Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Григорян, Интерполирование функций по способу наименьших квадратов, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 372–379

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:51:16

УДК 517

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Работа посвящена памяти моего научного
руководителя профессора С. Б. Стечкина.

А. Л. Григорян

Изучается норма оператора наилучшего среднеквадратичного тригонометрическо-
го приближения на конечной равномерной сетке.

Библиография: 2 названия.

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 2n$. Даны точки $x_k = 2\pi k/m$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Для 2π -периодической функции $f(x)$ тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка не выше n , который минимизирует сумму

$$\sum_{k=0}^{m-1} (f(x_k) - T_n(x_k))^2,$$

называется *полиномом наилучшего квадратичного приближения* $f(x)$ по системе точек x_k . Обозначим его через

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Как известно [1], полином T_n может быть представлен в виде

$$T_n(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \frac{\sin(n + 1/2) \cdot (x - x_k)}{\sin(1/2) \cdot (x - x_k)}.$$

С. Н. Бернштейн [1] доказал, что при условии $f(x) \leq 1$

$$T_n(f, x) < \ln(2n + 1) + 2.$$

Пусть C есть пространство непрерывных 2π -периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$. Будем рассматривать $T_n(f, x)$, как оператор из C в C .

Положим

$$L_n(m) = \|L_n(m, x)\|,$$

где

$$L_n(m, x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{\sin \frac{n}{2} \cdot (x_k - x)}{\sin \frac{1}{2} \cdot (x_k - x)} \right|.$$

Тогда норма оператора T_n равна $L_{2n+1}(m)$. Ясно, что $L_n(m, x)$ есть функция периодическая с периодом $2\pi/m$, поэтому будем считать $-\pi/m \leq x \leq \pi/m$.

В работе [2] получена формула для $L_{2n+1}(m, x)$, с помощью которой можно исследовать асимптотическое поведение $L_{2n+1}(m)$ при условии, что m делится на $2n + 1$.

В настоящей работе будет дано решение задачи об асимптотике норм оператора $T_n(f, x)$ без этого ограничения.

ТЕОРЕМА. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, $n/m \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда:

а) для иррациональных α и для $\alpha = 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(m)}{\ln n} = \frac{4}{\pi^2},$$

б) если $\alpha = r/p$, $(r, p) = 1$, то:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(m)}{\ln n} = \frac{4}{\pi^2}, \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(m)}{\ln n} = \frac{2}{\pi p \cdot \sin(\pi/(2p))} = \eta(p).$$

Кроме того, для любого $\gamma \in [4/\pi^2, \eta(p)]$ существуют $n_k, m_k \in \mathbb{N}$ такие, что $n_k/m_k \rightarrow \alpha$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_{n_k}(m_k)}{\ln n_k} = \gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разложения

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu x}{4\nu^2 - 1}$$

следует, что

$$L_n(m, x) = \frac{8}{\pi m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2 - 1} \sum_{k=2}^{m-1} \frac{\sin^2(\pi n \nu \cdot (k + \rho(x))/m)}{\sin(\pi \cdot (k + \rho(x))/m)} + O(1), \quad (1)$$

где $\rho(x) = -xm/(2\pi)$.

Замечая, что

$$\sum_{k=2}^{m-1} \frac{\sin^2(\pi n \nu \cdot (k + \rho(x))/m)}{\sin(\pi \cdot (k + \rho(x))/m)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin^2(\pi n \nu \cdot (k + \rho(x))/m)}{\sin(\pi k/m)} + O(m),$$

из (1) имеем

$$\begin{aligned} L_n(m, x) &= \frac{4}{\pi m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2 - 1} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \cos(2\pi n \nu \cdot (k + \rho(x))/m)}{\sin(\pi k/m)} + O(1) \\ &= \frac{4 \ln m}{\pi^2} - \frac{4}{\pi m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2 - 1} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\cos(2\pi n \nu \cdot (k + \rho(x))/m)}{\sin(\pi k/m)} + O(1), \quad (2) \end{aligned}$$

так как

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\sin(\pi k/m)} = \frac{2 \ln m}{\pi} + O(1), \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Но

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\cos 2\pi \nu n \cdot (k + \rho(x))/m}{\sin(\pi k/m)} \\ &= \frac{2}{m} \cos 2(\pi \nu n \cdot \rho(x)/m) \sum_{k=1}^{[m/2]} \frac{\cos(2\pi \nu n k/m)}{\sin(\pi k/m)} + O(1) \\ &= \frac{2 \ln m}{\pi} \cos 2\pi \nu n \cdot \frac{\rho(x)}{m} \\ & \quad - \frac{2}{m} \cdot \cos 2\pi \nu n \cdot \frac{\rho(x)}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin^2(\pi \nu n k/m)}{\sin(\pi k/m)} + O(1). \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, так как

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin^2(\pi \nu n k/m)}{\sin(\pi k/m)} = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\nu n} \sin((2j-1)\pi k/m) = \sum_{j=1}^{\nu n} \operatorname{ctg}((2j-1)\pi/(2m))$$

и

$$\sum_{j=1}^{\omega m} \operatorname{ctg}((2j-1)\pi/2m) = 0, \quad \omega \in \mathbb{N},$$

получим

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin^2(\pi \nu n k/m)}{\sin(\pi k/m)} = \sum_{k=1}^{m\{\frac{\nu n}{m}\}} \operatorname{ctg}((2k-1)\pi/(2m)). \quad (4)$$

Обозначая

$$q = m\left\{\frac{\nu n}{m}\right\}, \quad \bar{q} = \min(q; m - q) = m\left\|\frac{\nu n}{m}\right\|,$$

где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \operatorname{ctg}((2k-1)\pi/(2m)) &= \sum_{k=1}^{\bar{q}} \operatorname{ctg}((2k-1)\pi/(2m)) = \frac{2m}{\pi} \sum_{k=1}^{\bar{q}} \frac{1}{2k-1} + O(m) \\ &= \frac{m}{\pi} \ln(1 + \bar{q}) + O(m). \end{aligned}$$

Следовательно, отсюда и из (2), (3), (4) получим

$$L_n(m, x) = \frac{4 \ln m}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu n x \cdot \ln\left(\frac{1}{m} + \left\|\frac{\nu n}{m}\right\|\right)}{4\nu^2 - 1} + O(1), \quad (5)$$

справедливую равномерно по n, m и x .

Докажем пункт а). Пусть $n/m \rightarrow \alpha$. Убедимся, что для иррациональных α

$$\lim_{n/m \rightarrow \alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu n x \cdot \ln \left(\frac{1}{m} + \left\| \frac{\nu n}{m} \right\| \right)}{(4\nu^2 - 1) \ln m} = 0 \quad (6)$$

равномерно по x .

Этот ряд сходится равномерно по n , m и x и так как α иррациональное, то $\|\nu n/m\| \rightarrow \|\nu \alpha\| \neq 0$, т.е. при $n \rightarrow \infty$ каждый член ряда стремится к нулю равномерно по x .

Разделив (5) на $\ln n$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим утверждение теоремы для иррациональных α .

Для доказательства утверждение теоремы при $\alpha = 0$ установим неравенство

$$\frac{2n \ln n}{\pi m} \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{2m} + O(1) \leq L_n(m, x) \leq \frac{2n \ln n}{\pi m \cdot \sin(\pi n/2m)} + O(1) \quad (7)$$

равномерно по n , m , x .

Ввиду того, что функция $1/\sin t - 1/t$ ограничена на $[0, \pi/2]$, имеем

$$\begin{aligned} L_n(m, x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{[m/2]-1} \frac{\sin(\pi n(k + \rho(x))/m)}{k + \rho(x)} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{[m/2]-1} \frac{|\sin(\pi n(k - \rho(x))/m)|}{k - \rho(x)} + O(1). \end{aligned} \quad (8)$$

Функция $\sin(\pi n(k \pm \rho(x))/m)$ имеет нули в точках

$$p_k^{\pm} = k \cdot \frac{m}{n} \mp \rho(x)$$

и

$$p_{[m/2]}^{\pm} = [m/2] + O(1).$$

Но тогда ввиду (8)

$$L_n(m, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{[m/2]} (J_k(\rho) + J_k(-\rho)), \quad (9)$$

где

$$J_k(\pm \rho) = \sum_{j=[p_k^{\pm}]+1}^{[p_{k+1}^{\pm}]} \frac{|\sin(\pi n(j \mp \rho(x))/m)|}{j \mp \rho(x)}.$$

Так как в интервале $j \in (p_k^{\pm}, p_{k+1}^{\pm})$

$$\left| \sin \pi n \frac{(j \pm \rho(x))}{m} \right| = (-1)^k \sin \pi n \cdot \frac{(j \pm \rho(x))}{m}$$

имеем

$$J_k(\pm \rho) \geq \frac{(-1)^k}{p_{k+1}^{\pm} \mp \rho(x)} \sum_{j=[p_k^{\pm}]+1}^{[p_{k+1}^{\pm}]} \sin \pi n \frac{(j \mp \rho(x))}{m} = \frac{nd_k^{\pm}}{2m(k+1) \sin \frac{\pi n}{2m}}, \quad (10)$$

где

$$d_k^\pm = \cos\left(\left(\frac{1}{2} - \{p_k^\pm\}\right) \frac{\pi n}{m}\right) + \cos\left(\left(\frac{1}{2} - \{p_{k+1}^\pm\}\right) \frac{\pi n}{m}\right).$$

Аналогично

$$J_k(\pm\rho) \leq \frac{nd_k^\pm}{2mk \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2m}\right)}, \quad k \neq 0. \quad (11)$$

Используя неравенства

$$2 \cos \frac{\pi n}{2m} \leq d_k^\pm \leq 2$$

и тот факт, что $J_k(\pm\rho) = O(1)$, из (9)–(11) получаем (7), откуда следует утверждение теоремы для $\alpha = 0$, так как

$$\lim_{\frac{n}{m} \rightarrow 0} \frac{2n}{\pi m} \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{2m} = \lim_{\frac{n}{m} \rightarrow 0} \frac{2n}{\pi m \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2m}\right)} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Для доказательства утверждения пункта б) получим формулу

$$L_n(m, x) = \begin{cases} \frac{R(r, p, x) \ln m}{\pi p} + O(1), & \text{если } |\varepsilon|m \leq 3, \\ -\frac{R(r, p, x) \ln |\varepsilon|}{\pi p} + \frac{4}{\pi^2} \ln(|\varepsilon|m) \\ + O_p(\varepsilon \ln m) + O_p(1), & \text{если } |\varepsilon|m > 3, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\varepsilon = \frac{n}{m} - \frac{r}{p}, \quad R(r, p, x) = \sum_{\nu=1}^p \left(\left| \sin\left(\frac{\pi r}{p}(\nu - \rho(x))\right) \right| + \left| \sin\left(\frac{\pi r}{p}(\nu + \rho(x))\right) \right| \right)$$

а O_p показывает, что остаточный член зависит от p .

Имеем

$$\begin{aligned} L_n(m, x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{|\sin(\pi n(i + \rho(x))/m)|}{i} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{|\sin(\pi n(i - \rho(x))/m)|}{i} + O(1) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{\left| \sin\left(\pi\left(\frac{ri}{p} + \varepsilon i + \rho(x)\frac{r}{p}\right)\right) \right| + \left| \sin\left(\pi\left(\frac{ri}{p} + \varepsilon i - \rho(x)\frac{r}{p}\right)\right) \right|}{i} \\ &\quad + O(1) + O(\varepsilon \ln m) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=kp+1}^{(k+1)p} \frac{\left| \sin\left(\pi\left(\frac{ri}{p} + \varepsilon i + \rho(x)\frac{r}{p}\right)\right) \right| + \left| \sin\left(\pi\left(\frac{ri}{p} + \varepsilon i - \rho(x)\frac{r}{p}\right)\right) \right|}{i} \\ &\quad + O_p(1) + O(\varepsilon \ln m) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^p \frac{|\sin(\pi(kp\varepsilon i + z_\nu^+))| + |\sin(\pi(kp\varepsilon i + z_\nu^-))|}{kp + \nu} \\ &\quad + O_p(1) + O(\varepsilon \ln m) \\ &= \frac{1}{\pi p} \sum_{\nu=1}^p J(z_\nu, \varepsilon) + O_p(1) + O(\varepsilon \ln m), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$z_{\nu}^{\pm} = \frac{r(\nu \pm \rho)}{p}, \quad J(z_{\nu}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|\sin(\pi(kp\varepsilon + z_{\nu}^{+}))| + |\sin(\pi(kp\varepsilon + z_{\nu}^{-}))|}{k}. \quad (14)$$

Докажем, что

$$J(z_{\nu}, \varepsilon) = \begin{cases} (|\sin \pi z_{\nu}^{+}| + |\sin \pi z_{\nu}^{-}|) \ln m + O_p(\varepsilon \ln m) + O_p(1), & \text{если } |\varepsilon|m \leq 3, \\ \frac{4}{\pi^2} \ln(|\varepsilon|m) - (|\sin \pi z_{\nu}^{+}| + |\sin \pi z_{\nu}^{-}|) \ln \varepsilon + O_p(1) + O_p(\varepsilon \ln m), & \text{если } |\varepsilon|m > 3. \end{cases} \quad (15)$$

Для $\varepsilon = 0$ это сразу следует из (14). Пусть $\varepsilon \neq 0$.

Так как

$$\int_1^m \frac{|\sin \pi(|\varepsilon|up + z_{\nu}^{\pm})|}{u} du = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \int_k^{k+1} |\sin \pi(|\varepsilon|up + z_{\nu}^{\pm})| du + O(1),$$

имеем

$$\begin{aligned} & \int_1^m \frac{|\sin \pi(|\varepsilon|up + z_{\nu}^{\pm})|}{u} du - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \cdot |\sin \pi(|\varepsilon|kp + z_{\nu}^{\pm})| \\ & \leq \left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \int_k^{k+1} (|\sin \pi(|\varepsilon|up + z_{\nu}^{\pm})| - |\sin \pi(|\varepsilon|kp + z_{\nu}^{\pm})|) du \right| + O(1) \\ & \leq 2\pi|\varepsilon|p \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} + O(1) = O(1) + O_p(\varepsilon \ln m) \end{aligned}$$

равномерно по ν . Отсюда и из (14) следует, что

$$J(z_{\nu}, \varepsilon) = \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|mp} \frac{|\sin \pi(t + z_{\nu}^{+} \operatorname{sg} \varepsilon)| + |\sin \pi(t + z_{\nu}^{-} \operatorname{sg} \varepsilon)|}{t} dt + O_p(\varepsilon \ln m) \quad (16)$$

равномерно по ν .

Пусть $|\varepsilon|m \leq 3$. Тогда, замечая, что для любого $y \in \mathbb{R}$ верна оценка

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin \pi(t \pm y)|}{t} dt - \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin \pi y|}{t} dt \right| \\ & \leq 2 \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin(\pi t/2)|}{t} dt \leq 2 \int_0^{3p} \frac{|\sin(\pi t/2)|}{t} dt = O_p(1), \end{aligned}$$

из (16) получим (15) при $|\varepsilon|m \leq 3$.

Пусть теперь $|\varepsilon|m > 3$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin(\pi(t \pm z_\nu^\pm))|}{t} dt \\ &= \int_{|\varepsilon|p}^{3p} \frac{|\sin(\pi(t \pm z_\nu^\pm))|}{t} dt + \int_{3p}^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin(\pi(t \pm z_\nu^\pm))|}{t} dt \\ &= -|\sin(\pi z_\nu^\pm)| \cdot \ln|\varepsilon| + \int_{3p}^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin(\pi(t \pm z_\nu^\pm))|}{t} dt + O_p(1). \end{aligned} \quad (17)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{3p}^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin(\pi(t \pm z_\nu^\pm))|}{t} dt &= \int_{3p \mp z_\nu}^{|\varepsilon|pm \mp z_\nu} \frac{|\sin \pi t|}{t} dt + O_p(1) \\ &= \int_1^{|\varepsilon|pm} \frac{|\sin \pi t|}{t} dt + O_p(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \ln(|\varepsilon|m) + O_p(1). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (16)–(18) следует (15) и при $|\varepsilon|m > 3$.

Далее из (13)–(15) следует (12).

Пусть $n/m = (r/p) + \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как

$$R(r, p, x) = \frac{2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} - 4r\rho(x)\right) \frac{\pi}{p}\right)}{\sin(\pi/2p)},$$

то

$$\max_x R(r, p, x) = \frac{2}{\sin(\pi/2p)}.$$

Отсюда, применяя (12), получаем

$$L_n(m) = \begin{cases} \eta(p) \ln m + O_p(1), & \text{если } |\varepsilon|m \leq 3; \\ \frac{4}{\pi^2} \ln(m|\varepsilon|) - \eta(p) \ln|\varepsilon| + O_p(1) + O_p(\varepsilon \ln m), & \text{если } |\varepsilon|m > 3. \end{cases} \quad (19)$$

Замечая, что при $|\varepsilon|m > 3$ выполняется неравенство $\ln|\varepsilon| > -\ln m$, из (19) получим

$$\frac{4}{\pi^2} \ln m + O_p(1) + O_p(\varepsilon \ln m) \leq L_n(m) \leq \eta(p) \ln m + O_p(1) + O_p(\varepsilon \ln m),$$

откуда следует, что

$$\varlimsup_{n/m \rightarrow r/p} \frac{L_n(m)}{\ln n} \leq \eta(p), \quad \varliminf_{n/m \rightarrow r/p} \frac{L_n(m)}{\ln n} \geq \frac{4}{\pi^2}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что любое число $\gamma \in [4/\pi^2, \eta(p)]$ есть предельная точка последовательности $L_n(m)/\ln n$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\gamma = \eta(p)$. Положим $n_n = nr - 1$, $m_n = np$. Имеем $\varepsilon = -1/(np)$. Так как $|\varepsilon|m_n < 3$, из (19) получим

$$L_{n_n}(m_n) = \eta(p) \ln m_n + O_p(1) + O_p(\varepsilon \ln m_n),$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n_n}(m_n)}{\ln n_n} = \eta(p).$$

Пусть теперь $\gamma = 4/\pi^2$. Для любого целого $n > 3$ положим $n_n = n([\ln n]r - 1)$, $m_n = np[\ln n]$, откуда $\varepsilon = -1/(p[\ln n])$.

Поскольку $|\varepsilon|m_n > 3$, из (19) имеем

$$L_n(m_n) = \frac{4}{\pi^2} \ln(|\varepsilon|m_n) - \eta(p) \ln |\varepsilon| + O_p(1) + O_p(\varepsilon \ln m_n), \quad (20)$$

и так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varepsilon|}{\ln m_n} = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n_n}(m_n)}{\ln n_n} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Пусть, наконец, $\gamma \in (4/\pi^2, \eta(p))$. Тогда γ можно представить в виде

$$\gamma = \frac{4}{\pi^2}(1-t) + t\eta(p),$$

где

$$t = \frac{\gamma - 4/\pi^2}{\eta(p) - 4/\pi^2}.$$

Замечая, что $0 < t < 1$, положим

$$n_n = [n^{1-t}] (r[n^t] - 1), \quad m_n = [n^{1-t}] [n^t] p$$

Так как $\varepsilon = -1/(p[n^t])$, и $m_n|\varepsilon| > 3$, при $n > n_0(t)$, из (19) имеем (20).

Далее, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varepsilon|}{\ln n_n} = -t,$$

из (20) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n_n}(m_n)}{\ln n_n} = \gamma.$$

Итак, рассмотрены все случаи и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Имеем

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n/m \rightarrow \alpha}} \frac{L_n(m)}{\ln n} = C(\alpha),$$

где $C(\alpha)$ есть функция римановского типа:

$$C(\alpha) = \begin{cases} 4/\pi^2, & \text{если } \alpha \text{ иррациональное или } \alpha = 0, \\ 2/\left(\pi r \sin \frac{\pi}{2p}\right), & \text{если } \alpha = r/p, (r, p) = 1. \end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бернштейн С. Н. О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов // Докл. АН СССР. 1934. Т. 4. № 1. С. 1–8.
- [2] Калашников М. Д. О полиномах наилучшего квадратического приближения в заданной системе точек // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. № 4. С. 634–636.