Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О спектральной последовательности Блоха–Огуза вещественного алгебраического многообразия, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 380–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 02:16:39

УДК 513.6

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ БЛОХА–ОГУЗА ВЕЩЕСТВЕННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Краснов

Для n -мерного неособого вещественного алгебраического многообразия X изучается локально-глобальная спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mathbb{F}_2).$$

Доказывается, что при $q > n$ существует канонический изоморфизм

$$E_2^{p,q} = H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

а дифференциалы $d_r^{p,q}$ равны нулю.

Библиография: 8 названий.

Введение. Пусть X – n -мерное неособое вещественное алгебраическое многообразие (может быть, неполное). Тогда определена локально-глобальная спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mathbb{F}_2), \quad (1)$$

где $\mathcal{H}^q$ – пучок на X_{zar} , соответствующий предпучку $U \mapsto H_{\text{et}}^q(U, \mathbb{F}_2)$. Спектральная последовательность (1) изучалась в работе [1], где было показано, что при $p > q$ члены $E_2^{p,q}$ равны нулю. В [2] установлено, что при $q > n$ существует канонический изоморфизм

$$E_2^{0,q} = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (2)$$

где $X(\mathbb{R})$ – множество вещественных точек, на котором рассматривается евклидова топология. В работе [3] установлено, что при $q > n$ дифференциалы $d_r^{0,q}$ спектральной последовательности (1) равны нулю. Для доказательства этого утверждения в [3] применялись эквивариантные когомологии, с помощью которых было получено простое доказательство равенства (2). В этой заметке мы продолжаем изучение спектральной последовательности (1) с помощью эквивариантных когомологий. Здесь доказывается

ТЕОРЕМА. *При $q > n$ существует канонический изоморфизм*

$$E_2^{p,q} = H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

причем дифференциалы $d_r^{p,q}$ равны нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, и Международного научного фонда.

1. Пучки на X_{zar} . Рассмотрим несколько пучков на X_{zar} . Через $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)$ обозначим пучок, который получается из предпучка $U \mapsto H^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, где $U(\mathbb{C})$ – множество комплексных точек с евклидовой топологией, $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа и $H^q(-; G, \mathbb{F}_2)$ – эквивариантные кохомологии. Так как существует канонический изоморфизм (см. [4])

$$H_{\text{et}}^q(U, \mathbb{F}_2) = H^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

пучок $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)$ совпадает с пучком $\mathcal{H}^q$. Аналогично через $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G)$ обозначим пучок, который получается из предпучка $U \mapsto H^q(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$. Так как существует каноническое разложение (см. [5], [6])

$$H^q(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

получаем разложение пучка

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G) = \bigoplus_{k=0}^q \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^k, \quad (3)$$

где $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^k$ – пучок, соответствующий предпучку $U \mapsto H^k(U(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. В [3] показано, что при $k > 0$ пучок $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^k$ равен нулю; следовательно, из разложения (3) вытекает равенство

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G) = \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0. \quad (4)$$

Гомоморфизм ограничения предпучков

$$\beta^q : H^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(U(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

определяет гомоморфизм пучков

$$\beta^q : \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q(G).$$

В [3] показано, что при $q > n$ он является изоморфизмом. Используем равенство (4). Тогда получим гомоморфизм

$$\beta^{q,0} : \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0,$$

который при $q > n$ является изоморфизмом. Так как $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^k = 0$ при $k > 0$, из локально-глобальной спектральной последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^q) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

вытекает изоморфизм

$$H^p(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0) = H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (5)$$

Из равенства $\mathcal{H}^q = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)$ получим гомоморфизм

$$\beta^{q,0} : \mathcal{H}^q \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0,$$

который при $q > n$ является изоморфизмом. Используем равенство (5). Тогда получим гомоморфизм групп

$$\beta^{q,0} : H^p(X, \mathcal{H}^q) \rightarrow H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

который при $q > n$ является изоморфизмом. Тем самым доказана первая часть теоремы.

2. Гомоморфизмы спектральных последовательностей. Рассмотрим локально-глобальную спектральную последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (6)$$

ЛЕММА 1. *Существует канонический изоморфизм спектральной последовательности (1) в спектральную последовательность (6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эквивариантные этальные когомологии $H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}; G, \mathbb{F}_2)$, где $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$; они совпадают с когомологиями $H_{\text{et}}^q(X, \mathbb{F}_2)$ (см. [7]). Соответствующая локально-глобальная спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}_G^q) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X_{\mathbb{C}}; G, \mathbb{F}_2) \quad (7)$$

совпадает со спектральной последовательностью (1); это вытекает из рассуждений в [7]. Заметим, что пучок $\mathcal{H}_G^q$ на X_{zar} получается из предпучка $U \mapsto H_{\text{et}}^q(U_{\mathbb{C}}; G, \mathbb{F}_2)$. Рассмотрим теперь эквивариантные “эталные” когомологии $H_{\text{et}}^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, где “эталная” топология на $X(\mathbb{C})$ задается локально бигоморфными отображениями $V \rightarrow X(\mathbb{C})$. Соответствующая локально-глобальная спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)_{\text{et}}) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \quad (8)$$

совпадает со спектральной последовательностью (6); это вытекает из рассуждений в [7]. Заметим, что пучок $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)_{\text{et}}$ на X_{zar} получается из предпучка $U \mapsto H_{\text{et}}^q(U(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Морфизм ситусов $X(\mathbb{C})_{\text{et}} \rightarrow (X_{\mathbb{C}})_{\text{et}}$ определяет гомоморфизм спектральной последовательности (7) в спектральную последовательность (8). Из равенств

$$\mathcal{H}^q = \mathcal{H}_G^q, \quad \mathcal{H}^q = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G), \quad \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G) = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)_{\text{et}}$$

получаем, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Лемма доказана.

Факторпространство $X(\mathbb{C})/G$ обозначим через Y , а проекцию $X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ через f . На Y определена топология Зарисского как фактортопология топологии Зарисского на $X(\mathbb{C})$. Соответствующее топологическое пространство обозначим через Y_{zar} . Определен канонический морфизм ситусов $Y_{\text{zar}} \rightarrow X_{\text{zar}}$, а именно, открытому в топологии Зарисского множеству $U \subset X$ сопоставляется множество $U(\mathbb{C})/G \subset Y$. Этот морфизм является изоморфизмом, поэтому все пучки на X_{zar} можно рассматривать как пучки на Y_{zar} . Тогда спектральная последовательность (6) преобразуется в спектральную последовательность

$$E_2^{p,q} = H_{\text{zar}}^p(Y, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (9)$$

Рассмотрим теперь первую спектральную последовательность для эквивариантных когомологий (см. [5])

$$I_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2), \quad (10)$$

где $\mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)$ – пучок на Y , полученный из предпучка $V \mapsto H^q(f^{-1}(V); G, \mathbb{F}_2)$. Тожественное отображение $Y \rightarrow Y_{\text{zar}}$ непрерывно, и оно индуцирует гомоморфизм спектральной последовательности (9) в спектральную последовательность (10).

ЛЕММА 2. При $q > n$ гомоморфизм

$$H_{\text{zar}}^p(Y, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)) \rightarrow H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2))$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пучок $\mathcal{H}^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$ на Y , который возникает из предпучка $V \mapsto H^q(V \cap X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$. При $q > 0$ гомоморфизм ограничения

$$\beta^q : \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{H}^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом (см. [5], [6]). Из разложения предпучка

$$H^q(V \cap X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(V \cap X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

получаем разложение пучка на Y

$$\mathcal{H}^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q \mathcal{H}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

где $\mathcal{H}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – пучок на Y , возникающий из предпучка $V \mapsto H^k(V \cap X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Из равенства нулю пучка $\mathcal{H}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ при $k > 0$ вытекает равенство

$$\mathcal{H}^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \mathcal{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Заметим, что

$$\mathcal{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2|_{X(\mathbb{R})}.$$

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{zar}}^p(Y, \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^q(G)) & \longrightarrow & H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \\ \beta^{q,0} \downarrow & & \beta^{q,0} \downarrow \\ H_{\text{zar}}^p(Y, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & H^p(Y, \mathcal{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)), \end{array} \quad (11)$$

где правый гомоморфизм определяется так же, как левый. Заметим, что при $q > n$ оба гомоморфизма $\beta^{q,0}$ являются изоморфизмами, поэтому достаточно установить, что нижний гомоморфизм в диаграмме (11) всегда является изоморфизмом. Но это вытекает из равенств

$$H_{\text{zar}}^p(Y, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^0) = H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad H^p(Y, \mathcal{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)) = H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Равенство

$$H^p(X, \mathcal{H}^q) = H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

при $q > n$ уже доказано в п. 1. Остается доказать равенство нулю дифференциалов $d_r^{p,q}$ в спектральной последовательности (1) при $q > n$, $r \geq 2$. Из результатов в п. 2 вытекает, что достаточно доказать это утверждение для спектральной последовательности (9). Рассмотрим канонический гомоморфизм спектральной последовательности (9) в спектральную последовательность (10). Так как на предельных группах он индуцирует изоморфизм, а дифференциалы $d_r^{p,q}$ при $q > n$, $r \geq 2$ для спектральной последовательности (10) равны нулю (см. [8]), то гомоморфизм

$$E_r^{0,q} \rightarrow I_r^{0,q} \quad (12)$$

должен быть эпиморфизмом при $q > n$, $r \geq 2$. Применим лемму 2. Тогда получим, что гомоморфизм (12) является изоморфизмом при $q > n$, $r \geq 2$, а дифференциал $d_r^{0,q}$ в спектральной последовательности (9) равен нулю при $q > n$, $r \geq 2$. Рассмотрим теперь гомоморфизм

$$E_r^{1,q} \rightarrow I_r^{1,q}.$$

Тогда аналогично получим, что он является изоморфизмом при $q > n$, $r \geq 2$, а дифференциал $d_r^{1,q}$ в спектральной последовательности (9) равен нулю при $q > n$, $r \geq 2$. Повторяя эти рассуждения, мы получим, что все дифференциалы $d_r^{p,q}$ в спектральной последовательности (9) равны нулю при $q > n$, $r \geq 2$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bloch S., Ogus A. Gersten's conjecture and the homology of schemes // Ann. Sci. 'Ecole Norm. Sup. 1974. V. 7. P. 181–202.
- [2] Colliot-Thélène J.-L., Parimala R. Real components of algebraic varieties and etale cohomology // Invent. Math. 1990. V. 101. P. 81–99.
- [3] Краснов В. А. Этальные и эквивариантные когомологии вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
- [4] Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and Its Applications. Yaroslavl, 1992. P. 114–136.
- [5] Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
- [6] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [7] Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
- [8] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.