Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Протасов, Малые системы образующих групп, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 420–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:03:04

УДК 512.536

МАЛЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАЗУЮЩИХ ГРУПП

И. В. Протасов

Подмножество S группы G называется *большим* (большим слева), если найдется такое конечное подмножество K , что $G = KS = SK$ ($G = KS$). Подмножество S группы G называется *малым* (малым слева), если подмножество $G \setminus KSK$ ($G \setminus KS$) большое (большое слева). Доказаны следующие утверждения:

- 1) любая бесконечная группа порождается некоторым малым подмножеством;
- 2) в любой бесконечной группе G существует такое малое слева подмножество S , что $G = SS^{-1}$;
- 3) любую бесконечную группу можно разбить на счетное число малых слева подмножеств, каждое из которых порождает группу.

Библиография: 6 названий.

Подмножество L группы G называется *большим*, если существует такое конечное подмножество $K \subseteq G$, что $G = KL = LK$. Подмножество S группы G называется *малым*, если подмножество $G \setminus KSK$ большое для любого конечного подмножества K . Семейство всех малых подмножеств образует идеал в булевой алгебре всех подмножеств группы [1].

Верно ли, что любая бесконечная группа порождается некоторым малым подмножеством?

Для абелевых групп это так [2]. Первая теорема этой заметки дает ответ на данный вопрос. Для подмножества A группы G обозначим $\text{gr}(A)$ подгруппу группы G , порожденную подмножеством A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – бесконечная группа, $A \subseteq G$ и $G = \text{gr}(A)$. Тогда существует малое подмножество $S \subseteq A$ такое, что $G = \text{gr}(S)$. Если группа G аменабельна, то подмножество S можно выбрать так, что $\mu(S) = 0$ для любой банаховой меры μ на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как любое конечное подмножество бесконечной группы мало, можно считать, что $G \neq \text{gr}(F)$ для любого конечного подмножества $F \subseteq A$. Построим индуктивно систему образующих $S = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ группы G такую, что $S \subseteq A$ и $x_\alpha \notin G_\alpha$, где G_α – подгруппа, порожденная подмножеством $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, $0 < \alpha < \gamma$. Докажем, что подмножество S мало. Возьмем любое конечное подмножество $K \subset G$, $|K| = k$, и покажем, что подмножество $G \setminus KSK$ большое. Выберем ординал $\beta < \gamma$ так, чтобы $K \subset G_\beta$ и $|G_\beta| > k^2$. Положим $X = \{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}$. Поскольку $Kx_\alpha K \subseteq G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$, то

$$|KXK \cap (G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha)| \leq k^2 \quad (*)$$

для любых $\alpha \geq \beta$. Выберем любое конечное подмножество $F_1 \subseteq G_\beta$, $|F_1| > k^2$ и положим $F = F_1 \cup x_\beta F_1$. Покажем, что

$$G = F^{-1}(G \setminus KSK) = (G \setminus KSK)F^{-1}.$$

Допустим противное и выберем элемент $g \in G$ так, что $Fg \subseteq KSK$ либо $gF \subseteq KSK$. Если $g \notin G_\beta$, то $g \in G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$ для некоторого ординала $\alpha \geq \beta$. Следовательно, либо $Fg \subseteq G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$, либо $gF \subseteq G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$, что противоречит (*). Если $g \in G_\beta$, то либо $(x_\beta F_1)g \subseteq G_{\beta+1} \setminus G_\beta$, либо $g(x_\beta F_1) \subseteq G_{\beta+1} \setminus G_\beta$, что противоречит (*).

Предположим, что G аменабельна и докажем, что $\mu(S) = 0$. Допустим противное и выберем натуральное число n так, что $\mu(S) > 1/n$. Положим $Y = \{x_\alpha : n \leq \alpha < \gamma\}$. Тогда $Y \subset S$ и подмножество $S \setminus Y$ конечно. Следовательно, $\mu(Y) = \mu(S)$. Рассмотрим семейство подмножеств $x_0 Y, x_1 Y, \dots, x_{n-1} Y$. По построению S это семейство дизъюнктно. Так как $\mu(x_0 Y) = \mu(x_1 Y) = \dots = \mu(x_{n-1} Y) = \mu(Y)$ и $\mu(Y) > 1/n$, то $\mu(G) > 1$; противоречие.

Подмножество L группы G называется *большим слева*, если $G = KL$ для некоторого конечного подмножества $K \subseteq G$. Подмножество S группы G называется *малым слева*, если подмножество $G \setminus KS$ большое слева для любого конечного подмножества $K \subseteq G$.

ТЕОРЕМА 2. *В любой бесконечной группе G существует малое слева подмножество S такое, что $G = SS^{-1}$. Если группа G аменабельна, то подмножество S можно выбрать так, что $\mu(S) = 0$ для любой банаховой меры μ на G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{g_\alpha : \alpha < \gamma\}$ – пересчет группы G , g_0 – единица, $G_\beta = \{g_\alpha : \alpha \leq \beta\}$, $\beta < \gamma$. Так как $|G_\beta| < \gamma$ для любого ординала $\beta < \gamma$, легко построить индуктивно подмножество $\{a_\alpha : \alpha < \gamma\}$ группы G , удовлетворяющее условию

$$(G_\beta a_\alpha \cup G_\beta g_\alpha a_\alpha) \cap (G_\beta a_\beta \cup G_\beta g_\beta a_\beta) = \emptyset. \quad (**)$$

Положим $S = \{a_\alpha : \alpha < \gamma\} \cup \{g_\alpha a_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Очевидно, $G = SS^{-1}$. Покажем, что подмножество S мало слева. Зафиксируем любое конечное подмножество $F \subset G$ и выберем $\beta_1 < \gamma$ так, что $F \subset G_{\beta_1}$. Возьмем любой элемент $g \in G \setminus F$ и выберем $\beta_2 \geq \beta_1$ так, что $g \notin Fg_\alpha \cup Fg_\alpha^{-1}$ для всех $\alpha \geq \beta_2$. Выберем $\beta \geq \beta_2$ так, чтобы $F^{-1}g \subseteq G_\beta$. Положим

$$S_0 = \{a_\alpha : \alpha < \beta\} \cup \{g_\alpha a_\alpha : \alpha < \beta\}, \quad S_1 = S \setminus S_0.$$

Предположим, что $gS_1 \cap FS \neq \emptyset$. Тогда найдутся такие ординалы $\alpha, \lambda, \alpha \geq \beta$, что

$$\{ga_\alpha, gg_\alpha a_\alpha\} \cap \{Fa_\lambda, Fg_\lambda a_\lambda\} \neq \emptyset.$$

Если $\lambda \neq \alpha$, то получаем противоречие с условием (**), поскольку $F^{-1}g \subseteq G_\beta \subseteq G_\alpha$. Если $\alpha = \lambda$, то выполняется одно из следующих условий:

$$g \in F, \quad g \in Fg_\alpha, \quad g \in Fg_\alpha^{-1},$$

каждое из которых противоречит выбору g .

Итак, $gS_1 \cap FS = \emptyset$; следовательно, $FS_1 \subseteq Fg^{-1}(G \setminus FS)$. Поскольку $|FS_0| < \gamma$, найдется такой элемент $h \in G$, что $hFS_0 \cap FS_0 = \emptyset$. Следовательно,

$$FS_0 \subseteq h^{-1}(G \setminus FS_0) \subseteq h^{-1}(G \setminus FS) \cup h^{-1}FS_1, \\ FS \subseteq h^{-1}(G \setminus FS) \cup h^{-1}Fg^{-1}(G \setminus FS) \cup Fg^{-1}(G \setminus FS).$$

Положим $K = \{h^{-1}\} \cup h^{-1}Fg^{-1} \cup Fg^{-1} \cup \{g_0\}$. Тогда $G = K(G \setminus FS)$ и подмножество $G \setminus FS$ большое слева.

Предположим, что группа G аменабельна. Используя условие (**), выберем индуктивно возрастающую последовательность $m_1, m_2, \dots$ натуральных чисел так, чтобы $g_n S(m_n) \cap G_{n-1} S = \emptyset$, где $S(k) = \{a_\alpha : \alpha \geq k\} \cup \{g_\alpha a_\alpha : \alpha \geq k\}$. Ясно, что $\mu(g_n S(m_n)) = \mu(S(m_n)) = \mu(S)$. По построению семейство $\{g_n S(m_n) : 0 < n < \omega\}$ дизъюнктно. Следовательно, $\mu(S) = 0$.

ВОПРОС 1. *Можно ли в любой бесконечной группе G выбрать такое малое подмножество S , что $G = SS^{-1}$?*

ТЕОРЕМА 3. *Любую бесконечную группу G можно разбить на счетное число подмножеств $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ так, что $G = \text{gr}(S_n)$ и каждое подмножество S_n мало слева. Если группа G аменабельна, то разбиение можно выбрать так, что $\mu(S_n) = 0$ для любого подмножества S_n и любой банаховой меры μ на G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале предположим, что группа G порождается некоторым конечным подмножеством F , содержащим единицу e группы G . Выберем индуктивно последовательность $a_1, a_2, \dots$ элементов группы G такую, что $a_n F \cap a_m F = \emptyset$ при $n \neq m$. Разобьем группу $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ на конечные подмножества так, что $a_n F_n \subseteq S_n$ и заметим, что каждое конечное подмножество бесконечной группы мало.

Допустим, что группа G не является конечно порожденной, $|G| = \gamma$. Построим индуктивно цепь $\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ подгрупп группы G так, чтобы выполнялись следующие условия:

- (i) $G_0 = \{e\}, G = \bigcup \{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$;
- (ii) $G_\alpha \subset G_\beta$ для любых ординалов $\alpha < \beta < \gamma$;
- (iii) $\bigcup \{G_\alpha : \alpha < \beta\} = G_\beta$ для любого предельного ординала β .

Для каждого ординала $\alpha < \gamma$ разложим подмножество $G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$ на правые смежные классы по подгруппе G_α и зафиксируем некоторое подмножество X_α представителей смежных классов. Таким образом, $G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha = G_\alpha X_\alpha$.

Возьмем произвольный элемент $g \in G, g \neq e$, и выберем наименьшую подгруппу G_α , содержащую g . По условию (iii) $\alpha = \alpha_1 + 1$ для некоторого ординала $\alpha_1 < \gamma$. Значит, $g \in G_{\alpha_1+1} \setminus G_{\alpha_1}$ и $g = g_1 x_{\alpha_1}, g_1 \in G_{\alpha_1}, x_{\alpha_1} \in X_{\alpha_1}$. Если $g_1 \neq e$, выберем ординал α_2 , элементы $g_2 \in G_{\alpha_2}, x_{\alpha_2} \in X_{\alpha_2}$ так, что $g_1 = g_2 x_{\alpha_2}$. Поскольку множество ординалов $< \gamma$ вполне упорядочено, через конечное число $s(g)$ шагов получим представление

$$g = x_{\alpha_{s(g)}} x_{\alpha_{s(g)-1}} \dots x_{\alpha_2} x_{\alpha_1}, \quad \alpha_{s(g)} < \dots < \alpha_1, \quad x_{\alpha_i} \in X_{\alpha_i}.$$

Заметим, что такое представление однозначно и положим

$$\nu_1(g) = \alpha_1, \quad \nu_2(g) = \alpha_2, \quad \dots, \quad \nu_{s(g)}(g) = \alpha_{s(g)}, \quad \Gamma(g) = \{\nu_1(g), \dots, \nu_{s(g)}(g)\}.$$

Для каждого натурального числа n положим $D_n = \{g \in G: s(g) = n\}$. Покажем, что подмножество $G_\alpha D_n$ мало слева для всех α, n . Возьмем любое конечное подмножество $F \subset G$ и выберем $\beta < \gamma$ так, чтобы $F \subset G_\beta$ и $G_\alpha \subseteq G_\beta$. Так как $FG_\alpha D_n \subseteq G_\beta D_n$, то достаточно показать, что подмножество $G \setminus G_\beta D_n$ большое слева. Зафиксируем элементы $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ группы G такие, что

$$a_1 \in G_{\beta+1} \setminus G_\beta, \quad a_2 \in G_{\beta+2} \setminus G_{\beta+1}, \quad \dots, \quad a_{n+1} \in G_{\beta+n+1} \setminus G_{\beta+n}.$$

Возьмем любой элемент $g \in G_\beta D_n$ и положим $g = g_0$. Если $\beta + n \in \Gamma(g)$, то положим $\varepsilon_0 = 0$; иначе, $\varepsilon_0 = 1$. Заметим, что $\beta + n \in \Gamma(a_{n+1}^{\varepsilon_0} g_0)$ и положим $g_1 = a_{n+1}^{\varepsilon_0} g_0$. Если $\beta + n - 1 \in \Gamma(g_1)$, то положим $\varepsilon_1 = 0$; иначе, $\varepsilon_1 = 1$. Заметим, что $\{\beta + n - 1, \beta + n\} \subseteq \Gamma(a_n^{\varepsilon_1} g_1)$, и положим $g_2 = a_n^{\varepsilon_1} g_1$. После $(n + 1)$ -го шага получаем

$$\{\beta, \beta + 1, \dots, \beta + n\} \subseteq \Gamma(a_1^{\varepsilon_n} a_2^{\varepsilon_{n-1}} \dots a_{n+1}^{\varepsilon_0} g).$$

Это значит, что $(a_1^{\varepsilon_n} a_2^{\varepsilon_{n-1}} \dots a_{n+1}^{\varepsilon_0} g) \notin G_\beta D_n$. Обозначим $A = \{e, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$, $K = A^{n+1}$. Мы доказали, что $KG_\beta D_n \cap G_\beta D_n = \emptyset$. Следовательно, $G = K^{-1}(G \setminus G_\beta D_n)$, т.е. подмножество $G_\beta D_n$ мало слева.

Положим $S_1 = D_1 \cup \{e\}$, $S_2 = D_2 \cup D_3$, $S_3 = D_4 \cup D_5, \dots$. Ясно, что $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ и $S_n \cap S_m = \emptyset$ при $n \neq m$. Так как $D_1 \subseteq \text{gr}(S_n)$ и $\text{gr}(D_1) = G$, то $G = \text{gr}(S_n)$. Поскольку каждое подмножество D_n мало слева, то и S_n мало слева.

Предположим, что группа G аменабельна. Если G конечно порождена, то второе утверждение теоремы очевидно. Если G не является конечно порожденной, то цепь подгрупп $\{G_\alpha: \alpha < \gamma\}$ можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла дополнительному условию

$$(iv) \quad |G_{n+1}: G_n| > n \text{ для всех } n < \omega.$$

Достаточно показать, что $\mu(D_n) = 0$. Возьмем произвольное натуральное число m и убедимся, что $\mu(D_n) < 1/m$. Положим $D_n(k) = \{g \in G: (n + 1)m + k \notin \Gamma(g)\}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Из определения подмножества D_n следует, что $D_n = \bigcup_{k=0}^n D_n(k)$. Выберем произвольное подмножество Y_k представителей левых смежных классов подгруппы $G_{(n+1)m+k+1}$ по подгруппе $G_{(n+1)m+k}$. Заметим, что семейство $\{yD_n(k): y \in Y_k\}$ дизъюнктно. Из условия (iv) следует, что

$$\mu(D_n(k)) < \frac{1}{(n + 1)m}.$$

Значит, $\mu(D_n) < 1/m$.

ВОПРОС 2. Можно ли любую бесконечную группу разбить на счетное число малых подмножеств, каждое из которых порождает группу?

ТЕОРЕМА 4. Пусть H – группа, снабженная неметризуемой хаусдорфовой топологией τ , в которой непрерывны все левые сдвиги $x \mapsto hx$, $h \in H$. Тогда H порождается подмножеством с пустой внутренностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Цорна топологию τ можно усилить до максимальной неметризуемой левоинвариантной топологии τ' . Достаточно показать, что (H, τ') порождается некоторым дискретным подмножеством D . По определению топологии τ' подмножество D имеет пустую внутренность в (H, τ) .

Пусть γ – минимальная мощность непустых открытых подмножеств группы (H, τ') , U – окрестность единицы e в (H, τ') мощности γ , G – подгруппа, порожденная подмножеством U , $H = GX$ – разложение группы H на правые смежные классы по подгруппе G , $e \in X$. Если G порождается конечным подмножеством F , то FX – дискретная система образующих (H, τ') . Если G не является конечно порожденной, то определим цепь подгрупп $\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$, удовлетворяющую условиям (i), (ii), (iii) предыдущей теоремы. По теореме 3.1 из [3] каждое подмножество D_n дискретно и замкнуто. Следовательно, D_1X – дискретная система образующих группы (H, τ') .

ВОПРОС 3. Верно ли, что любая неметризуемая хаусдорфова левотопологическая группа порождается некоторым нигде не плотным подмножеством?

Для счетных регулярных левотопологических групп ответ утвердительный. Такая группа порождается даже некоторым дискретным замкнутым подмножеством. В [4] это доказано для топологических групп, однако некоторое усовершенствование доказательства позволяет распространить утверждение и на регулярные левотопологические группы.

По теореме 11.5 из [5], для любого конечного разбиения

$$G = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

произвольной группы G найдется такое подмножество A_i разбиения, что справедливы следующие утверждения:

- 1) $G = KA_iA_i^{-1}$ для некоторого конечного подмножества $K \subseteq G$;
- 2) $(A_iA_i^{-1})^m$ – подгруппа группы G для некоторого натурального числа m ;
- 3) $f(A_i) \cap A_iA_i^{-1}A_iA_i^{-1} \neq \emptyset$ для любого гомоморфизма $f: G \rightarrow G$.

Следующая теорема, которой предшествуют три леммы, является уточнением этого результата.

ЛЕММА 1. Пусть $F, A_1, A_2, \dots, A_n$ – подмножества группы G такие, что

$$G = F(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

и $|F| \leq m$, $1 \leq m < \omega$. Тогда найдутся индекс $i \in \{1, \dots, n\}$, конечное подмножество $K \subseteq G$ такие, что

$$G = KA_iA_i^{-1}, \quad |K| \leq f(n, m),$$

где функция $f(n, m)$ определена рекуррентным соотношением

$$f(1, m) = m, \quad f(n+1, m) = f(n, m+m^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по n . Для $n = 1$ имеем $G = FA_1$. Так как $G = FA_1g$ для любого элемента $g \in G$, то $G = FA_1A_1^{-1}$. Положим $K = F$.

Пусть $G = F(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n+1})$, $|F| \leq m$. Рассмотрим два случая.

1. Существует элемент $g \in G$ такой, что $gA_1 \subseteq F(A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{n+1})$. Тогда

$$A_1 \subseteq g^{-1}F(A_2 \cup \dots \cup A_{n+1}), \quad FA_1 \subseteq Fg^{-1}F(A_2 \cup \dots \cup A_{n+1}).$$

Следовательно,

$$G = (F \cup Fg^{-1}F)(A_2 \cup \dots \cup A_{n+1}).$$

Так как $|F \cup Fg^{-1}F| \leq m + m^2$, по предположению индукции найдутся $i \in \{2, \dots, n+1\}$ и конечное подмножество $K \subseteq G$ такие, что

$$G = KA_iA_i^{-1}, \quad |K| \leq f(n, m + m^2) = f(n + 1, m).$$

2. Для любого элемента $g \in G$ gA_1 не содержится в подмножестве $F(A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{n+1})$. Так как $G = FA_1 \cup F(A_2 \cup \dots \cup A_{n+1})$, то $gA_1 \cap FA_1 \neq \emptyset$ для любого элемента $g \in G$. Следовательно, $G = FA_1A_1^{-1}$.

Положим $K = F$ и заметим, что $|K| \leq m \leq f(n + 1, m)$.

ЛЕММА 2. Функция $f(n, m)$, определенная рекуррентным соотношением

$$f(1, m) = m, \quad f(n + 1, m) = f(n, m + m^2),$$

удовлетворяет неравенству

$$f(n, m) \leq 2^{2^{n-1}-1} m^{2^{n-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ справедливо равенство. Для $n > 1$ имеем

$$\begin{aligned} f(n, m) &\leq f(n - 1, 2m^2) \leq f(n - 2, 2^{1+2}m^2) \leq f(n - 3, 2^{1+2+2^2}m^2) \\ &\leq \dots \leq f(1, 2^{1+2+\dots+2^{n-2}}m^{2^{n-1}}) = 2^{2^{n-1}-1}m^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть G – группа с единицей e , $S \subseteq G$, $S = S^{-1}$, $e \in S$. Если $G = KS$, $|K| = k$, то $S^{4^{k-1}}$ – подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по k . Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть $G = a_1S \cup a_2S \cup \dots \cup a_{k+1}S$. Если $a_1S^2 = a_1S$, то S – подгруппа. Иначе, найдется индекс $i \in \{2, \dots, k+1\}$ такой, что $a_1S^2 \cap a_iS \neq \emptyset$. Значит, $a_1 \in a_iS^3$ и $a_1S \subseteq a_iS^4$. Следовательно, $G = a_2S^4 \cup \dots \cup a_{n+1}S^4$. По предположению индукции $(S^4)^{4^{k-1}} = S^{4^k}$ – подгруппа.

ТЕОРЕМА 5. Если группа G разбита на n частей $G = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, то найдутся такие подмножество разбиения A_i , натуральное число $k \leq 2^{2^{n-1}-1}$ и подмножество $K \subseteq G$, что $G = KA_iA_i^{-1}$, $|K| = k$ и $(A_iA_i^{-1})^{4^{k-1}}$ – подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем лемму 1 с подмножеством $F = \{e\}$, а затем леммы 2, 3.

ТЕОРЕМА 6. Если аменабельная группа G разбита на n частей $G = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, то найдутся такие подмножество разбиения A_i и подмножество $K \subseteq G$, $|K| \leq n$, что $G = KA_iA_i^{-1}$ и $(A_iA_i^{-1})^{4^{n-1}}$ – подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – фиксированная банахова мера на G . Выберем подмножество A_i максимальной меры $\mu(A_i) \geq 1/n$. Выберем максимальное дизъюнктное семейство подмножеств $\{a_k A_i : k \leq n\}$ группы G и положим $K = \{a_1, \dots, a_k\}$. Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Тогда $gA_i \cap a_k A_i \neq \emptyset$ для некоторого $k \leq n$. Следовательно, $g \in a_k A_i A_i^{-1}$ и $G = KA_i A_i^{-1}$. Далее применяем лемму 3.

ВОПРОС 4 [6, задача 13.44]. Пусть группа G разбита на n частей $G = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Верно ли, что найдутся такие подмножество $K \subseteq G$, $|K| = n$, и подмножество разбиения A_i , что $G = KA_i A_i^{-1}$?

Для $n \leq 2$ это так по теореме 5. Для аменабельной группы G и произвольного n ответ также положительный по теореме 6.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bella A., Malykhin V. I. On certain subsets of a group // Questions Answers Gen. Topology. 1999. V. 17. № 2. P. 183–197.
- [2] Malykhin V. I., Moresco R. Small generated groups // Questions Answers Gen. Topology. 2001. V. 19. P. 1–7.
- [3] Протасов И. В. Максимальные топологии на группах // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 6. С. 1368–1381.
- [4] Comfort W. W., Morris S. A., Robbie D., Svetlichny S., Tkachenko M. Suitable sets for topological groups // Topology Appl. 1998. V. 86. № 1. P. 25–46.
- [5] Protasov I. Combinatorics of Numbers. Math. Stud. Monograph Ser. V. 2: VNTL Publishers, 1997.
- [6] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 13-е изд. Новосибирск, 1995.

Киевский национальный университет им. Т. Шевченка
E-mail: kseniya@profit.net.ua

Поступило
21.11.2001
Исправленный вариант
01.07.2002