ в $X \times Y$ такая, что для любого $x \in X$ диаметр множества $\mathcal{U}(x)$ не превосходит $8d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки $x \in X$ выберем такую ее окрестность $O_x \subset X$, что $\Psi(z) \subset O(\Psi(x), d)$ для любого $z \in O_x$. Положим $\mathcal{U} = \bigcup_{z \in X} O_z \times O(\Psi(z), d)$. Поскольку всякий "прямоугольник" $O_z \times O(\Psi(z), d)$, пересекающий $\{x\} \times Y$, содержит $\{x\} \times \Psi(x)$, то диаметр множества $\mathcal{U}(x)$ не превосходит

$$2 \cdot \text{diam}(\Psi(x)) + 2 \cdot \sup\{\text{diam } O(\Psi(z), d) \mid z \in X\} < 2d + 2 \cdot 3d = 8d.$$

Скажем, что отображение $f: X \rightarrow B$ вложено в отображение $g: Y \rightarrow B$, если задано замкнутое вложение $i: X \rightarrow Y$ такое, что $f = g \circ i$. Пусть отображение $f: X \rightarrow B$ вложено в отображение $g: Y \rightarrow B$. Назовем f проективно UV^n -значным ретрактом g , если существует проективно UV^n -значная ретракция $R: Y \rightarrow X$ такая, что $g = f \circ R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывное отображение паракомпактов f называется абсолютным проективно UV^n -значным ретрактом, если f является проективно UV^n -значным ретрактом всякого объемлющего его непрерывного отображения паракомпактов.

ТЕОРЕМА 4. Пусть непрерывное сюръективное отображение паракомпактов $f: X \rightarrow Y$ вкладывается в проектирование $\pi: Y \times I_2 \rightarrow Y$, где произведение $Y \times I_2$ паракомпактно. Тогда для всякого $n \geq -1$ следующие условия равносильны:

- 1) f является (локально) $(n+1)$ -мягким;
- 2) f является абсолютным проективно UV^n -значным (окрестностным) ретрактом;
- 3) f является проективно UV^n -значным (окрестностным) ретрактом π ;
- 4) f является проективно UV^n -значно (соответственно локально) мягким в следующем смысле: для всякого паракомпакта Z , его замкнутого подмножества A и любых непрерывных однозначных отображений $\psi: A \rightarrow X$ и $\phi: Z \rightarrow Y$ таких, что $\phi|_A = f \circ \psi$, существует проективно UV^n -значное отображение $\Psi: Z \rightarrow X$ (соответственно $\Psi: OA \rightarrow X$ некоторой окрестности OA множества A), продолжающее ψ и такое, что $f \circ \Psi = \phi$ (соответственно $f \circ \Psi|_{OA} = \phi|_{OA}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть локально $(n+1)$ -мягкое отображение $f: X \rightarrow Y$ вложено в отображение паракомпактов $g: E \rightarrow Y$. Рассмотрим UV^n -отображение $h: E' \rightarrow E$ паракомпакта E' размерности $\dim E' \leq n+1$ (элементарное доказательство существования такого отображения можно найти в работе [12]) и обозначим множество $h^{-1}(X)$ через A . Поскольку X замкнуто в E , то A замкнуто в E' . В силу локальной $(n+1)$ -мягкости f частичное поднятие $h|_A$ отображения $f \circ h$ относительно f продолжается на некоторую окрестность U множества A до частичного поднятия $p: U \rightarrow X$ отображения $f \circ h$ относительно f . Поскольку отображение h совершенно, найдется окрестность OX множества X в E , для которой $OA \subset U$, где $OA = h^{-1}(OX)$. Тогда на OX можно определить проективно UV^n -значную ретракцию $R: OX \rightarrow X$, положив $R = p \circ h^{-1}|_{OX}$. Если отображение f является $(n+1)$ -мягким, то можно полагать $U = E'$ и $OX = E$.

Для доказательства проективной UV^n -значности отображения $R: OX \rightarrow X$ нужно рассмотреть пространство OA , непрерывное отображение $p: OA \rightarrow X$ и непрерывное UV^n -отображение $h: OA \rightarrow OX$.

3) $\Rightarrow$ 1). Фиксируем проективно UV^n -значную ретракцию $R: OX \rightarrow X$, для которой $f \circ R = \pi$. Обозначим через U_k открытую окрестность $\{p \in Y \times I_2 \mid \text{pr}_{I_2} \circ R(p) \in O(\text{pr}_{I_2}(p), 2^{-k})\}$ пространства X . Пусть $\phi: Z \rightarrow Y$ произвольное отображение паракомпакта Z размерности $\dim Z \leq n+1$, и $\psi: A \rightarrow X$ его частичное поднятие относительно f на замкнутом подмножестве $A \subset Z$. Продолжим ψ до поднятия $\psi_0: Z \rightarrow Y \times I_2$ отображения ϕ относительно π . Выберем замкнутую окрестность OA множества A так, чтобы $\psi_0(OA)$ содержалось в OX (если $OX = Y \times I_2$, то положим $OA = Z$). Мы построим искомое поднятие $\psi': OA \rightarrow X$ отображения ϕ относительно f как поточечный предел последовательности непрерывных отображений $\{\psi_k = \phi \times \mu_k: OA \rightarrow Y \times I_2\}_{k \in \mathbb{N}}$, совпадающих с ψ при ограничении на A .

Рассмотрим проективно UV^n -значное отображение $\text{pr}_{I_2} \circ R \circ \psi_0: OA \rightarrow I_2$. Теорема 3 позволяет построить непрерывное отображение $\mu_1: OA \rightarrow I_2$ такое, что $\mu_1(z) \in OX(z) \cap U_1(\phi(z))$, а ограничение $\mu_1|_A$ совпадает с $\text{pr}_{I_2} \circ \psi$. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ мы уже построили непрерывное отображение $\psi_k = \phi \times \mu_k: OA \rightarrow Y \times I_2$ такое, что $\mu_k(z) \in U_k(\phi(z))$ для любого $z \in OA$, а ограничение $\psi_k|_A$ совпадает с ψ . Тогда для проективно UV^n -значного отображения $\text{pr}_{I_2} \circ R \circ \psi_k$ диаметр множества $\text{pr}_{I_2} \circ R \circ \psi_k(z)$ меньше 2^{1-k} для любого $z \in Z$. По лемме 6 выберем для отображения $\text{pr}_{I_2} \circ R \circ \psi_k$ окрестность U_k (такую, что для любого $z \in Z$ диаметр множества $U(z)$ не превосходит

$8 \cdot 2^{1-k}$) и по теореме 3 построим непрерывное отображение $\mu_{k+1}: OA \rightarrow l_2$ такое, что $\mu_{k+1}(z) \in OX(z) \cap \mathcal{U}_k(z) \cap U_{k+1}(\phi(z))$, а ограничение $\mu_{k+1}|_A$ совпадает с $\text{pr}_{l_2} \circ \psi$. Тогда для любого $z \in OA$ выполнено $\text{dist}(\mu_{k+1}(z), \text{pr}_{l_2} \circ f^{-1} \circ \phi(z)) < 2^{-1-k}$ и

$$\mu_{k+1}(z) \in O(\text{pr}_{l_2} \circ R \circ \psi_k(z), 8 \cdot 2^{1-k}) \subset O(\mu_k(z), 2^{-k} + 8 \cdot 2^{1-k}). \quad (1)$$

Замкнутость множества $\text{pr}_{l_2} \circ f^{-1} \circ \phi(z)$ в l_2 позволяет определить однозначное поднятие $\psi': OA \rightarrow X$ отображения ϕ относительно f равенством $\psi'(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(z) = \phi \times \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(z)$. Непрерывность ψ' следует из условия (1), которое обеспечивает фундаментальность последовательности отображений $\{\mu_k\}$. А поскольку $\psi_k|_A = \psi$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то $\psi'|_A = \psi$.

4) $\Rightarrow$ 3). Свойство проективно UV^n -значной (локальной) мягкости применяется к паре $(X, Y \times l_2)$ и ее отображениям $\phi = \pi: Y \times l_2 \rightarrow Y$ и $\psi = \text{id}: X \rightarrow Y \times l_2$.

3) $\Rightarrow$ 4). Фиксируем проективно UV^n -значную ретракцию $R: OX \rightarrow X$ некоторой окрестности OX пространства X , для которой $\pi|_{OX} = f \circ R|_{OX}$. Пусть непрерывные отображения $\psi: A \rightarrow X$ и $\phi: Z \rightarrow Y$ таковы, что $\phi|_A = f \circ \psi$ (здесь A — замкнутое подмножество паракомпакта Z). Продолжим ψ до поднятия $\psi': Z \rightarrow Y \times l_2$ отображения ϕ относительно π и положим $OA = \psi'^{-1}(OX)$. Тогда композиция $\Psi = R \circ \psi'|_{OA}$ является проективно UV^n -значным продолжением отображения ψ , для которого $f \circ \Psi|_{OA} = \phi|_{OA}$.

Рассматривая доказанную теорему для одноточечного пространства Y , получаем результат, принадлежащий Л. В. Широкову [5]:

СЛЕДСТВИЕ 2. Для метризуемого компакта K и для любого $n \geq -1$ следующие условия равносильны:

- 1) $K \in A(N)E(n+1)$;
- 2) K является абсолютным проективно UV^n -значным (окрестностным) ретрактом;
- 3) K является проективно UV^n -значным (окрестностным) ретрактом l_2 .

5. О продолжении UV^n -значных отображений. Для топологических пространств X и Y через $C(X, Y)$ мы обозначаем множество всех непрерывных отображений из X в Y . Непрерывное отображение метрических пространств назовем ε -отображением, если прообраз каждой точки при этом отображении имеет диаметр меньше ε . Для открытого покрытия Ω пространства X непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется Ω -отображением, если всякая точка $y \in Y$ имеет окрестность O_y , прообраз $f^{-1}O_y$ которой содержится хотя бы в одном элементе покрытия Ω .

ЛЕММА 7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ непрерывное отображение сепарабельного метрического пространства X размерности $\dim X \leq n$ в локально $(n-1)$ -связное метрическое пространство Y . Тогда для любого открытого покрытия Ω пространства X и любой функции $d \in C(X, (0, 1))$ найдется локально конечный не более чем счетный симплициальный комплекс P размерности $\dim P \leq n$ и такие отображения $g: X \rightarrow P$ и $h: P \rightarrow Y$, что g является Ω -отображением и для любого $x \in X$ выполняется $\text{dist}(f(x), h \circ g(x)) < d(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим достаточно мелкое покрытие Ω_0 пространства X и определим P как нерв этого покрытия, а $g: X \rightarrow P$ как каноническое отображение в нерв.

Свойство локальной n -связности Y позволяет найти такие функции $\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_0 \in C(X, (0, 1))$, что $\varepsilon_n = d/3$ и для любых $x \in X$ и $k < n$ пара $(O(f(x), \varepsilon_{k+1}(x)), O(f(x), 3\varepsilon_k(x)))$ является k -связной. Рассмотрим открытое покрытие Ω_0 пространства X , звездно вписанное в покрытие Ω и обладающее следующими свойствами:

- 1) для любого элемента $\omega \in \Omega_0$ каждая функция $\varepsilon_i(x)$ изменяется на множестве $\text{St}(\omega, \Omega_0)$ менее чем вдвое;
- 2) для любого элемента $\omega \in \Omega_0$ и любой точки $x \in \omega$ выполняется

$$f(\text{St}(\omega, \Omega_0)) \subset O(f(x), \varepsilon_0(x)).$$

В силу теоремы Даукера [14, теорема 4.11.24] покрытие Ω_0 можно считать счетным, звездно локально конечным и имеющим кратность $\leq n+1$. Тогда нерв P этого покрытия является счетным локально конечным симплициальным комплексом размерности $\leq n$, а каноническое отображение $g: X \rightarrow P$ является Ω -отображением.

Отображение $h: P \rightarrow Y$ мы определим индукцией по остовам комплекса P , начиная с 0-мерного остова $P^{(0)}$. Для вершины $v \in P^{(0)}$ выберем произвольную точку $h(v)$ во множестве $f(g^{-1}(v))$. Тогда в силу свойства (2) для любого ребра $\sigma \in P^{(1)}$ и любой точки $x \in g^{-1}(\sigma)$ множество $h(\sigma^{(0)})$ содержится в $O(f(x), \varepsilon_0(x))$ и потому h продолжается на σ таким образом, что $h(\sigma) \subset O(f(x'), \varepsilon_1(x'))$ для некоторого $x' \in g^{-1}(\sigma)$. Определив h независимо на каждом одномерном симплексе, мы получим продолжение отображения h на $P^{(1)}$. При этом для любого двумерного симплекса $\sigma \in P^{(2)}$ и любой точки $x \in g^{-1}(\sigma)$ имеем

$$h(\sigma^{(1)}) \subset O\left(f(x), \varepsilon_0(x) + \max_{x \in g^{-1}(\sigma)} \varepsilon_1(x)\right) \subset O(f(x), 3\varepsilon_1(x)),$$

что позволяет продолжить отображение h на σ так, что $h(\sigma) \subset O(f(x'), \varepsilon_2(x'))$ для некоторого $x' \in g^{-1}(\sigma)$. Продолжая таким образом построение, мы получим отображение $h: P \rightarrow Y$, обладающее тем свойством, что для любого симплекса $\sigma \in P$ и любой точки $x \in g^{-1}(\sigma)$ множество $h(\sigma)$ содержится в $O(f(x), 3\varepsilon_n(x))$. Последнее свойство означает, что для любого $x \in X$ точки $f(x)$ и $h \circ g(x)$ удалены меньше, чем на $3\varepsilon_n(x) = d(x)$.

Пусть X и Y – метрические пространства. Определим на множестве $C(X, Y)$ топологию, в которой базисом открытых окрестностей отображения $f \in C(X, Y)$ будут множества

$$U(f, \varepsilon) = \{g \in C(X, Y) \mid \text{dist}(f(x), g(x)) < \varepsilon(x) \text{ для любого } x \in X\},$$

где $\varepsilon \in C(X, (0, \infty))$. Обозначим множество $C(X, Y)$ с такой топологией через $C_s(X, Y)$.

ЛЕММА 8. Пусть $h: P \rightarrow Y$ непрерывное отображение локально конечного не более чем счетного симплициального комплекса P размерности $\dim P \leq n$ в локально $(n-1)$ -связное полное метрическое пространство Y , удовлетворяющее свойству $DD^n P$. Тогда для любой функции $\varepsilon \in C(P, (0, 1))$ найдется такое отображение $h_\varepsilon: P \rightarrow Y$, что $h_\varepsilon \in U(h, \varepsilon)$ и для всякой пары непересекающихся симплексов $\sigma, \sigma' \in P$ их образы $h_\varepsilon(\sigma)$ и $h_\varepsilon(\sigma')$ не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим в виде последовательности $\{(\sigma_i, \sigma'_i)\}_{i=1}^\infty$ множество всех пар непересекающихся симплексов комплекса P . Предположим, что мы уже построили отображение $h_{k-1}: P \rightarrow Y$ такое, что $h_{k-1} \in U(h, \varepsilon)$ и $h_{k-1}(\sigma_i) \cap h_{k-1}(\sigma'_i) = \emptyset$ для всякого $i \leq k-1$. Положим $d = \min_{i < k} \{\text{dist}(h_{k-1}(\sigma_i), h_{k-1}(\sigma'_i))\}$ и выберем такую функцию $\delta \in C(P, (0, 1))$, что $U(h_{k-1}, 2\delta) \subset U(h, \varepsilon)$ и $\delta(p) < d/3^k$ для любого $p \in P$. Тогда для всякого отображения $h' \in U(h_{k-1}, \delta)$ множества $h'(\sigma_i)$ и $h'(\sigma'_i)$ не пересекаются при любом $i < k$.

Из теоремы 3.1 работы [13] следует, что существует функция $\gamma \in C(P, (0, 1))$ такая, что для всякого замкнутого подполиэдра $A \subset P$ и его отображения $g: A \rightarrow Y$, которое γ -близоко к $h_{k-1}|_A$, найдется δ -близоко к h_{k-1} отображение $g': P \rightarrow Y$, ограничение которого на A совпадает с g . Рассмотрим в качестве полиэдра A объединение симплексов σ_k и σ'_k и замыкания множества $P \setminus (\text{St}(\sigma_k) \cup \text{St}(\sigma'_k))$. Согласно свойству $DD^n P$ пространства Y найдется γ -близоко к $h_{k-1}|_A$ отображение $h'_k: A \rightarrow Y$, которое совпадает с h_{k-1} при ограничении на $A \setminus (\sigma_k \cup \sigma'_k)$ и удовлетворяет условию $h'_k(\sigma_k) \cap h'_k(\sigma'_k) = \emptyset$. Продолжим h'_k до δ -близкого к h_{k-1} отображения $h_k: P \rightarrow Y$.

Полнота пространства Y позволяет определить искомое отображение h_ε равенством $h_\varepsilon = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$.

ЛЕММА 9. Пусть локально $(n-1)$ -связное полное метрическое пространство Y удовлетворяет свойству $DD^n P$. Рассмотрим совершенное отображение $f: Z \rightarrow X$ сепарабельных метрических пространств, где $\dim Z \leq n$. Тогда в пространстве $C_s(Z, Y)$ содержится всюду плотное подмножество отображений, которые являются вложениями при ограничении на каждый слой $f^{-1}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через C_k множество всех отображений $g: Z \rightarrow Y$ таких, что ограничение g на любой слой $f^{-1}(x)$ является $(1/k)$ -отображением. Очевидно, множество $C = \bigcap_{k=1}^\infty C_k$ состоит из отображений, являющихся вложениями на каждом слое $f^{-1}(x)$. Поскольку множество $C_s(Z, Y)$ обладает свойством Бэра [15, теорема 2.4.2], то всюду плотность множества C следует из открытости и всюду плотности каждого из множеств C_k .

Фиксируем произвольное множество C_k и докажем его открытость в $C_s(Z, Y)$. Для точки $z \in Z$ через K_z будем обозначать компакт $f^{-1}(f(z)) \setminus O(z, 1/2k)$. Рассмотрим произвольное отображение $g \in C_k$ и обозначим через $d_k(z)$ расстояние между точкой $g(z)$ и компактом $g(K_z)$ (если $K_z = \emptyset$, положим $d_k(z) = +\infty$). Из совершенности f легко следует полунепрерывность снизу функции $d_k: Z \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Следовательно, существует функция $d \in C(Z, (0, \infty))$, для которой выполняется $d(z) < d_k(z)/3$ для любого $z \in Z$. Тогда условие $h \in U(g, d)$ гарантирует, что расстояние от точки $h(z)$ до компакта $h(K_z)$ больше $d_k(z)/3$, т.е. для любого $z \in Z$ пересечение множеств $h^{-1}(h(z))$ и $f^{-1}(f(z))$ содержится в $O(z, 1/(2k))$, и тем самым имеет диаметр меньше $1/k$.

Фиксируем отображение $f \in C(Z, Y)$ и функцию $\delta \in C(Z, (0, \infty))$ и докажем непустоту пересечения $C_k \cap U(f, \delta)$. Выберем такое открытое покрытие Ω пространства Z множествами диаметра меньше $1/k$, чтобы на каждом элементе покрытия функция δ изменялась менее чем вдвое. С помощью леммы 7 построим симплициальный комплекс P размерности $\dim P \leq n$ и такие отображения $g: Z \rightarrow P$ и $h: P \rightarrow Y$, что для любого $z \in Z$ выполняется $\text{dist}(f(z), h \circ g(z)) < \delta(z)/2$, и для любого симплекса $\sigma \subset P$ прообраз его звезды $g^{-1}(\text{St}(\sigma))$ содержится в некотором элементе покрытия Ω . Тогда найдется такая функция $\varepsilon \in C(P, (0, 1))$, что $\varepsilon \circ g(z) < \delta(z)/2$ для любого $z \in Z$. По лемме 8

построим отображение $h_\varepsilon: P \rightarrow Y$ и покажем, что $h_\varepsilon \circ g \in C_k \cap U(f, \delta)$. Очевидно, для всякого $z \in Z$ выполняется

$$h_\varepsilon \circ g(z) \in O(h \circ g(z), \varepsilon \circ g(z)) \subset O(f(z), \delta(z)).$$

Для любой точки $y \in h_\varepsilon \circ g(Z)$ прообраз $h_\varepsilon^{-1}(y)$ содержится в звезде $\text{St}(\sigma)$ некоторого симплекса $\sigma \subset P$. Поэтому множество $g^{-1}(h_\varepsilon^{-1}(y))$ содержится в некотором элементе покрытия Ω и имеет диаметр меньше $1/k$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть на замкнутом подмножестве A сепарабельного метрического пространства X задано UV^n -значное отображение $\Psi: A \rightarrow Y$ в локально n -связное метрическое пространство Y . Тогда существует проективно UV^n -значное отображение $\Psi': OA \rightarrow Y$, определенное на некоторой окрестности OA множества A , для которого ограничение $\Psi'|_A$ совпадает с Ψ .

Если Y является n -связным, то можно полагать $OA = X$.

Если, кроме того, пространство Y является полным и удовлетворяет свойству $DD^{n+1}P$, то отображение Ψ' можно выбрать UV^n -значным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: Z \rightarrow X$ непрерывное UV^n -отображение сепарабельного метрического пространства Z размерности $\dim Z \leq n+1$ [16]. Обозначим через B множество $f^{-1}(A) \subset Z$. Следствие 1 позволяет продолжить UV^n -значное отображение $\Psi \circ f: B \rightarrow Y$ на некоторую окрестность OB множества B до UV^n -значного отображения $F: OB \rightarrow Y$, которое однозначно и непрерывно на $OB \setminus B$. В случае n -связного пространства Y положим $OB = Z$. Поскольку отображение f совершенно, найдется окрестность OA множества A в X , для которой $f^{-1}(OA) \subset OB$. Тогда на OA можно определить отображение $\Psi': OA \rightarrow Y$, положив $\Psi' = F \circ f^{-1}|_{OA}$.

Для доказательства проективной UV^n -значности отображения Ψ' нужно рассмотреть график $\Gamma_F \subset OB \times Y$ (мы будем считать, что $OB = f^{-1}(OA)$) и его непрерывные отображения $\text{pr}_Y: \Gamma_F \rightarrow Y$ и $g = f \circ \text{pr}_Z: \Gamma_F \rightarrow OA$. Мы имеем $\Psi' = \text{pr}_Y \circ g^{-1}$ и g является UV^n -отображением как композиция двух UV^n -отображений [17].

Рассмотрим положительную непрерывную функцию $\beta(z) = \text{dist}(f(z), A)$ на множестве $Z \setminus B$. Лемма 9 позволяет изменить отображение F на множестве $Z \setminus B$ таким образом, чтобы новое отображение $F': Z \rightarrow Y$ являлось вложением на каждом слое $f^{-1}(x)$ при $x \in X \setminus A$ и удовлетворяло соотношению $\text{dist}(F(z), F'(z)) < \beta(z)$ для любого $z \in Z \setminus B$. Последнее соотношение легко влечет полунепрерывность сверху отображения F' . Определим искомое отображение Ψ' равенством $\Psi'(x) = F' \circ f^{-1}(x)$ для любого $x \in X \setminus A$. Поскольку F' является вложением на слое $f^{-1}(x)$ для $x \in X \setminus A$, то $\Psi'(x)$ гомеоморфно $f^{-1}(x)$ и является UV^n -компактом. Полунепрерывность сверху Ψ' легко следует из полунепрерывности сверху и компактнозначности отображений f^{-1} и F' .

Автор выражает глубокую благодарность Е. В. Щепину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shchepin E. V. On homotopically regular mappings of manifolds // Banach Centre Publ. V. 18. Warszawa: PWN, 1986. P. 139–151.
- [2] Агеев С. М., Реповш Д., Щепин Е. В. О мягкости резольвенты Дранишникова // Тр. МИАН. 1996. Т. 212. С. 7–32.
- [3] Федорчук В. В. Многозначные ретракции и характеристики n -мягких отображений // Тр. ММО. 1988. Т. 51. С. 169–207.
- [4] Дранишников А. Н. Многозначные абсолютные ретракты и абсолютные экстензоры в размерности 0 и 1 // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 241–242.
- [5] Широков Л. В. О $AE(n)$ -бикompактах // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 6. С. 1316–1327.
- [6] Lacher R. C. Cell-like mappings, I // Pacific J. Math. 1969. V. 30. P. 717–731.
- [7] Kryszewski W. Graph-approximation of set-valued maps on noncompact domains // Topology Appl. 1998. V. 83. P. 1–21.
- [8] Ageev S. M., Repovš D., Ščepin E. V. The extension problem for complete UV^n -preimages // Tsukuba J. Math. To appear..
- [9] Бродский Н. Б. О продолжении компактнозначных отображений // УМН. 1998. Т. 53. № 5.
- [10] Michael E. Continuous selections, II // Ann. of Math. 1956. V. 64. P. 562–580.
- [11] Lacher R. C. Cell-like mappings and their generalizations // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 495–552.
- [12] Щепин Е. В., Бродский Н. Б. Селекции фильтрованных многозначных отображений // Тр. МИАН. 1996. Т. 212. С. 220–240.
- [13] Bielawski R. A selection theorem for open-graph multifunctions // Fund. Math. 1989. V. 133. P. 97–100.
- [14] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [15] Hirsch M. W. Differential topology // Graduate Texts in Math. 33. New York: Springer, 1976.
- [16] Дранишников А. Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n -мягкие отображения // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 55–96.
- [17] Ferry S. C. UV^k -equivalent compacta // Lecture Notes in Math. № 1283. N.-Y.: Springer-Verlag, 1987.