Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 364–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:33:07

УДК 517.983

РЕГУЛЯРНОЕ И СИНГУЛЯРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

А. В. Глушак

Изучается возмущение абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу слагаемыми с переменными коэффициентами, а также регулярное и сингулярное возмущения этого уравнения.

Библиография: 9 названий.

Пусть в банаховом пространстве E задача Коши

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0 \quad (2)$$

с линейным замкнутым оператором A равномерно корректна. Класс таких операторов A обозначим через $\mathbb{G}_k$, а разрешающий оператор – через $\mathbb{Y}_k(t) = \mathbb{Y}_k(t, A)$, т.е. $u(t) = \mathbb{Y}_k(t)u_0$. Критерий равномерной корректности и свойства операторной функции $\mathbb{Y}_k(t)$ изучались в [1].

В [2] исследован вопрос о принадлежности $\mathbb{G}_k$, $k \geq 0$, возмущенного оператора $A + \mathbb{B}$ в случаях, когда $\mathbb{B}$ – ограниченный оператор или $\mathbb{B} \in \mathbb{G}_m$, $m \geq 0$.

В настоящей работе рассматриваются случаи, когда уравнение (1) возмущается слагаемыми с зависящими от t коэффициентами, исследуется поведение решения задачи (1), (2) при $k \rightarrow 0$ (регулярное возмущение), а также сингулярное возмущение, если в уравнение (1) множителем при $u''(t)$ вводится параметр $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим уравнение

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) + q(t)u(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где $q(t)$ – непрерывная и ограниченная при $t \geq 0$ функция.

В случае $A = -\lambda$ уравнение вида (3) встречалось в работах [3] (случай $k = 0$) и [4] (случай $k > 0$) при изучении вопросов восстановления дифференциального уравнения по его спектральной функции. Отметим, что уравнение с особенностью, т.е. случай $k > 0$, возникает при рассмотрении сферически симметричных задач на собственные значения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_k$, $k \geq 0$. Тогда задача (3), (2) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$u(t) = \mathbb{Y}_k(t)u_0 + t^{-k/2} \int_0^t K(t, s)s^{k/2} \mathbb{Y}_k(t)u_0 ds,$$

где $K(t, s)$ – некоторая непрерывная при $t \geq s > 0$ функция, определяемая по $q(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы аналогично доказательству основной теоремы работы [4]. Отметим, что если, например, $q(t) = q$ – постоянная и $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, то, как следует из теоремы 1 [2],

$$K(t, s) = \frac{qs^n}{(-2)^{n+1}n!t^{n-1}} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right)^n \left((t^2 - s^2)^n {}_1F_2 \left(1; n+1, 2; \frac{(s^2 - t^2)q}{4} \right) \right),$$

где ${}_1F_2$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

Приведем еще два уравнения с переменными по t коэффициентами, которые можно решить, зная решение задачи (1), (2).

При $k \geq 0$ и $m > -2$ рассмотрим задачу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = t^m \mathbb{A}u(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (4)$$

Заменой $\tau = (2/(m+2))t^{m/2+1}$ эта задача сводится к задаче

$$U''(\tau) + \frac{m+2k}{m\tau+2\tau}U'(\tau) = \mathbb{A}U(\tau), \quad \tau > 0, \quad (5)$$

$$U(0) = u_0, \quad U'(0) = 0, \quad (6)$$

где $U(\tau) = u((m\tau+2\tau)^{2/(m+2)})$. Если $k_1 = (m+2k)/(m+2) \geq 0$ и $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_{k_1}$, то задача (5), (6) равномерно корректна. Так как $k_1 \geq k \geq 0$ при $m \geq 0$, $0 \leq k \leq 1$ и $-2 < m \leq 0$, $k \geq 1$, в этих случаях $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_k$ влечет $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_{k_1}$ (см. следствие 2 из [1]). В противном случае нужно дополнительно требовать, чтобы $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_{k_1}$.

В частности, если $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_0$, т.е., если $\mathbb{A}$ – генератор косинус-функции $\mathbb{C}(t)$, то в силу теоремы 3 из [1] решение задачи (5), (6) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathbb{Y}_{k_1} \left(\frac{2}{m+2} t^{m/2+1} \right) u_0 \\ &= \frac{2}{B(k_1/2, 1/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{k_1/2-1} \mathbb{C} \left(\frac{2}{m+2} t^{m/2+1} s \right) u_0 ds. \end{aligned}$$

Отметим, что задача (4) в гильбертовом пространстве при $k = 0$ изучалась ранее в [5], [6].

Рассмотрим задачу отыскания решения неоднородного уравнения

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) + \frac{c}{t^2}u(t) = \mathbb{A}u(t) + \frac{c}{t^2}u_0, \quad t > 0, \quad (7)$$

удовлетворяющего условиям (2), где $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_k$, $m > k$, $c \leq (m-1)^2/4$.

Будем искать решение $u_m(t)$ в виде

$$u_m(t) = \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k Q(s) \mathbb{Y}_k(ts) u_0 ds \quad (8)$$

с подлежащей определению функцией $Q(s)$.

Вычислив в (8) $u'_m(t)$, $u''_m(t)$ и $\mathbb{A}u_m(t)$, после элементарных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} u''_m(t) + \frac{m}{t} u'_m(t) - \mathbb{A}u_m(t) &= \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^{k+2} Q(s) \mathbb{Y}''_k(ts) u_0 ds \\ &+ \frac{m}{mt - kt} \left(k \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^{k-1} Q(s) \mathbb{Y}'_k(ts) u_0 ds \right. \\ &+ t \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q(s) \mathbb{Y}''_k(ts) u_0 ds \\ &+ \left. \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s) \mathbb{Y}'_k(ts) u_0 ds \right) \\ &- \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k Q(s) \mathbb{Y}''_k(ts) u_0 ds \\ &- \frac{k}{t} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^{k-1} Q(s) \mathbb{Y}'_k(ts) u_0 ds \\ &= \frac{k}{m-k} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q(s) \mathbb{A} \mathbb{Y}_k(ts) u_0 ds \\ &- \frac{k}{t} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^{k+1} Q(s) \mathbb{Y}'_k(ts) u_0 ds \\ &+ \frac{m}{m-k} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s) \mathbb{Y}'_k(ts) u_0 ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s) \mathbb{Y}'_k(ts) u_0 ds = -\frac{u_0}{t^2} \lim_{s \rightarrow 0} s^k Q'(s) \\ &- \frac{1}{t^2} \int_0^1 ((1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s))' \mathbb{Y}_k(ts) u_0 ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Подберем функцию $Q(s)$ так, чтобы

$$((1-s^2)^{(m-k)/2} s^k Q'(s))' = c(1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k Q(s) \quad (10)$$

Легко убедиться, что функция $Q(s) = \beta {}_2F_1(p, q; (m-k)/2; 1-s^2)$, где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса, p, q – действительные (так как $c \leq (m-1)^2/4$) корни уравнения $x^2 + ((1-m)/2)x + c/4 = 0$, β – постоянная, удовлетворяет уравнению (10).

Выберем постоянную β так, чтобы функция $u_m(t)$ удовлетворяла начальным условиям (2). Используя интеграл 2.21.1.6 из [7], получаем

$$\beta = \frac{2\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/2-k/2)}. \quad (11)$$

Вычислим теперь предел, входящий в равенство (9). С учетом формул 7.2.1.10, 7.2.1.7, 7.2.1.2 из [7] и (11) получим

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s^k Q'(s) &= -2\beta \lim_{s \rightarrow 0} s^{k+1} {}_2F_1' \left(p, q; \frac{m-k}{2}; 1-s^2 \right) \\ &= \frac{4\beta pq}{k-m} \lim_{s \rightarrow 0} s^{k+1} {}_2F_1 \left(p+1, q+1; \frac{m-k}{2}+1; 1-s^2 \right) \\ &= \frac{\beta c}{k-m} \lim_{s \rightarrow 0} {}_2F_1 \left(\frac{m-k}{2}-p, \frac{m-k}{2}-q; \frac{m-k}{2}+1; 1-s^2 \right) = -c. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (9)–(12) окончательно получаем

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \frac{2\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma((k+1)/2)\Gamma((m-k)/2)} \\ &\quad \times \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k {}_2F_1 \left(p, q; \frac{m-k}{2}; 1-s^2 \right) \mathbb{Y}_k(ts) u_0 ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим ряд частных случаев формулы (13): если $p = (m-k)/2$, $q = (k-1)/2$, то (13) имеет вид

$$u_m(t) = 2p \int_0^1 (1-s^2)^{p-1} s \mathbb{Y}_k(ts) u_0 ds;$$

при $c = 0$ (13) превращается в

$$u_m(t) = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k-2)/2} s^k \mathbb{Y}_k(ts) u_0 ds; \quad (14)$$

если оператор $\mathbb{A}$ является умножением на число A и $k = 0$, то, учитывая 2.21.2.13 из [7], получаем $u_m(t) = {}_1F_2(1; p+1, q+1; At^2/4)$, где ${}_1F_2$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

ТЕОРЕМА 2 (о регулярном возмущении). Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_0$. Тогда при $x \in \mathbb{E}$ равномерно по $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbb{Y}_k(t)x = \mathbb{C}(t)x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 3 из [1], для $x \in \mathbb{E}$, $t \in [0, t_0]$ и $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{Y}_k(t)x - \mathbb{C}(t)x\| &= \frac{2}{B(k/2+1/2)} \left\| \int_0^{1-\delta/t_0} (1-s^2)^{k/2-1} (\mathbb{C}(ts) - \mathbb{C}(t)) x ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{1-\delta/t_0}^1 (1-s^2)^{k/2-1} (\mathbb{C}(ts) - \mathbb{C}(t)) x ds \right\|. \end{aligned}$$

В силу сильной непрерывности КОФ $\mathbb{C}(t)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ $\|\mathbb{C}(ts)x - \mathbb{C}(t)x\| < \varepsilon$, если только $|s-1| < \delta/t_0$. Зафиксируем такое $\delta > 0$. Пусть также $M(t_0) = \sup_{[0, t_0]} \|\mathbb{C}(t)x\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbb{Y}_k(t)x - \mathbb{C}(t)x\| &= \frac{2}{B(k/2+1/2)} \left(2M(t_0) \int_0^{1-\delta/t_0} (1-s^2)^{k/2-1} ds \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \int_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} ds \right) \leq 4M(t_0) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left(1 - \frac{\delta}{t_0}\right) \frac{(2\delta/t_0 - \delta^2/t_0^2)^{k/2-1}}{\Gamma(k/2)\Gamma(1/2)} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{k \rightarrow 0} 1/\Gamma(k/2) = 0$, учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, получаем $\lim_{k \rightarrow 0} \|\mathbb{Y}_k(t)x - \mathbb{C}(t)x\| = 0$, $x \in \mathbb{E}$, $t \in [0, t_0]$, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3 (о сингулярном возмущении). Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_p$ при некотором $p \geq 0$, $k > \varepsilon p$, $\varepsilon > 0$, и $v_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$. Тогда равномерно по $t \in [0, t_0]$ решение задачи

$$\varepsilon U''(t) + \frac{k}{t} U'(t) = \mathbb{A}U(t), \quad U(0) = v_0, \quad U'(0) = 0,$$

стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению задачи

$$\frac{k}{t} V'(t) = \mathbb{A}V(t), \quad V(0) = v_0,$$

при этом $\|V(t) - U(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2 (см. также (14)) и теоремы 6 из [1] решения рассматриваемых задач имеют вид

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathbb{Y}_{k/\varepsilon} \left(t, \frac{\mathbb{A}}{\varepsilon} \right) v_0 = \mathbb{Y}_{k/\varepsilon} \left(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, \mathbb{A} \right) v_0 = \frac{2(2\varepsilon/k)^{(p+1)/2}}{B((p+1)/2, (k/\varepsilon - p)/2)} \\ &\quad \times \int_0^{\sqrt{k/(2\varepsilon)}} \left(1 - \frac{2\varepsilon r^2}{k} \right)^{(k/\varepsilon - p - 2)/2} r^p \mathbb{Y}_p \left(2r \sqrt{\frac{t^2}{2k}} \right) v_0 dr, \\ V(t) &= \frac{(2k)^{(p+1)/2}}{\Gamma((p+1)/2) 2^p t^{p+1}} \int_0^\infty s^p \exp \left(-\frac{ks^2}{2t^2} \right) \mathbb{Y}_p(s) v_0 ds, \end{aligned}$$

поэтому при $q = k/\varepsilon$, $\tau = t^2/(2k)$ имеем

$$\begin{aligned} \|V(t) - U(t)\| &= \left\| \frac{2}{\Gamma((p+1)/2)} \int_0^\infty r^p \exp(-r^2) \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(2/q)^{(p+1)/2}}{B((p+1)/2, (q-p)/2)} \int_0^{\sqrt{q/2}} r^p \left(1 - \frac{2r^2}{q} \right)^{(q-p-2)/2} \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right\| \\ &\leq \frac{2(2/q)^{(p+1)/2}}{B((p+1)/2, (q-p)/2)} \left\| \int_0^{\sqrt{q/2}} r^p \exp(-r^2) \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\sqrt{q/2}} r^p \left(1 - \frac{2r^2}{q} \right)^{(q-p-2)/2} \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right\| \\ &\quad + \left| \frac{2(2/q)^{(p+1)/2}}{B((p+1)/2, (q-p)/2)} - \frac{2}{\Gamma((p+1)/2)} \right| \\ &\quad \times \left\| \int_0^{\sqrt{q/2}} r^p \exp(-r^2) \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right\| \\ &\quad + \frac{2}{\Gamma((p+1)/2)} \left\| \int_{\sqrt{q/2}}^\infty r^p \exp(-r^2) \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right\|. \end{aligned} \quad (15)$$

Из неравенства (см. [1])

$$\|\mathbb{Y}_k(t)\| \leq M \exp(\omega t) \quad (16)$$

для $\varepsilon_1 > 0$, $t \in [0, t_0]$ и достаточно больших q вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Gamma((p+1)/2)} \left\| \int_{\sqrt{q/2}}^{\infty} r^p \exp(-r^2) \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right\| \\ & \leq M_1 \int_{\sqrt{q/2}}^{\infty} r^p \exp\left(-r^2 + \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{q}{2}}\right) dr \|v_0\| \\ & \leq M_1 \int_{\sqrt{q/2}}^{\infty} r^p \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \|v_0\| \leq M_2 q^{(p-1)/2} \exp\left(-\frac{q}{4}\right) < \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя известную асимптотическую формулу при $z \rightarrow \infty$

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta} \left(1 + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{2z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \right),$$

для $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно больших q получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2(2/q)^{(p+1)/2}}{B((p+1)/2, (q-p)/2)} - \frac{2}{\Gamma(p+1)} \right| \left\| \int_0^{\sqrt{q/2}} r^p \exp(-r^2) \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr \right\| \\ & \leq \frac{M_3}{\Gamma((p+1)/2)} \left(\frac{1}{q} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \right) < \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, в (15) нам осталось оценить интеграл

$$I(q) = \int_0^{\sqrt{q/2}} \psi(r^2, q) r^p \mathbb{Y}_p(2r\sqrt{\tau}) v_0 dr,$$

где $\psi(x, q) = \exp(-x) - (1 - 2x/q)^{(q-p-2)/2}$.

Рассмотрим задачу отыскания положительного корня $x_0(q)$ уравнения $\psi(x, q) = 0$ при $0 < x < q/2$. После замены $x = r(q/2 - p/2 - 1)$ это уравнение запишется в виде

$$\psi_1(r, q) \equiv \exp(-r) - \left(1 - r + \frac{r(p+2)}{q} \right) = 0.$$

Очевидно, при больших $q \geq q_0$ оно имеет единственное решение, и разлагая $\psi_1(r, q)$ по формуле Тейлора, будем иметь

$$r \left(r \exp(-r_1) - \frac{2(p+2)}{q} \right) = 0, \quad 0 < r_1 < r.$$

Поскольку r изменяется в пределах $0 < r < 1 + (p+2)/(q-p-2)$, корень последнего уравнения $r_0 = (2(p+2)/q) \exp(r_1)$ при $(p+2)/(q-p-2) < \varepsilon_2$ удовлетворяет неравенствам

$$2 \frac{p+2}{q} < r_0 < \frac{2(p+2)}{q} \exp(1 + \varepsilon_2).$$

Поэтому искомым корень $x_0(q)$ уравнения $\psi(x, q) = 0$ заключен в пределах $(p+2)(q_0 - p - 2)/q_0 \leq (p+2)(q-p-2)/q < x_0(q) < (p+2)/(q(q-p-2)) \exp(1 + \varepsilon_2) \leq (p+2) \exp(1 + \varepsilon_2)$ и при этом $\psi(x, q) < 0$, если $0 < x < x_0(q)$, $\psi(x, q) > 0$, если $x_0(q) < x < q/2$, $q \geq q_0$.

Запишем интеграл $I(q)$ в виде $I(q) = I_1(q) + I_2(q)$, где $I_1(q)$ вычисляется по промежутку $(0, \sqrt{x_0(q)})$, а $I_2(q)$ – по $(\sqrt{x_0(q)}, \sqrt{q/2})$.

В силу равномерного по $r \in (0, \sqrt{x_0(q)})$ стремления к нулю функции $\psi(r^2, q)$ при $q \rightarrow \infty$ для достаточно больших q

$$\|I_1(q)\| < \varepsilon_1. \quad (19)$$

Для оценки $I_2(q)$ применим неравенство (16) и элементарное неравенство $2\omega\sqrt{\tau y} \leq y/2 + 2\omega^2\tau$. Будем иметь

$$\|I_2(q)\| \leq M(t_0)\|v_0\| \int_{x_0(q)}^{q/2} \psi(y, q) y^{(p-1)/2} \exp\left(\frac{y}{2}\right) \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{y-p}{q}\right) dy, \quad (20)$$

где $\alpha \geq 3$ и, по-прежнему, $q \geq q_0$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что первообразной для подынтегральной функции в (20) является функция

$$\begin{aligned} F(y, q) &= \alpha \exp\left(\frac{y}{2}\right) \left(1 - \frac{2y}{q}\right)^{(q-p)/2} + \frac{\beta y + \gamma q + \delta}{q} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \\ &= \alpha \left(\frac{2y}{q-1}\right) \psi(y, q) \exp\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\delta - 4\alpha y}{q} \exp\left(-\frac{y}{2}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

если $\beta = -2\alpha$, $\gamma = -\alpha$, $\delta = (2p-4)\alpha$, $\alpha \geq 3$.

Подстановка пределов интегрирования в (21) дает $F(q/2, q) = ((\delta - 2\alpha q)/q) \times \exp(-q/4)$, $F(x_0(q), q) = ((\delta - 4\alpha x_0(q))/q) \exp(-x_0(q)/2)$, т.е. величину порядка $1/q$ при $q \rightarrow \infty$.

Поэтому из (20) выводим оценку

$$\|I_2(q)\| \leq \frac{M_4}{q} < \varepsilon_1. \quad (22)$$

Из (15), (17)–(19), (22) вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 являются обобщением соответствующих результатов работы [8], где рассматривался частный случай $\mathbb{A} = \mathbb{B}^2$, $\mathbb{B}$ – генератор сильно непрерывной группы.

Выражения, подобные тем, которые мы оценивали в (15) при изучении сингулярного возмущения, возникают также при исследовании вопросов стабилизации решения задачи Коши

$$v'(t) = \mathbb{A}v(t), \quad v(0) = v_0, \quad (23)$$

поэтому мы лишь сформулируем следующую теорему, не останавливаясь на ее доказательстве.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{G}_p$ при некотором $p \geq 0$, выполнено неравенство (16) с $\omega > 0$, $v_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$ и $\ell \in \mathbb{E}$. Для того чтобы существовал предел $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \ell$ решения задачи (23), необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{Y}_k(\sqrt{2kt}, \mathbb{A}) v_0 = \ell, \quad \text{где} \quad t = \nu \frac{\ln k}{\omega^2}, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 4 критерий стабилизации сформулирован в предположении, что $\omega > 0$. Для полноты изложения заметим, что если в неравенстве (16) $\omega = 0$, т.е. $\sup_{t \geq 0} \|\mathbb{Y}_p(t)\| \leq M$, то критерий стабилизации задачи (23) имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{Y}_p(s) v_0 \, ds = \ell, \quad v_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A}).$$

Утверждения теоремы 4 и замечания обобщают теоремы 4 и 5 из [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Глушак А. В. Операторная функция Бесселя // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–589.
- [2] Глушак А. В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 363–369.
- [3] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 4. С. 309–360.
- [4] Волк В. Я. О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$ // УМН. 1953. Т. 53. № 4. С. 141–151.
- [5] Городецкий В. В. О представлении решений дифференциально-операторных уравнений гиперболического типа в полиномиальной форме // Изв. вузов. Матем. 1991. № 11. С. 87–88.
- [6] Городецкий В. В., Горбачук М. Л. О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. матем. ж. 1984. Т. 36. № 4. С. 500–502.
- [7] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
- [8] Butcher G. H., Donaldson J. A. Regular and singular perturbation problems for a singular abstract Cauchy problem // Duke Math. J. 1975. V. 42. № 3. P. 435–445.
- [9] Глушак А. В., Репников В. Д. О стабилизации решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве // Докл. РАН. 1992. Т. 326. № 2. С. 224–226.

Воронежский государственный технический университет

Поступило
10.11.97