Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Романовский, С. Г. Садовничук, Прямой метод построения двухзонных решений нелинейных уравнений, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 401–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:32:22

УДК 517

ПРЯМОЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДВУХЗОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. К. Романовский, С. Г. Садовничук

Предлагается конструкция, позволяющая эффективно строить двухзонные решения, в том числе вещественные, некоторых нелинейных уравнений без применения аппарата алгебраических кривых. Исходным элементом конструкции является специальная теорема сложения для тэта-функций двух переменных. Метод проиллюстрирован на уравнениях КП, КдФ, sine-Gordon.

Библиография: 6 названий.

Введение. Построение решений нелинейных уравнений математической физики методами алгебраической геометрии предполагает последующую эффективизацию полученных формул [1]–[4]. В настоящей работе выполняется конструкция, позволяющая единообразным образом строить классы двухзонных решений, в том числе вещественных, некоторых нелинейных уравнений без применения аппарата алгебраических кривых. Отправным пунктом конструкции является специальная теорема сложения для тэта-функций двух переменных. Следствия из этой теоремы позволяют, в частности, эффективно вычислять векторы U, V в тэта-функциональных формулах вида $u = f(Ux + Vt)$ для решений. Строится треугольник в $\mathbb{C}^2$, сторонами которого являются с точностью до скалярных множителей градиенты при $z = 0$ некоторых нечетных тэта-функций; искомые U, V – надлежаше выбранные линейные комбинации нормалей к сторонам этого треугольника. Строящиеся решения становятся вещественными, если исходная матрица Римана связана с характеристиками участвующих в построениях тэта-функций специальными соотношениями. На этом пути построены классы решений уравнений sine-Gordon, КдФ, Кадомцева–Петвиашвили (КП).

Отметим, что изложенная в работе конструкция отличается от конструкции из [2], основанной на аппарате вещественных алгебраических кривых рода 2.

1. Две леммы. Пусть $g \in \mathbb{N}$, B – матрица Римана порядка g ($B^T = B$, $\text{Im } B > 0$), $I = \{\alpha\beta : \alpha, \beta \in (\mathbb{Z}_2)^g\}$; $\theta_{\alpha\beta}(z)$ – тэта-функция с характеристикой $(\alpha/2, \beta/2)$ и матрицей Римана B :

$$\theta_{\alpha\beta}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i B(n + 0.5\alpha) \cdot (n + 0.5\alpha) + 2\pi i(n + 0.5\alpha) \cdot (z + 0.5\beta)\}. \quad (1)$$

Здесь элементы $\mathbb{C}^g$ – столбцы; $a \cdot b = \sum a_i b_i$. Далее $e = (1, \dots, 1)$ длины g , $\hat{\alpha} = e - \alpha$, где $\alpha \in (\mathbb{Z}_2)^g$. Пару $\alpha\beta \in I$ будем также называть *характеристикой*.

ЛЕММА 1. При любых $ab \in I$, $z, u \in \mathbb{C}^g$ верно равенство

$$2^g \theta_{a\hat{b}}(z+u) \theta_{a\hat{b}}(z-u) \theta_{ab}^2(0) = \sum_{\alpha\beta \in I} (-1)^{b \cdot \alpha + a \cdot \beta} \theta_{\alpha\hat{\beta}}^2(z) \theta_{\alpha\beta}^2(u). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится вычислением по тэта-формуле Римана [5].

Для дальнейшего существенно, что слагаемые в правой части (2) с точностью до знака не зависят от выбора ab . Следующая лемма позволяет далее выделять вещественные решения.

ЛЕММА 2. Пусть в (1) $\operatorname{Re} B = \Lambda$. Если

$$2\Lambda \in \operatorname{Mat}(g, \mathbb{Z}), \quad \Lambda\alpha + \operatorname{diag} \Lambda \in \mathbb{Z}^g, \quad (3)$$

то $\overline{\theta_{\alpha\beta}(\bar{z})} = \xi(\alpha) \theta_{\alpha\beta}(z)$, где $\xi(\alpha) = \exp\{-0.5\pi i \Lambda\alpha \cdot \alpha\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$. Выполняя при вычислении $\overline{\theta_{\alpha\beta}(\bar{z})}$ под знаком суммы замену $n \rightarrow -(n + \alpha)$ и принимая во внимание $\bar{B} = 2\Lambda - B$, получим $\overline{\theta_{\alpha\beta}(\bar{z})} = \xi(\alpha) \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(-2\pi i a_n) \omega_n(z)$, где $a_n = (\Lambda\alpha + \operatorname{diag} \Lambda) \cdot n + 2 \sum \lambda_{ij} n_i n_j$, $\omega_n(z) - n$ -й член ряда (1). При условии (3) a_n — целое число.

2. Специальная теорема сложения. Следствия. При $g = 2$ множество I состоит из 10 четных характеристик ab ($a \cdot b$ — четное число) и 6 нечетных. Перебором десяти вариантов просто устанавливается

ЛЕММА 3. При $g = 2$ каждой четной $ab \in I$ отвечает единственное разбиение множества нечетных характеристик на два подмножества $\{\alpha_k \beta_k, k = 1, 2, 3\}$ такое, что для каждого подмножества

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = ab \pmod{2\mathbb{Z}^4}. \quad (4)$$

При $ab = (a', a''; b', b'')$ одно из подмножеств дается формулами (сложение по mod 2)

$$(1, 1; 0, 1), (1 + a'b', a'(1 + b') + a''; 1, a'(b' + b'') + b''), \\ (a'(1 + b'), 1 + a'(1 + b'); 1 + b', 1 + a'(b' + b'')).$$

Далее нумерация характеристик в каждом из двух нечетных наборов (4) предполагается произвольно фиксированной.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g = 2$, $\{\alpha_k \beta_k\}$ — любой из двух наборов (4), построенных по четной характеристике $ab \in I$, $\theta_{ab} \neq 0$. Тогда

$$\theta_{a\hat{b}}(z+u) \theta_{a\hat{b}}(z-u) = \theta_{ab}^{-2}(0) \left(\theta_{a\hat{b}}^2(z) \theta_{ab}^2(u) + \sum_{k=1}^3 (-1)^{b \cdot \alpha + a \cdot \beta} \theta_{\alpha_k \hat{\beta}_k}^2(z) \theta_{\alpha_k \beta_k}^2(u) \right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_k b_k\}$ – двойственный к $\{\alpha_k \beta_k\}$ набор (4). Складывая при $g = 2$ равенство (2) для выбранной $ab \in I$ с такими же тремя равенствами для $a_k b_k$, умноженными соответственно на $(-1)^{b \cdot a_k + a \cdot b_k}$, с учетом нечетности $a_k b_k$ найдем

$$4\theta_{ab}(z+u)\theta_{ab}(z-u)\theta_{ab}^2(0) = \sum_{\alpha\beta \in I} \varepsilon_{\alpha\beta} \theta_{\alpha\hat{\beta}}^2(z)\theta_{\alpha\beta}^2(u),$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (-1)^{b \cdot \alpha + a \cdot \beta} + \sum_{k=1}^3 (-1)^{b_k \cdot (a+\alpha) + a_k \cdot (b+\beta)}.$$

Вычисления дают:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 4(-1)^{b \cdot \alpha + a \cdot \beta}, & \alpha\beta = ab, \alpha_k \beta_k; \\ 0, & \alpha\beta \neq ab, \alpha_k \beta_k. \end{cases}$$

Отсюда следует (5).

Введем матрицу $\wp_{ab}(z) = [\ln \theta_{ab}(z)]''$. Обозначим $\nabla_k = \theta'_{\alpha_k \beta_k}(0)$, $\sigma_k = (-1)^{b \cdot \alpha_k + a \cdot \beta_k}$, $\varphi_k(z) = \theta_{\alpha_k \hat{\beta}_k}^2(z)\theta_{ab}^{-2}(z)$, $k = 1, 2, 3$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 верно равенство

$$\wp_{ab}(z) = \wp_{ab}\left(\frac{e}{2}\right) + \theta_{ab}^{-2}(0) \sum_{k=1}^3 \sigma_k \nabla_k \nabla_k^T \varphi_k(z), \quad (6)$$

где $e = (1, 1)$, T – знак транспонирования (∇_k – столбцы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя матрицу Гесса по u от обеих частей (5), подставляя $u = 0$ и умножая полученное равенство на $0.5\theta_{ab}^{-2}(z)$, получим: $\wp_{ab}(z) = A_1 + A_2(z)$, где A_1 – постоянная матрица, $A_2(z)$ – второе слагаемое в правой части (6). Так как $\theta_{\alpha\hat{\beta}}(e/2) = \pm \theta_{\alpha\beta}(0)$ для нечетной $\alpha\beta$, то $A_2(e/2) = 0$ и $A_1 = \wp(e/2)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 1 для любого $\nu \in \mathbb{C}^2$

$$D_\nu^4 \ln \theta_{ab}(z) + 6(D_\nu^2 \ln \theta_{ab}(z))^2 = c_\nu + 4\theta_{ab}^{-2}(0) \sum_{k=1}^3 c_{k\nu} \sigma_k \varphi_k(z), \quad (7)$$

где $D_\nu = \partial/\partial\nu$, $c_{k\nu} = (\nabla_k \cdot \nu) D_\nu^3 \theta_{\alpha_k \beta_k}(0)$, $c_\nu = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится вычислением D_ν^4 от обеих частей (5) как функций от u и последующей подстановкой $u = 0$ с учетом тождеств (см. [6])

$$D_\nu^4[f(u)f(-u)]_{u=0} = 2[fD_\nu^4 f - 4D_\nu f D_\nu^3 f + 3(D_\nu^2 f)^2]_{u=0},$$

$$fD_\nu^4 f - 4D_\nu f D_\nu^3 f + 3(D_\nu^2 f)^2 = f^2[D_\nu^4 \ln f + 6(D_\nu^2 \ln f)^2]$$

и равенства $[D_\nu^4 f^2 - 8D_\nu f D_\nu^3 f]_{u=0} = 0$ для нечетной f .

Построенные по характеристикам (4) векторы ∇_k в общем положении образуют с точностью до скалярных множителей треугольник в $\mathbb{C}^2$ (попарно непараллельны). Построим нормали к сторонам этого треугольника по формулам

$$v_k = \theta_{ab}(0)(\nabla_i \cdot J \nabla_j)^{-1} J \nabla_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где (i, j, k) – круговая перестановка чисел 1, 2, 3. Очевидно, $v_k \cdot \nabla_k = 0$, $\nabla_i \cdot J \nabla_j = \det(\nabla_i \nabla_j) \neq 0$. Обозначим $D_k = \partial/\partial v_k$.

ЛЕММА 4. *Верно равенство*

$$D_i D_j \ln \theta_{a\hat{b}}(z) = \wp_{ab} \left(\frac{e}{2} \right) v_i \cdot v_j - \sigma_k \wp_k(z). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая обе части (6) справа на столбец v_i , затем скалярно на v_j и принимая во внимание (8) и равенство $D_i D_j \ln \theta_{a\hat{b}} = \wp_{ab} v_i \cdot v_j$, получим (9).

Нетрудно проверить: если в (4) $a \neq (0, 0)$, то при некотором $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\alpha_k = a, \quad \alpha_i = \alpha_j \neq a. \quad (10)$$

Из формул (8) и леммы 2 вытекает

ЛЕММА 5. *Если характеристики (4) удовлетворяют условиям (10) и выполняются равенства (3) при $\alpha = a, \alpha_i$, то нормали $v_i, v_j, \xi(a)\xi^{-1}(\alpha_i)v_k$ вещественны.*

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\Lambda = 0$ все нормали (8) вещественны. При $a \neq (0, 0)$ для каждого из двух наборов (10) существует одна (по модулю целочисленного симметрического слагаемого) матрица $\Lambda \neq 0$, удовлетворяющая лемме 5. Для одного из наборов эта матрица удовлетворяет и условию $\xi(\alpha_i) = \pm \xi(a)$, в этом случае также все $v_k \in \mathbb{R}^2$.

3. Построение решений уравнения sine-Gordon.

ТЕОРЕМА 2.

1. *В условиях теоремы 1 функция*

$$u(x, y) = \begin{cases} -\sqrt{-1} \ln \varphi_k(0.5\sqrt{-1}(v_i x + v_j y) + z_0), & \sigma_k = -1, \\ -\sqrt{-1} \ln \varphi_k(0.5\sqrt[4]{-1}(v_i x + v_j y) + z_0) + 0.5\pi, & \sigma_k = 1, \end{cases} \quad (11)$$

где $k \in \{1, 2, 3\}$, (i, j, k) – круговая перестановка из чисел 1, 2, 3, v_i, v_j – нормали (8), $z_0 \in \mathbb{C}^2$, – решение уравнения

$$u_{xy} = \sin u. \quad (12)$$

2. *Если выполнены условия леммы 5 и одновременно при этом $\operatorname{Re} z_0 = 0.25 \times (\beta_k - b) \bmod 0.5\mathbb{Z}^2$, то $\sigma_k = -1$ и первая функция (11) – вещественное решение уравнения (12).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (9) $z_1 = z + 0.5(B(\alpha_k - a) + b - \beta_k)$ и используя свойство квазипериодичности тэта-функции [5, с. 102], после простых преобразований получим

$$D_i D_j \ln \theta_{\alpha_k \hat{\beta}_k}(z) = \wp_{ab} \left(\frac{e}{2} \right) v_i \cdot v_j + \varphi_k^{-1}(z); \quad (13)$$

здесь $\varphi_k(z_1) = -\sigma_k \varphi_k^{-1}(z)$. Вычитая почленно (9) из (13), получим

$$D_i D_j U = \begin{cases} 4 \sin U, & \sigma_k = -1, \\ -4\sqrt{-1} \cos U, & \sigma_k = 1, \end{cases} \quad U(z) = -\sqrt{-1} \ln \varphi_k(z).$$

Отсюда следует, что обе функции (11) удовлетворяют (12). При условиях п. 2 теоремы $\sigma_k = (-1)^{a \cdot (b + \beta_k)} = -1$, $v_i, v_j \in \mathbb{R}^2$ и аргумент z первой функции (11) удовлетворяет условию $\bar{z} = -z_1$. С учетом вытекающего из леммы 2 равенства $\varphi_k(z) = \varphi_k(\bar{z})$ и четности $\varphi_k(z)$ имеем $|\varphi_k(z)|^2 = \varphi_k(z)\varphi_k(z_1) = -\sigma_k = 1$, откуда следует вещественность первой функции (11).

4. Построение решений уравнения КдФ. Подставляя в (7) выражения для $\sigma_k \varphi_k(z)$, вычисленные из (9), найдем

$$\begin{cases} D_\nu^4 \ln \theta_{a\hat{b}} + 6(D_\nu^2 \ln \theta_{a\hat{b}})^2 + 4L_\nu, & \theta_{a\hat{b}} + \delta_\nu = 0, \\ L_\nu = \sum_{(i,j,k)} \gamma_{k\nu} D_i D_j, & \gamma_{k\nu} = \theta_{a\hat{b}}^{-2}(0) (\nabla_k \cdot \nu) D_\nu^3 \ln \theta_{\alpha_k \beta_k}(0), \end{cases} \quad (14)$$

где (i, j, k) пробегает круговые перестановки чисел 1, 2, 3, $\delta_\nu = \text{const}$. Из формулы для L_ν следует:

$$\nu \perp \nabla_k \Rightarrow L_\nu = D_\nu D_\tau, \quad \tau = \gamma_{i\nu} v_j + \gamma_{j\nu} v_i. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3.

1. При условии $\nu \perp \nabla_k$ функция

$$u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta_{a\hat{b}}(0.5\sqrt{2}\nu x + \sqrt{2}\tau t + z_0), \quad (16)$$

где τ – вектор (15), $z_0 \in \mathbb{C}^2$, – решение уравнения

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

2. Если выполнены условия леммы 5, $\xi(\alpha_i) = \pm \xi(a)$, $\nu = v_k$, $z_0 \in \mathbb{R}^2$, то решение (16) вещественно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $U(z) = D_\nu^2 \ln \theta_{a\hat{b}}(z)$. Применяя к (14) оператор D_ν , с учетом (15) получим

$$D_\nu^3 U + 12U D_\nu U + 4D_\tau U = 0.$$

Далее, в условиях п. 2 теоремы в силу леммы 5 аргумент z функции (16) вещественен и с учетом леммы 2 $\overline{U(z)} = D_\nu^2 \ln(\xi(a)\theta_{a\hat{b}}(z)) = U(z)$. Из доказанного следуют оба утверждения теоремы.

5. Построение решений уравнения КП. Выберем $\nu, v \in \mathbb{C}^2$ так, что

$$\nu \cdot \nabla_k \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \nu \nparallel v. \quad (17)$$

Разлагая нормали (8) по базису $\nu, v : v_k = s_k \nu + t_k v$, и подставляя в формулу для L_ν $D_k = s_k D_\nu + t_k D_v$, найдем

$$L_\nu = D_\nu D_\tau + \psi D_v^2, \quad (18)$$

где

$$\tau = \sum \gamma_{k\nu} s_i s_j \nu + \sum \gamma_{k\nu} (s_i t_j + s_j t_i) v, \quad (19)$$

$$\psi = (J\nu \cdot v)^{-2} \prod_{k=1}^3 (\nu \cdot \nabla_k) \sum (J\nabla_i \cdot \nabla_k)^{-1} (\nabla_j \cdot J\nabla_k)^{-1} D_\nu^3 \theta_{\alpha_k \beta_k}(0);$$

суммирование ведется по круговым перестановкам чисел 1, 2, 3; в формуле для ψ учтены значения s_k, t_k . При условиях (17) в общем положении $\psi \neq 0$. Если, кроме того, $\nu, v \in \mathbb{R}^2$, выполнены условия леммы 5 и при этом $\xi(\alpha_i) = \pm \xi(a)$ для характеристик (10), то $\tau \in \mathbb{R}^2$, $\psi \in \mathbb{R}$ и область $\{\nu, v \in \mathbb{R}^2 : \psi > 0\}$ непуста. В самом деле, в этом случае в силу леммы 5 все три нормали (8) вещественны, поэтому все s_k, t_k вещественны. В силу леммы 2 $\bar{\psi} = \psi$. Обозначим $\Delta_k = [\xi(\alpha_k)]^{0.5} \nabla_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $\bar{\Delta}_k = \Delta_k$, и ψ представима в виде $\psi = (\nu \cdot \Delta_1)(\nu \cdot \Delta_2)(\nu \cdot \Delta_3)\rho(\nu, v)$, где все множители вещественны. Отсюда следует, что при фиксированном v $\psi(\nu)$ принимает в малых окрестностях $J\Delta_k$ значения любого знака.

ТЕОРЕМА 4.

1. При условиях (17) функция

$$u(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta_{\hat{a}\hat{b}}(0.5\sqrt{2}\nu x + \sqrt{2\psi}vy + \sqrt{32}\tau t + z_0) + c, \quad (20)$$

где τ , ψ даются формулами (19), $z_0 \in \mathbb{C}^2$, $c \in \mathbb{C}$ – решение уравнения

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0. \quad (21)$$

2. Если выполнены условия леммы 5, $\xi(\alpha_i) = \pm\xi(a)$ в (10), $z_0 \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ и векторы $\nu, v \in \mathbb{R}^2$ выбраны так, что $\psi > 0$, то решение (20) вещественно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к (14) D_ν^2 , с учетом (18) получим

$$D_\nu(D_\nu^3 U + 12U D_\nu U + 4D_\tau U) + 4\psi D_\nu^2 U = 0,$$

где $U(z)$ та же, что в разделе 4. Отсюда следует, что функция (20) – решение уравнения (21). В условиях п. 2 теоремы вещественность функции (20) проверяется также, как при доказательстве теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.
- [2] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon // Функцион. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 1. С. 27–43.
- [3] Дубровин Б. А., Кричевер И. Н., Новиков С. П. Интегрируемые системы, 1 // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–285.
- [4] Бабич М. В. Эффективизация формул конечнозонного интегрирования уравнения sine-Gordon для одной кривой рода 3 // Функцион. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. № 3. С. 53–55.
- [5] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
- [6] Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов // Солитоны. М.: Мир, 1983. С. 175–192.

Омский государственный университет

Поступило
10.09.96