Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Соловьев, Интерполяция с градиентом в шаре и полидиске, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 407–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:02:25

УДК 517.55

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ГРАДИЕНТОМ В ШАРЕ И ПОЛИДИСКЕ

А. Е. Соловьев

В статье рассматривается задача интерполяции с градиентом для банаховых алгебр $H^\infty(\mathbb{B}^n)$ и $H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Получены достаточные условия разрешимости этой задачи.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Пусть $\mathbb{B}^n$ обозначает единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{B}^n = \{z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 < 1\},$$

а $\mathbb{D}^n$ – единичный полидиск в $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{D}^n = \{z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n : |z^1| < 1, \dots, |z^n| < 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}^n$ любую из областей $\mathbb{B}^n$ или $\mathbb{D}^n$ и рассмотрим банахову алгебру $H^\infty(\mathcal{D}^n)$ ограниченных голоморфных функций в $\mathcal{D}^n$ с нормой

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z \in \mathcal{D}^n} |f(z)|, \quad f \in H^\infty(\mathcal{D}^n).$$

Напомним, что последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ точек $\mathcal{D}^n$ называется *интерполяционной* для $H^\infty(\mathcal{D}^n)$, если для любого ограниченного набора комплексных чисел $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ найдется функция $F \in H^\infty(\mathcal{D}^n)$ такая, что $F(a_k) = f_k$.

Обозначим через

$$\langle z, \overline{w} \rangle = \sum_{i=1}^n z^i \overline{w^i}$$

эрмитово произведение в $\mathbb{C}^n$, через

$$\rho(z, w) = \left(1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \langle z, \overline{w} \rangle|^2} \right)^{1/2}$$

гиперболическую метрику в $\mathbb{C}^n$.

В одномерном случае Карлесоном [1] был доказан следующий критерий интерполяционности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98-03-00640 и № 96-15-96131).

ТЕОРЕМА А. Пусть $n = 1$. Последовательность точек $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ круга $\mathcal{D}^1 = \mathbb{B}^1 = \mathbb{D}^1$ является интерполяционной для $H^\infty(\mathcal{D}^1)$ тогда и только тогда, когда существует константа $\delta > 0$ такая, что для любого k справедлива оценка

$$\prod_{j:j \neq k} \rho(a_j, a_k) \geq \delta,$$

или, что эквивалентно, найдется константа $C > 0$ такая, что для любого k имеет место неравенство

$$\sum_{j:j \neq k} (1 - \rho(a_j, a_k)) \leq C.$$

При $n > 1$ ситуация в корне меняется – возникает “зазор” между необходимыми и достаточными условиями интерполяционности. Достаточное условие Берндтссона для $H^\infty(\mathbb{B}^n)$ [2] выглядит так же, как и у Карлесона.

ТЕОРЕМА В. Пусть существует константа $\delta > 0$ такая, что для любого k справедлива оценка

$$\prod_{j:j \neq k} \rho(a_j, a_k) \geq \delta,$$

Тогда последовательность $\{a_k \in \mathbb{B}^n\}_{k=1}^\infty$ – интерполяционная для $H^\infty(\mathbb{B}^n)$.

Похоже выглядит и достаточное условие Берндтссона для $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ [3]. Обозначая через

$$\rho^s(z, w) = \left| \frac{z^s - w^s}{1 - \langle z^s, \overline{w^s} \rangle} \right|$$

гиперболическое расстояние между проекциями z и w на s -ю координатную плоскость в $\mathbb{C}^n$, а через

$$\rho^*(z, w) = \max_{1 \leq s \leq n} (\rho^s(z, w)) = \max_{1 \leq s \leq n} \left| \frac{z^s - w^s}{1 - \langle z^s, \overline{w^s} \rangle} \right|$$

поликруговую метрику в $\mathbb{C}^n$, можно сформулировать результат Берндтссона следующим образом.

ТЕОРЕМА С. Пусть существует константа $\delta > 0$ такая, что для любого k выполняется неравенство

$$\prod_{j:j \neq k} \rho^*(a_j, a_k) \geq \delta. \quad (1)$$

Тогда последовательность $\{a_k \in \mathbb{D}^n\}_{k=1}^\infty$ – интерполяционная для $H^\infty(\mathbb{D}^n)$.

Однако, необходимое условие, принадлежащее Варопулосу [4], не совпадает с достаточным. А именно, имеет место

ТЕОРЕМА D. Если последовательность $\{a_k \in \mathbb{B}^n\}_{k=1}^\infty$ – интерполяционная, то найдется константа $C > 0$ такая, что для любого k справедлива оценка

$$\sum_{j:j \neq k} \left(\frac{(1 - |a_j|^2)(1 - |a_k|^2)}{|1 - \langle a_k, \overline{a_j} \rangle|^2} \right)^n \leq C.$$

Более того, Берндтссон [2] показал, что степень n в условии Варопулоса, вообще говоря, нельзя уменьшить. Точнее, для любого $\varepsilon > 0$ существует интерполяционная последовательность $\{a_k \in \mathbb{B}^n\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$$\sum_k (1 - |a_k|^2)^{n-\varepsilon} = \infty.$$

Можно ожидать, что изменив условие интерполяции (потребовав, скажем, чтобы интерполировались не только значения функции в точках $\{a_k\}$, но и направления ее градиента), удастся ликвидировать “зазор” между необходимыми и достаточными условиями интерполяционности.

Задача интерполяции с градиентом рассматривается в этой работе и для нее получены аналоги теорем В и С.

Далее автор использует следующие обозначения: $\partial_s = \partial/\partial z^s$ – дифференцирование по s -й координате и

$$\partial_m f = \sum_{s=1}^n \partial_s f \cdot m^s$$

– дифференцирование по направлению вектора m .

2. Основные определения и леммы. Для того, чтобы сформулировать задачу интерполяции с градиентом нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА ШВАРЦА. Пусть φ – ограниченная голоморфная функция в единичном шаре $\mathbb{B}^1 \in \mathbb{C}^1$. Тогда для любого $z \in \mathbb{B}^1$ выполняется оценка

$$|\partial\varphi(z)| \leq \frac{\|\varphi\|_{H^\infty}}{(1 - |z|^2)}.$$

Пусть в дальнейшем

$$r(a, m) = (1 - \|a\|^2 + |\langle a, \overline{m} \rangle|^2)^{1/2}$$

обозначает радиус кругового сечения шара $\mathbb{B}^n$ комплексной прямой, проходящей через точку a в направлении m .

Из леммы Шварца сразу получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ. 1) Пусть $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Тогда для любого $a \in \mathbb{D}^n$ и любого s , $1 \leq s \leq n$, будем иметь

$$|\partial_s f(a)| \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{(1 - |a^s|^2)}.$$

2) Пусть $f \in H^\infty(\mathbb{B}^n)$. Тогда для любого $a \in \mathbb{B}^n$ и любого единичного вектора $m \in \mathbb{C}^n$, $|m| = 1$, справедлива оценка

$$|\partial_m f(a)| := \left| \sum_{s=1}^n \partial_s f(a) m^s \right| \leq \|f\|_{H^\infty} \cdot \left| \frac{r}{r^2 - |\langle a, \overline{m} \rangle|^2} \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать пункт 1) достаточно заметить, что ограничение f на s -ю координатную плоскость в $\mathbb{C}^n$ удовлетворяет условиям леммы Шварца. Докажем пункт 2). Для этого обозначим $a' = a - \langle a, \overline{m} \rangle$. Тогда функция $g(\zeta) := f(a' + r\zeta m)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца. Поэтому

$$\left| \partial g \left(\frac{\langle a, \overline{m} \rangle}{r} \right) \right| \leq \|g\|_{H^\infty} \cdot \left| \frac{1}{1 - \frac{|\langle a, \overline{m} \rangle|^2}{r^2}} \right| = \|g\|_{H^\infty} \cdot \left| \frac{r^2}{r^2 - |\langle a, \overline{m} \rangle|^2} \right|.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \partial g \left(\frac{\langle a, \overline{m} \rangle}{r} \right) &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^s} \left(a' + r \frac{\langle a, \overline{m} \rangle}{r} m \right) \left(\frac{\partial(a'^s + r\zeta m^s)}{\partial \zeta} \right) \\ &= r \sum_{s=1}^n \partial_s f(a) m^s = r \partial_m f(a), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение.

Теперь мы можем дать определение интерполяционной последовательности для задачи интерполяции с градиентом в алгебрах $H^\infty(\mathcal{D}^n)$.

Зафиксируем последовательность точек $A = \{a_k \in \mathcal{D}^n\}_{k=1}^\infty$ в области $\mathcal{D}^n$. Назовем последовательность комплексных чисел $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и векторов $\{b_k \in \mathbb{C}^n\}_{k=1}^\infty$ *A-допустимой для алгебры $H^\infty(\mathcal{D}^n)$* , если найдутся константы $M_1, M_2 > 0$ такие, что

- 1) $|f_k| \leq M_1$ для любого $k \in \mathbb{N}$;
- 2а) в случае полидиска $|b_k^s| \leq M_2/(1 - |a_k^s|^2)$ для любых $1 \leq s \leq n, k \in \mathbb{N}$,
- 2б) в случае шара

$$|\langle b_k, m \rangle| = \left| \sum_{s=1}^n b_k^s m^s \right| \leq M_2 \frac{r(a_k, m)}{r(a_k, m)^2 - |\langle a_k, \overline{m} \rangle|^2}$$

для любого единичного вектора $m \in \mathbb{C}^n, |m| = 1$, и любого $k \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $A = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ точек $\mathcal{D}^n$ называется *интерполяционной* для $H^\infty(\mathcal{D}^n)$ в задаче интерполяции с градиентом, если для любой *A-допустимой* последовательности чисел $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и векторов $\{b_k \in \mathbb{C}^n\}_{k=1}^\infty$ найдется голоморфная функция $F \in H^\infty(\mathcal{D}^n)$, для которой $F(a_k) = f_k$ и $\partial_s F(a_k) = b_k^s, 1 \leq s \leq n$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказанная Берндтссоном в [2].

ЛЕММА D. Пусть последовательность точек единичного шара $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что существует константа $\delta > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\prod_{j: j \neq k} \rho(a_j, a_k) \geq \delta.$$

Тогда найдется константа $M = M(\delta) > 0$ такая, что для любого $z \in \mathbb{B}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1 - |a_k|^2}{1 - \langle z, \overline{a_k} \rangle} \right)^4 |W(a_k, z)| \leq M(\delta),$$

где функция $W(\zeta, z)$ определяется формулой (см. [2])

$$W(\zeta, z) = \exp \left[- \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \langle z, \overline{a_j} \rangle}{1 - \langle z, \overline{a_j} \rangle} - \frac{1 + \langle \zeta, \overline{a_j} \rangle}{1 - \langle \zeta, \overline{a_j} \rangle} \right) \cdot \left(\frac{(1 - |a_j|^2)(1 - |\zeta|^2)}{1 - |\langle \zeta, \overline{a_j} \rangle|^2} \right) \right]$$

для $\zeta, z \in \mathbb{B}^n$.

3. Формулировки и доказательства теорем об интерполяции с градиентом. Аналог теоремы С из введения для задачи интерполяции с градиентом в полидиске формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность точек $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ единичного полидиска $\mathbb{D}^n$ является интерполяционной для задачи интерполяции с градиентом в алгебре $H^{\infty}(\mathbb{D}^n)$, если существует константа $\delta > 0$ такая, что для любых $1 \leq s \leq n$ и $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\prod_{j:j \neq k} \rho^s(a_j, a_k) \geq \delta, \quad (2)$$

Для задачи интерполяции с градиентом в шаре $\mathbb{B}^n$ аналог теоремы В из введения имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 2. *Последовательность точек $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ единичного шара $\mathbb{B}^n$ является интерполяционной для задачи интерполяции с градиентом в алгебре $H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$, если выполняются следующие условия:*

- 1) существует константа $\delta_1 > 0$ такая, что

$$\prod_{j:j \neq k} \rho(a_j, a_k) \geq \delta_1 \quad (3)$$

для любого $k \in \mathbb{N}$;

- 2) найдутся ортонормированный базис $m_1, \dots, m_n$ в $\mathbb{C}^n$ и константа $\delta_2 > 0$ такие, что

$$\prod_{j:j \neq k} \rho_{a_j, m_s}(a_j, a_k) \geq \delta_2 \quad (4)$$

для любых $1 \leq s \leq n$ и $k \in \mathbb{N}$, где

$$\rho_{a, m}(z, w) = \left| \frac{r(a, m)(\langle z, \overline{m} \rangle - \langle w, \overline{m} \rangle)}{r(a, m)^2 - \langle z, \overline{m} \rangle \langle w, \overline{m} \rangle} \right|$$

обозначает гиперболическое расстояние между проекциями точек z и w на комплексную прямую, проходящую через точку a в направлении вектора m , а $r(a, m) = (1 - \|a\|^2 + |\langle a, \overline{m} \rangle|^2)^{1/2}$ – радиус кругового сечения $\mathbb{B}^n$ этой комплексной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть дана A -допустимая последовательность комплексных чисел $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и векторов $\{b_k \in \mathbb{C}^n\}_{k=1}^\infty$ для алгебры $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, удовлетворяющая условиям 1), 2а) из определения (п.2). Построим функцию $F \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ такую, что $F(a_k) = f_k$ и $\partial_s F(a_k) = b_k^s$.

Заметим, прежде всего, что из условия 2) теоремы 1 вытекает условие 1) теоремы С. Следовательно, последовательность $\{a_k \in \mathbb{D}^n\}_{k=1}^\infty$ является интерполяционной для алгебры $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, т.е. для заданного набора комплексных чисел $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ найдется функция $F_1 \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ такая, что $F_1(a_k) = f_k$. При этом, в силу следствия, существует константа $M_3 > 0$, для которой выполнено неравенство

$$|\partial_s F_1(a_k)| \leq \frac{M_3}{(1 - |a_k|^2)}$$

для любых $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq s \leq n$.

Построим голоморфную функцию $G \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ такую, что $G(a_k) = 0$ и $\partial_s G(a_k) = b_k^s - \partial_s F_1(a_k)$. Тогда функция $F = F_1 + G \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ будет удовлетворять условиям теоремы 1.

Введем обозначение $c_k^s := b_k^s - \partial_s F_1(a_k)$ и заметим, что комплексные числа c_k^s для любых $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq s \leq n$ удовлетворяют условию

$$|c_k^s| \leq \frac{M_4}{(1 - |a_k|^2)}$$

с константой $M_4 = M_2 + M_3$.

Функцию $G \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ будем искать в виде

$$G = \sum_{k=1}^\infty \sum_{s=1}^n c_k^s G_{ks},$$

где G_{ks} — некоторые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) для любых $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq n$ выполняется соотношение $G_{ks}(a_l) = 0$;
- 2) для любых $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq s, t \leq n$ выполняется соотношение $\partial_t G_{ks}(a_l) = \delta_{ts} \delta_{kl}$;
- 3) $G \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что для любого $z \in \mathbb{D}^n$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^\infty \sum_{s=1}^n |c_k^s| \cdot |G_{ks}(z)| \leq C$.

Функции G_{ks} построим по следующей формуле

$$\begin{aligned} G_{ks}(z) &= \prod_{j:j \neq k} \left[\frac{z^s - a_j^s}{1 - \overline{z^s a_j^s}} \right]^2 \cdot \left[\frac{z^s - a_k^s}{1 - \overline{z^s a_k^s}} \right] \\ &\times \prod_{j:j \neq k} \left[\frac{a_k^s - a_j^s}{1 - \overline{a_k^s a_j^s}} \right]^{-2} \cdot [1 - |a_k^s|^2] \left[\frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - \overline{z^s a_k^s}} \right]^4 \cdot W(a_k^s, z^s), \end{aligned}$$

где функции W задаются формулой из леммы D при $n = 1$

$$W(\zeta, z) = \exp \left[- \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{1 + \langle z, \overline{a_j} \rangle}{1 - \langle z, \overline{a_j} \rangle} - \frac{1 + \langle \zeta, \overline{a_j} \rangle}{1 - \langle \zeta, \overline{a_j} \rangle} \right) \left(\frac{(1 - |a_j|^2)(1 - |\zeta|^2)}{1 - |\langle \zeta, \overline{a_j} \rangle|^2} \right) \right].$$

Формулы для G_{ks} определены корректно, так как все бесконечные произведения и суммы сходятся в силу условия 2) из теоремы 1 и леммы D.

Покажем, что построенные функции G_{ks} обладают приведенными выше свойствами 1)–3).

Действительно, функции G_{ks} представляются в виде

$$G_{ks}(z) = \varphi(z)(z^s - a_l^s),$$

где φ – некоторая голоморфная функция. Отсюда следует свойство 1): $G_{ks}(a_l) = 0$ для любых $k, l \in \mathbb{N}$ и $1 \leq s \leq n$.

Для проверки свойства 2) заметим, что при $t \neq s$ функция $G_{ks}(z)$ не зависит от z^t , откуда следует, что $\partial_t G_{ks}(a_l) = 0$ при $t \neq s$. Поскольку функция G_{ks} представима в виде

$$G_{ks}(z) = \psi(z^s)(z^s - a_k^s)$$

для некоторой голоморфной функции ψ , удовлетворяющей $\psi(a_k^s) = 1$, то $\partial_s G_{ks}(a_k) = 1$, т.е. свойство 2) выполняется при $t = s, k = l$. Наконец, из представления

$$G_{ks}(z) = \omega(z^s)(z^s - a_l^s)^2,$$

выполненного для некоторой голоморфной функции ω при $l \neq k$, следует, что $\partial_s(G_{ks})(a_l) = 0$; тем самым, свойство 2) справедливо и при $t = s, k \neq l$.

Перейдем к доказательству свойства 3). Для любого $z \in \mathbb{D}^n$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |c_k^s| \cdot |G_{ks}(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |c_k^s| \prod_{j:j \neq k} \left| \frac{z^s - a_j^s}{1 - z^s a_j^s} \right|^2 \cdot \left| \frac{z^s - a_k^s}{1 - z^s a_k^s} \right| \\ &\times \prod_{j:j \neq k} \left| \frac{a_k^s - a_j^s}{1 - a_k^s a_j^s} \right|^{-2} \cdot |1 - |a_k^s||^2 \cdot \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s a_k^s} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)|. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как

$$\prod_{j:j \neq k} \left| \frac{z^s - a_j^s}{1 - z^s a_j^s} \right|^2 \cdot \left| \frac{z^s - a_k^s}{1 - z^s a_k^s} \right| \leq 1$$

для любого $z \in \mathbb{D}^n$, правая часть неравенства (5) оценивается через

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |c_k^s| \prod_{j:j \neq k} \left| \frac{a_k^s - a_j^s}{1 - a_k^s a_j^s} \right|^{-2} \cdot |1 - |a_k^s||^2 \cdot \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s a_k^s} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)|. \quad (6)$$

По условию теоремы

$$\prod_{j:j \neq k} \left| \frac{a_k^s - a_j^s}{1 - a_k^s a_j^s} \right|^{-2} \leq \delta^{-2},$$

поэтому выражение (6) можно оценить через

$$\delta^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |c_k^s| |1 - |a_k^s||^2 \cdot \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s a_k^s} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)|.$$

Поскольку $|c_k^s| |1 - |a_k^s|| \leq M_4$, последнее выражение не превосходит

$$\delta^{-2} M_4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s a_k^s} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)|. \quad (7)$$

Пользуясь леммой D, мы можем оценить (7) выражением вида

$$\delta^{-2} M_4 \sum_{s=1}^n M(\delta) \leq \text{const}.$$

Окончательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |c_k^s| \cdot |G_{ks}(z)| \leq \text{const}.$$

Тем самым показано, что функции G_{ks}, G, F удовлетворяют требуемым условиям, откуда вытекает утверждение теоремы 1.

Теорема 2 доказывается с помощью аналогичных рассуждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть дана A -допустимая последовательность комплексных чисел $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и векторов $\{b_k \in \mathbb{C}^n\}_{k=1}^{\infty}$ для алгебры $H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$, удовлетворяющая условиям 1), 2b) из определения (п. 2). Построим функцию $F \in H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$ такую, что $F(a_k) = f_k$ и $\partial_s F(a_k) = b_k^s$.

Заметим снова, что из условия 3) теоремы 2 следует в силу теоремы В, что последовательность $\{a_k \in \mathbb{B}^n\}_{k=1}^{\infty}$ является интерполяционной для алгебры $H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$, т.е. для заданного набора комплексных чисел $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ найдется функция $F_1 \in H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$ такая, что $F_1(a_k) = f_k$. Далее, в силу следствия существует константа M_3 , для которой выполнено неравенство

$$|\partial_{m_s} F_1(a_k)| = \left| \sum_{t=1}^n \partial_t F_1(a_k) m_s^t \right| \leq M_3 \frac{r(a_k, m_s)}{(r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2)}$$

для любых $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq s \leq n$.

Построим функцию $G \in H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$ такую, что $G(a_k) = 0$ и $\partial_s G(a_k) = b_k^s - \partial_s F_1(a_k)$. Тогда функция $F = F_1 + G \in H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$ будет удовлетворять условиям теоремы 2.

Введем обозначение $c_k^s := b_k^s - \partial_s F_1(a_k)$ и заметим, что комплексные числа c_k^s для любых $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq s \leq n$ удовлетворяют условию

$$\left| \sum_{t=1}^n c_k^s m_s^t \right| \leq M_4 \frac{r(a_k, m_s)}{(r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2)}$$

с константой $M_4 = M_2 + M_3$.

Функцию $G \in H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$ будем искать в виде

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n d_{ks} G_{ks},$$

где d_{ks} — некоторые комплексные числа, а G_{ks} — функции, удовлетворяющие следующим условиям :

- 1) для любых $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq n$ выполняется соотношение $G_{ks}(a_l) = 0$;
- 2) для любых $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq s, t \leq n$ выполняются соотношения $\partial_t G_{ks}(a_l) = \overline{m_s^t} \delta_{kl}$ и $\sum_{s=1}^n d_{ks} m_s = c_k$, т.е. $d_{ks} = \sum_{t=1}^n c_k^t m_s^t$ в силу ортонормированности базиса $\{m_s\}$;
- 3) $G \in H^{\infty}(\mathbb{B}^n)$, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что для любого $z \in \mathbb{B}^n$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |d_{ks}| |G_{ks}(z)| \leq C$.

Функции G_{ks} построим по следующей формуле

$$G_{ks}(z) = \prod_{j:j \neq k} \left[\frac{r(a_j, m_s)(\langle z, \overline{m_s} \rangle - \langle a_j, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_j, m_s) - \langle z, \overline{m_s} \rangle \langle a_j, \overline{m_s} \rangle} \right]^2 \times \left[\frac{r(a_k, m_s)(\langle z, \overline{m_s} \rangle - \langle a_k, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_k, m_s) - \langle z, \overline{m_s} \rangle \langle a_k, \overline{m_s} \rangle} \right] \times \prod_{j:j \neq k} \left[\frac{r(a_j, m_s)(\langle a_k, \overline{m_s} \rangle - \langle a_j, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_j, m_s) - \langle a_k, \overline{m_s} \rangle \langle a_j, \overline{m_s} \rangle} \right]^{-2} \cdot \frac{r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2}{r(a_k, m_s)} \times \left[\frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s \overline{a_k^s}} \right]^4 \cdot W(a_k, z),$$

где

$$W(\zeta, z) = \exp \left[- \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \langle z, \overline{a_j} \rangle}{1 - \langle z, \overline{a_j} \rangle} - \frac{1 + \langle \zeta, \overline{a_j} \rangle}{1 - \langle \zeta, \overline{a_j} \rangle} \right) \cdot \left(\frac{(1 - |a_j|^2)(1 - |\zeta|^2)}{1 - |\langle \zeta, \overline{a_j} \rangle|^2} \right) \right]$$

— функции из леммы D.

Формулы для G_{ks} определены корректно, так как все бесконечные произведения и суммы сходятся в силу условий 3), 4) из теоремы 2 и леммы D.

Покажем, что построенные функции G_{ks} обладают приведенными выше свойствами 1), 2), 3).

Действительно, для любого l функции G_{ks} можно представить в виде

$$G_{ks}(z) = \varphi(z) \langle z - a_l, \overline{m_s} \rangle,$$

где φ — некоторая голоморфная функция. Отсюда следует свойство 1): $G_{ks}(a_l) = 0$ для любых $k, l \in \mathbb{N}$ и $1 \leq s \leq n$.

Для проверки свойства 2) заметим, что поскольку функция G_{ks} представима в виде

$$G_{ks}(z) = \psi(z) \langle z - a_k, \overline{m_s} \rangle$$

для некоторой голоморфной функции ψ , удовлетворяющей $\psi(a_k^s) = 1$, то $\partial_t G_{ks}(a_k) = m_s^t$, т.е. свойство 2) выполняется при $k = l$. Наконец, из представления

$$G_{ks}(z) = \omega(z) \langle z - a_l, \overline{m_s} \rangle^2,$$

выполненного для некоторой голоморфной функции ω при $l \neq k$, следует, что $\partial_t(G_{ks}(a_l)) = 0$; тем самым, свойство 2) справедливо и при $k \neq l$.

Перейдем к доказательству свойства 3). Для любого $z \in \mathbb{B}^n$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |d_{ks}| |G_{ks}(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |d_{ks}| \prod_{j:j \neq k} \left| \frac{r(a_j, m_s)(\langle z, \overline{m_s} \rangle - \langle a_j, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_j, m_s) - \langle z, \overline{m_s} \rangle \langle a_j, \overline{m_s} \rangle} \right|^2 \times \\ &\times \left| \frac{r(a_k, m_s)(\langle z, \overline{m_s} \rangle - \langle a_k, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_k, m_s) - \langle z, \overline{m_s} \rangle \langle a_k, \overline{m_s} \rangle} \right| \times \\ &\times \prod_{j:j \neq k} \left| \frac{r(a_j, m_s)(\langle a_k, \overline{m_s} \rangle - \langle a_j, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_j, m_s) - \langle a_k, \overline{m_s} \rangle \langle a_j, \overline{m_s} \rangle} \right|^{-2} \times \\ &\times \left| \frac{r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2}{r(a_k, m_s)} \right| \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s \overline{a_k^s}} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)|. \quad (8) \end{aligned}$$

Так как для любого $z \in \mathbb{B}^n$

$$\prod_{j:j \neq k} \left| \frac{r(a_j, m_s)(\langle z, \overline{m_s} \rangle - \langle a_j, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_j, m_s) - \langle z, \overline{m_s} \rangle \langle a_j, \overline{m_s} \rangle} \right|^2 \left| \frac{r(a_k, m_s)(\langle z, \overline{m_s} \rangle - \langle a_k, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_k, m_s) - \langle z, \overline{m_s} \rangle \langle a_k, \overline{m_s} \rangle} \right| \leq 1,$$

из этого неравенства получаем следующую оценку на правую часть (8)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |d_{ks}| \prod_{j:j \neq k} \left| \frac{r(a_j, m_s)(\langle a_k, \overline{m_s} \rangle - \langle a_j, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_j, m_s) - \langle a_k, \overline{m_s} \rangle \langle a_j, \overline{m_s} \rangle} \right|^{-2} \\ & \times \left| \frac{r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2}{r(a_k, m_s)} \right| \cdot \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s \overline{a_k^s}} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)|. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу того, что

$$\prod_{j:j \neq k} \left| \frac{r(a_j, m_s)(\langle a_k, \overline{m_s} \rangle - \langle a_j, \overline{m_s} \rangle)}{r^2(a_j, m_s) - \langle a_k, \overline{m_s} \rangle \langle a_j, \overline{m_s} \rangle} \right|^{-2} \leq \delta_2^{-2},$$

по условию (4) выражение (9) можно оценить через

$$\delta_2^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |d_{ks}| \left| \frac{r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2}{r(a_k, m_s)} \right| \cdot \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s \overline{a_k^s}} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)|. \quad (10)$$

Применяя оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n |d_{ks}| \left| \frac{r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2}{r(a_k, m_s)} \right| \\ & = \sum_{s=1}^n \left| \sum_{t=1}^n c_k^t m_s^t \right| \left| \frac{r^2(a_k, m_s) - |\langle a_k, \overline{m_s} \rangle|^2}{r(a_k, m_s)} \right| \leq \sum_{s=1}^n M_4 \leq n M_4, \end{aligned}$$

получим для выражения (10) оценку вида

$$\delta_2^{-2} n M_4 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1 - |a_k^s|^2}{1 - z^s \overline{a_k^s}} \right|^4 \cdot |W(a_k^s, z^s)| \leq \text{const}$$

(последнее неравенство вытекает из леммы D).

Резюмируя, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n |d_{ks}| |G_{ks}(z)| \leq \text{const}.$$

Тем самым показано, что функции G_{ks} , G , F удовлетворяют требуемым условиям, откуда вытекает утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions // Amer. J. Math. 1958. V. 8. P. 921–930.
- [2] Berndtsson B. Interpolating sequences for H^∞ in the ball // Indag. Math. 1985. V. 88. P. 1–10.
- [3] Berndtsson B. Interpolating sequences in the polydisk // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 302. P. 161–169.
- [4] Varopoulos N. Th. Sur une problème d'interpolation // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1972. V. 274. P. 1539–1542.