Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Муравей, А. В. Филиновский, Оценки скорости убывания решения импедансной смешанной задачи для волнового уравнения в области с некомпактной границей, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 393–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 03:59:54

УДК 517

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЯ ИМПЕДАНСНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С НЕКОМПАКТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Л. А. Муравей, А. В. Филиновский

Работа посвящена исследованию поведения при больших значениях времени следующей смешанной задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, \quad t > 0, x \in \Omega, \quad u|_{t=0} = f, \quad u_t|_{t=0} = h, \\ u|_{x \in \Gamma_1} &= 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x \in \Gamma_2} = 0, \end{aligned}$$

где Ω – неограниченная область $\mathbb{R}_n$ с, вообще говоря, некомпактной границей $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, поверхность Γ_1 – звездная (относительно начала координат), ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$; начальные функции f и g предполагаются достаточно гладкими и финитными. При определенных условиях на несущую импедансное условие часть границы Γ_2 устанавливается, что можно так согласовать выбор импеданса $g \geq 0$, характеризующего поглощение энергии поверхностью Γ_2 , с геометрическими свойствами этой поверхности, что энергия на произвольном компакте будет убывать со скоростью, которая характерна для случая первой смешанной задачи.

Библиография: 7 названий.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – неограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; поверхность Γ_1 – звездная (относительно начала координат), т.е. на Γ_1 выполнено неравенство

$$(\nu, x) \leq 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (1)$$

где ν – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к Γ , а на Γ_2 – выполнено обратное неравенство

$$(\nu, x) > 0, \quad x \in \Gamma_2 \quad (2)$$

(Γ_1 и Γ_2 могут быть неограниченными).

В полубесконечном цилиндре $(t > 0) \times \Omega$ рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = 0. \quad (3)$$

Предположим, что при $t = 0$ заданы начальные условия

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = h(x). \quad (4)$$

Кроме того, при всех $t > 0$ на Γ_1 выполнено первое краевое условие

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad (5)$$

а на Γ_2 – импедансное краевое условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) |_{\Gamma_2} = 0 \quad (6)$$

(являющееся нестационарным аналогом известного условия Леонтовича–Фока [1]).

Функции $f(x)$ и $h(x)$ будем предполагать вещественнозначными, гладкими и финитными в Ω , а функцию $g(x)$, называемую *импедансом* (см. [1]), – неотрицательной на Γ .

Работа посвящена исследованию поведения при больших значениях времени t решения $u(t, x)$ задачи (3)–(6).

Нетрудно проверить, что для решения задачи (3)–(6) справедлив следующий закон сохранения

$$E_{\Omega'}(t) + 2 \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_2} g(x) u_\tau^2 ds = E_{\Omega}(0), \quad (7)$$

где $E_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx$ – энергия, сосредоточенная в подобласти $\Omega' \subset \Omega$ в момент времени $t \geq 0$ (в (7) $\Omega' = \Omega$). Если поверхность Γ звездная ($\Gamma = \Gamma_1$), то этот закон превращается в закон сохранения энергии: $E_{\Omega}(t) = E_{\Omega}(0)$, $t > 0$.

При этом для таких областей, содержащих некоторый конус, с течением времени t энергия будет рассеиваться на бесконечность (см., например, [2]), т.е. для любой ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$

$$E_{\Omega'}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Более того, в [2] установлена степенная (точная в степенной шкале) скорость убывания локальной энергии $E_{\Omega'}(t)$.

Из полученных в [2] оценок следует также, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа $T(\varepsilon)$ и $A(\varepsilon)$, что при $t \geq T$ вся энергия $E_{\Omega'}(t)$ с точностью до ε сосредоточена в области $\Omega \cap \{t - A\sqrt{t} < |x| < t + A\sqrt{t}\}$ и поверхность $\{|x| = t\} \cap \Omega$, так называемый энергетический волновой фронт, уносит энергию на бесконечность, при этом ширина энергетической зоны, т.е. области, где сосредоточена почти вся энергия решения, имеет порядок $\sqrt{t}$ (отметим, что такими же свойствами обладает и решение задачи Коши, $\Omega = \mathbb{R}^n$). Условие (1) в этом случае имеет наглядный физический смысл: при взаимодействии фронта с Γ он отражается в сторону увеличения расстояния $r = |x|$.

Предположим теперь, что поверхность Γ имеет незвездную часть ($\Gamma_2 \neq \emptyset$). Отметим, что при $g(x) \not\equiv 0$ поверхность Γ_2 поглощает энергию и, как вытекает из (7), функция $E_{\Omega}(t)$ монотонно убывает по t при $t > 0$.

Как показано в [3], в случае ограниченной области Ω импеданс может быть выбран таким, что энергия $E_{\Omega}(t)$ убывает экспоненциально. Заметим, что в нашем случае неограниченной области Ω и неограниченной Γ_2 волновой фронт должен отражаться в сторону уменьшения r и, тем самым, $E_{\Omega}(t)$ должна была бы “запираться” в ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$. Однако, при согласовании импеданса $g(x)$ (характеризующего поглощение энергии поверхностью Γ_2) с геометрическими свойствами границы Γ_2 этого не происходит – решение задачи (3)–(6) убывает при $t \rightarrow \infty$ как некоторая степень t .

Более того, в работе [4] показано, что для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, существует функция $g(x)$, $0 < g(x) \leq 1$, $x \in \Gamma_2$, такая, что

$$E_{\Omega'}(t) \leq \frac{C}{t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$\int_0^\infty E_{\Omega'}(t)(1+t)^{1-\sigma} dt < \infty, \quad \sigma > 0. \quad (10)$$

Таким образом, при соответствующем выборе импеданса $g(x)$ на незвездной части границы $E_{\Omega'}(t)$ удовлетворяет при $t \rightarrow \infty$ тем же оценкам, что и локальная энергия первой смешанной задачи в звездной области [2].

Однако, при $n \geq 3$ известны более точные, чем (9), (10), оценки скорости убывания по t локальной энергии первой смешанной задачи в звездной области.

В работе [5] показано, что при $n \geq 3$, $\Gamma_2 = \emptyset$ справедлива оценка

$$E_{\Omega'}(t) \leq \frac{C}{t^2}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

В настоящей работе доказывается, что если поверхность Γ_2 удовлетворяет определенным условиям, то для локальной энергии при соответствующем выборе импеданса $g(x)$ справедлива оценка (11).

Будем говорить, что область Ω удовлетворяет равномерному условию сферы, если найдется число $R_0 > 0$ такое, что для каждой точки $x \in \Gamma$ существуют шары $B_{R_0}^{(j)}(y_j) = \{y : |y - y_j| < R_0\}$, $j = 1, 2$, $B_{R_0}^{(1)}(y_1) \subset \Omega$, $B_{R_0}^{(2)}(y_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, $\overline{B_{R_0}^{(1)}}(y_1) \cap \overline{B_{R_0}^{(2)}}(y_2) = x$. Это условие предполагается выполненным во всех утверждениях настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n > 3$. Тогда существуют функция $g(x)$, $0 < g(x) \leq 1$, $x \in \Gamma_2$, и постоянная $C_1 > 0$ такие, что для областей Ω , удовлетворяющих условию

$$|\cos(\nu, x)| \leq \frac{C_1}{r}, \quad x \in \Gamma_2, \quad (12)$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2r^{n-1}} \left((t+r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}} u \right)_r + (r^{\frac{n-1}{2}} u)_t \right)^2 + (t-r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}} u)_r - (r^{\frac{n-1}{2}} u)_t \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (t^2 + r^2) \left(|\nabla_K u|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} u^2 \right) \right) dx \leq C_2 \int_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2 + h^2) dx, \\ t > 0, \quad |\nabla_K u|^2 = |\nabla u|^2 - u_r^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где постоянная C_2 зависит от $\text{supp}(|f| + |h|)$.

(Отметим, что касательный градиент $\nabla_K u$ связан с угловым градиентом $\nabla_{\Theta} u$ (см. [4]) соотношением $\nabla_K u = (1/r) \nabla_{\Theta} u$.)

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (3)–(6) справедлива оценка (11), где $\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 0 &= (u_{tt} - \Delta u) \left(2((t^2 + r^2)u_t + 2tru_r + (n-1)tu) \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2r^{n-1}} \left((t+r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}}u \right)_r + (r^{\frac{n-1}{2}}u)_t \right)^2 + (t-r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}}u)_r - (r^{\frac{n-1}{2}}u)_t \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + (t^2 + r^2) \left(|\nabla_K u|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} u^2 \right) \right)_t \\
 &\quad + \operatorname{div} \left\{ -2txu_t^2 - 2(t^2 + r^2)u_t \nabla u - 4tru_r \nabla u \right. \\
 &\quad \left. + 2tx|\nabla u|^2 - 2(n-1)tu \nabla u - x \left(\frac{t^2 + r^2}{r^2} u^2 \right)_t \right\}. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем соотношение (14) по цилиндру $(0, t) \times \Omega$ с учетом граничных условий (5) и (6).

Получим равенство

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2r^{n-1}} \left((t+r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}}u \right)_r + (r^{\frac{n-1}{2}}u)_t \right)^2 + (t-r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}}u)_r - (r^{\frac{n-1}{2}}u)_t \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + (t^2 + r^2) \left(|\nabla_K u|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} u^2 \right) \right) dx - 2 \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_1} \tau(\nu, x) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 ds \\
 &\quad + \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_2} (-2\tau(\nu, x)u_\tau^2 - 2(\tau^2 + r^2)u_\tau u_\nu \\
 &\quad - 4\tau r u_r u_\nu + 2\tau(\nu, x)|\nabla u|^2 - 2(n-1)\tau u u_\nu) ds - \int_{\Gamma_2} (\nu, x) \frac{t^2 + r^2}{r^2} u^2 ds \\
 &= \int_{\Omega} \left(r^2(h^2 + |\nabla f|^2) + (n-1)rff_r + \frac{(n-1)(n-2)}{2}f^2 \right) dx, \quad t > 0.
 \end{aligned}$$

Пусть $g(x) = (\nu, x)/r$. Имеем

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2r^{n-1}} \left((t+r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}}u \right)_r + (r^{\frac{n-1}{2}}u)_t \right)^2 + (t-r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}}u)_r - (r^{\frac{n-1}{2}}u)_t \right)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + (t^2 + r^2) \left(|\nabla_K u|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} u^2 \right) \right) dx \\
 &= 2 \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_1} \tau(\nu, x) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 ds \\
 &\quad - 2 \int_0^t \tau d\tau \int_{\Gamma_2} (\nu, x) \left(\left(\frac{(\tau^2 + r^2)}{\tau r} - 1 \right) u_\tau^2 + 2u_\tau u_r + |\nabla u|^2 \right) ds \\
 &\quad - 2(n-1) \int_0^t \tau d\tau \int_{\Gamma_2} \frac{(\nu, x)}{r} u u_\tau ds + \int_{\Gamma_2} (\nu, x) \frac{t^2 + r^2}{r^2} u^2 ds \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left(r^2(h^2 + |\nabla f|^2) + (n-1)rff_r + \frac{(n-1)(n-2)}{2}f^2 \right) dx. \tag{15}
 \end{aligned}$$

В силу условия (1)

$$I_1(t) = 2 \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_1} \tau(\nu, x) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 ds \leq 0, \tag{16}$$

а учитывая (2), имеем

$$\begin{aligned} I_2(t) &= -2 \int_0^t \tau d\tau \int_{\Gamma_2} (\nu, x) \left(\left(\frac{\tau^2 + r^2}{\tau r} - 1 \right) u_\tau^2 + 2u_\tau u_r + |\nabla u|^2 \right) ds \\ &= -2 \int_0^t \tau d\tau \int_{\Gamma_2} (\nu, x) \left(\left(u_\tau + u_r \right)^2 + \frac{(\tau - r)^2}{\tau r} u_\tau^2 + |\nabla_K u|^2 \right) ds \leq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим интеграл

$$I_3(t) = -2(n-1) \int_0^t \tau d\tau \int_{\Gamma_2} \frac{(\nu, x)}{r} u u_\tau ds.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_3(t) &= -(n-1) \int_{\Gamma_2} \frac{(\nu, x)}{r} t u^2 ds + (n-1) \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_2} \frac{(\nu, x)}{r} u^2 ds \\ &\leq (n-1) \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_2} \frac{(\nu, x)}{r} u^2 ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся законом сохранения вспомогательной смешанной задачи

$$\begin{aligned} p_{tt} - \Delta p &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ p_t(0, x) &= f(x), \quad \Delta p(0, x) = h(x), \\ p|_{\Gamma_1} &= 0, \quad \left(p_\nu + \frac{(\nu, x)}{r} p_t \right) \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где $p_t(t, x) = u(t, x)$.

Поскольку

$$\int_{\Omega} (p_t^2 + |\nabla p|^2) dx + 2 \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_2} \frac{(\nu, x)}{r} p_\tau^2 ds = \int_{\Omega} (f^2 + |\nabla p(0, x)|^2) dx, \quad t > 0,$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t d\tau \int_{\Gamma_2} \frac{(\nu, x)}{r} u^2 ds &\leq C_3 \int_{\Omega} (f^2 + h^2) dx, \quad t > 0, \\ C_3 &= C_3(\text{supp}(|f| + |h|)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_3(t) \leq C_3 \int_{\Omega} (f^2 + h^2) dx, \quad t > 0. \quad (19)$$

Далее, оценим интеграл

$$I_4(t) = \int_{\Gamma_2} (\nu, x) \frac{t^2 + r^2}{r^2} u^2(t, x) ds.$$

Учитывая условие (12), имеем

$$\begin{aligned}
 I_4(t) &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} \frac{(\nu, x) u^2(t, x)}{|\sin(\widehat{\nu, x})|} dl \\
 &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} \frac{r \cos(\widehat{\nu, x}) u^2(t, x)}{\sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\nu, x})}} dl \\
 &\leq C_1 \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} \frac{u^2(t, x)}{\sqrt{1 - C_1^2/r^2}} dl \\
 &\leq \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2/r_0^2}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} u^2(t, x) dl.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Оценим интеграл

$$\int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} u^2(t, x) dl.$$

Из равномерного условия сферы следует, что при всех $r > 0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} u^2(t, x) dl &\leq C_4 \int_{S_r} (|\nabla_K u(t, x)|^2 + u^2(t, x)) ds, \\
 S_r &= \Omega \cap \{|x| = r\},
 \end{aligned} \tag{21}$$

где постоянная C_4 не зависит от r .

Из (20) и (21) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
 I_4 &\leq \frac{C_1 C_4}{\sqrt{1 - C_1^2/r_0^2}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{S_r} (|\nabla_K u(t, x)|^2 + u^2(t, x)) ds \\
 &= \frac{C_1 C_4}{\sqrt{1 - C_1^2/r_0^2}} \int_{\Omega} \frac{t^2 + r^2}{r^2} (|\nabla_K u(t, x)|^2 + u^2(t, x)) dx \\
 &\leq \frac{C_1 C_5}{\sqrt{1 - C_1^2/r_0^2}} \int_{\Omega} (t^2 + r^2) \left(|\nabla_K u(t, x)|^2 + \frac{u^2(t, x)}{r^2} \right) dx.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая соотношения (15)–(17), (19) и (22), выводим оценку

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2r^{n-1}} \left((t+r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}} u \right)_r + (r^{\frac{n-1}{2}} u)_t \right)^2 + (t-r)^2 \left((r^{\frac{n-1}{2}} u)_r - (r^{\frac{n-1}{2}} u)_t \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (t^2 + r^2) \left(|\nabla_K u|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} u^2 \right) \right) \right) dx \\
 &\leq C_6 \int_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2 + h^2) dx + \frac{C_1 C_5}{\sqrt{1 - C_1^2/r_0^2}} \int_{\Omega} \frac{t^2 + r^2}{r^2} (|\nabla_K u|^2 + u^2) dx, \quad t > 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Выберем постоянную C_1 так, что $C_1 C_5 / (1 - C_1^2/r_0^2)^{1/2} < 1/4$. Тогда из (23) следует неравенство (13). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим случай $n = 3$.

Определим функцию

$$\eta(\rho) = \sup\{\|v(x)\|_{L_2(S_\rho)}^2 \mid v(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \|\nabla_K v(x)\|_{L_2(S_\rho)} = 1, v|_{\Gamma_1} = 0\}, \quad \rho > 0. \quad (24)$$

Легко видеть, что $\eta(\rho) < \infty$, если положительно первое собственное значение $\lambda_1(\rho)$ задачи Зарембы для оператора Лапласа–Бельтрами

$$\begin{aligned} \Delta_\Theta v + \lambda v &= 0, \quad x(\Theta) \in S_\rho, \quad \Delta_\Theta = \frac{\Delta_K}{\rho^2}, \\ v|_{\Gamma_1 \cap \{|x|=\rho\}} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_2 \cap \{|x|=\rho\}} = 0. \end{aligned}$$

Условие положительности $\lambda_1(\rho)$ можно получить в терминах емкости множества $\Gamma_1 \cap \{|x| = \rho\}$ (см. [6], [7]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = 3$. Тогда существуют функция $g(x)$, $0 < g(x) \leq 1$, $x \in \Gamma_2$, и постоянная $C_7 > 0$ такие, что для областей Ω , удовлетворяющих условиям

$$|\cos(v, x)| \leq \frac{C_7}{r}, \quad x \in \Gamma_2, \quad (25)$$

$$\eta(r) \leq C_7, \quad r > 0, \quad (26)$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2r^2} ((t+r)^2 ((ru)_r + (ru)_t)^2 + (t-r)^2 ((ru)_r - (ru)_t)^2) + (t^2 + r^2) |\nabla_K u|^2 \right) dx \\ \leq C_8 \int_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2 + h^2) dx, \end{aligned} \quad (27)$$

где постоянная C_8 зависит от $\text{supp}(|f| + |h|)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи (3)–(6) справедлива оценка (11), где $\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Отличие от доказательства теоремы 1 состоит в оценке слагаемого $I_4(t)$ в (15).

При $n = 3$ мы можем использовать для оценки выражения

$$\int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} u^2(t, x) dl$$

только интеграл $\int_{S_r} |\nabla_K u(t, x)|^2 ds$.

Поэтому, учитывая (21) и (26), имеем неравенство

$$\int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} u^2(t, x) dl \leq C_4(1 + \eta(r)) \int_{S_r} |\nabla_K u(t, x)|^2 ds. \quad (28)$$

Из (20), (26) и (28) выводим оценки

$$\begin{aligned}
 I_4(t) &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} \frac{r \cos(\widehat{\nu, x}) u^2(t, x)}{\sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\nu, x})}} dl \\
 &\leq \frac{C_7}{\sqrt{1 - C_7^2/r_0^2}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{\Gamma_2 \cap \{|x|=r\}} u^2(t, x) dl \\
 &\leq \frac{C_4 C_7 (C_7 + 1)}{\sqrt{1 - C_7^2/r_0^2}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{t^2 + r^2}{r^2} dr \int_{S_r} |\nabla_K u(t, x)|^2 ds \\
 &= \frac{C_4 C_7 (C_7 + 1)}{\sqrt{1 - C_7^2/r_0^2}} \int_{\Omega} \frac{t^2 + r^2}{r^2} |\nabla_K u(t, x)|^2 dx. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (15)–(17), (19) и (29), выводим оценки

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2r^2} ((t+r)^2 ((ru)_r + (ru)_t)^2 + (t-r)^2 ((ru)_r - (ru)_t)^2) + (t^2 + r^2) |\nabla_K u|^2 \right) dx \\
 &\leq C_6 \int_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2 + h^2) dx + \frac{C_7 (C_7 + 1) C_9}{\sqrt{1 - C_7^2/r_0^2}} \int_{\Omega} (t^2 + r^2) |\nabla_K u|^2 dx. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Выберем постоянную C_7 так, что $C_7(C_7 + 1)C_9/(1 - C_7^2/r_0^2)^{1/2} < 1/2$. Тогда из (30) следует неравенство (27). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Леонтович М. А., Фок В. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 7.
- [2] Муравей Л. А. Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца в неограниченной области со звездной границей // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 171–180.
- [3] Chen G. Q. Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain // J. de Math. Pures et Appl. 1979. V. 58. № 3. P. 249–273.
- [4] Муравей Л. А., Филиновский А. В. О стабилизации решений волнового уравнения в областях с возмущенной звездной границей // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 4. С. 452–454.
- [5] Zachmanoglou E. C. The decay of solutions of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded regions // Arch. Rath. Mech. Anal. 1963. V. 14. № 4. P. 312–325.
- [6] Littman W. A connection between α -capacity and (m, p) -polarity // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 862–866.
- [7] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Московский авиационно-технологический университет
им. К. Э. Циолковского
Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
08.12.97
Исправленный вариант
09.12.98