Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Филатов, Асимптотический метод в задачах вычисления пределов максимальных средних, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 431–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:10:54

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

О. П. Филатов

Для непрерывной почти периодической функции $f: \mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$ установлено, что функция

$$M_f(\mu) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\tau, \gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\tau(\mu t), \gamma(t)) dt,$$

где точная верхняя грань берется по всем решениям системы дифференциальных включений $\dot{\tau} \in \mu G_\tau$, $\tau(0) = \tau_0$, $\dot{\gamma} \in G_\gamma$, $\gamma(0) = \gamma_0$, при $\mu \rightarrow +0$ имеет предел

$$\Psi_f = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\tau} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \Phi(\tau(\mu t)) dt, \quad \text{где } \Phi(\tau_0) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\tau_0, \gamma(t)) dt.$$

Таким образом, $\Psi_f = \lim_{\mu \rightarrow +0} M_f(\mu)$ и предел максимального среднего приближенно можно находить решая задачи меньшей размерности, если параметр μ мал. При этом, если компакты $G_\tau \subset \mathbb{R}^{m_\tau}$, $G_\gamma \subset \mathbb{R}^{m_\gamma}$ являются невырожденными, то Ψ_f не зависит от начальных данных.

Библиография: 3 названия.

1. Постановка задачи. Линейное пространство непрерывных почти периодических функций $f: \mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}^{m_\tau}$ и $\mathbb{R}^{m_\gamma}$ евклидовы пространства, будем обозначать $\Pi(\mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma})$. Для одной из таких функций рассмотрим предел

$$M_f(\mu) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\tau, \gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\tau(\mu t), \gamma(t)) dt, \quad (1)$$

где точная верхняя грань берется по всем решениям в смысле Каратеодори системы дифференциальных включений

$$\dot{\tau} \in \mu G_\tau, \quad \tau(0) = \tau_0, \quad (2)$$

$$\dot{\gamma} \in G_\gamma, \quad \gamma(0) = \gamma_0. \quad (3)$$

Здесь G_τ и G_γ непустые компактные множества соответственно из пространств $\mathbb{R}^{m_\tau}$ и $\mathbb{R}^{m_\gamma}$. Параметр $\mu > 0$ характеризует разнотемповость переменных τ и γ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00616.

Множество всех решений задач (2), (3), определенных в промежутке $t \geq 0$, будем обозначать соответственно $\Gamma_\tau(\tau_0)$, $\Gamma_\gamma(\gamma_0)$.

В данной работе ставится задача нахождения предельного значения $\lim_{\mu \rightarrow +0} M_f(\mu)$. Установлено, что указанный предел можно вычислять, решая последовательно задачи меньшей размерности соответственно для дифференциальных включений (3) и (2). Поскольку в одномерном случае пределы максимальных средних можно вычислять достаточно эффективно [1], полученные результаты позволяют приближенно находить решения и в многомерной ситуации для разнотемповых переменных. Особенно удобен такой прием при $m_\tau = m_\gamma = 1$.

С точки зрения приложений к теории усреднения дифференциальных включений обычно существенно, чтобы предел максимальных средних M_f не зависел от начальных условий. Тем не менее, мы будем рассматривать поставленную задачу в более общей постановке для таких компактов G_τ и G_γ , которые гарантируют независимость хотя бы предельного значения $\lim_{\mu \rightarrow +0} M_f(\mu)$ от начальных векторов τ_0, γ_0 .

2. Основные обозначения и определения. Пусть $C(\mathbb{R}^m)$ – пространство непрерывных функций $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной метрикой, $f_h(\gamma) = f(\gamma + h)$. Напомним, что функция $f \in C(\mathbb{R}^m)$ называется *почти периодической (по Боттеру)*, если для произвольной последовательности векторов $h_n \in \mathbb{R}^m$, $n = 1, 2, \dots$, семейство функций f_{h_n} будет предкомпактным.

Далее нам потребуется и эквивалентное определение почти периодичности по Бору: функция $f \in C(\mathbb{R}^m)$ называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что любой (m -мерный) куб из $\mathbb{R}^m$ с длиной стороны равной l , содержит векторный ε -почти период T_ε функции f , т.е. при любом $\gamma \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство $|f(\gamma + T_\varepsilon) - f(\gamma)| \leq \varepsilon$.

Для того чтобы предельное значение $\lim_{\mu \rightarrow +0} M_f(\mu)$ не зависело, причем равномерно, от начальных данных $\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_\gamma}$, на компакты G_τ , G_γ требуется наложить условия невырожденности в смысле следующего определения: компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ называется $(m - 1)$ -*невырожденным*, если его размерность $\dim(K) \geq m - 1$; при этом, если $\dim(K) = m - 1$, то компакт не должен принадлежать подпространству размерности $m - 1$. Для краткости будем говорить просто о *невырожденности* компакта K в условиях данного определения.

Например, в случае $m = 2$ компакт $K \subset \mathbb{R}^2$ будет невырожденным тогда и только тогда, когда множество K не принадлежит прямой, проходящей через начало координат.

Если компакты $G_\tau \subset \mathbb{R}^{m_\tau}$ и $G_\gamma \subset \mathbb{R}^{m_\gamma}$ являются невырожденными, то прямое произведение $G = G_\tau \times G_\gamma$ может оказаться и вырожденным. Например, если $m_\tau = 1$, $m_\gamma = 2$, $G_\tau = \{1\}$, $G_\gamma = \{1\} \times [1, 2]$, то множество $G \subset \mathbb{R}^3$ – вырожденное. В то же время невырожденность прямого произведения $G_\tau \times G_\gamma$ влечет невырожденность множеств G_τ и G_γ .

Сразу же отметим, что если предел максимального среднего существует равномерно по начальным условиям, то предел реализуется на некотором решении дифференциального включения. Этот факт (обоснованный в предыдущей публикации) мы будем использовать при доказательстве основной теоремы.

Модуль непрерывности функции $f(\tau, \gamma)$ по переменным $\tau \in \mathbb{R}^{m_\tau}$, вычисляемый по всем шарам пространства $\mathbb{R}^{m_\tau}$ радиуса $\delta > 0$, будем обозначать $\omega_\tau(\delta, f)$. Постоянная $f_0 = \sup_{\tau, \gamma} |f(\tau, \gamma)|$. Модуль множества $G_\tau \subset \mathbb{R}^{m_\tau}$ обозначается $\|G_\tau\| = \sup_{\gamma \in G_\tau} \|\gamma\|$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^{m_\tau}$ (а также и в пространстве $\mathbb{R}^{m_\gamma}$).

3. Основные результаты. Если $f \in \Pi(\mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma})$, то функция

$$\Phi(\tau_0) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\tau_0, \gamma(t)) dt, \quad (4)$$

где супремум берется по всем решениям $\gamma \in \Gamma_\gamma(\gamma_0)$, будет почти периодической, что следует из определения Бохнера. Следовательно, имеет смысл повторный предел максимального среднего

$$\Psi_f = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\tau} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \Phi(\tau(\mu t)) dt.$$

Здесь супремум берется по всем решениям $\tau \in \Gamma_\tau(\tau_0)$. Заметим, что предел Ψ_f не зависит от параметра μ .

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f \in \Pi(\mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma})$, а компакты $G_\tau \subset \mathbb{R}^{m_\tau}$ и $G_\gamma \subset \mathbb{R}^{m_\gamma}$ являются невырожденными. Тогда равномерно по начальным условиям $\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_\gamma}$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} M_f(\mu) = \Psi_f; \quad (5)$$

при этом Ψ_f не зависит от начальных данных.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Оно основывается на нескольких леммах.

ЛЕММА 1. Если компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ является невырожденным, а функция $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $t_{\max} = t_{\max}(\varepsilon, K) > 0$, что для любых точек $a, b \in \mathbb{R}^m$ найдется число $t_a \in [0, t_{\max}]$ и интегральная кривая дифференциального включения $\dot{\gamma} \in K$, соединяющая точку $(0, b)$ с точкой $(t_a, a + T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^{m+1}$ для некоторого ε -почти периода T_ε функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для задачи $\dot{\gamma} \in K$, $\gamma(0) = b$, на основании свойств интегралов от многозначных отображений [2], множество достижимости в момент времени t равно $b + t \cdot \text{co}(K)$, где $\text{co}(K)$ – выпуклая оболочка компакта. Поэтому объединение множеств достижимости по всем $t \geq 0$ представляет из себя конус C_b с вершиной в точке b ,

$$C_b = \{\gamma \in \mathbb{R}^m : \gamma = b + t \cdot \text{co}(K), \quad t \geq 0\}.$$

Поскольку компакт K является невырожденным, в случае, если размерность компакта $\dim(K) = m - 1$, множество K содержится в некоторой гиперплоскости P , не проходящей через $0 \in \mathbb{R}^m$. По теореме о непустоте относительной внутренности выпуклого множества [3, теорема 1.5, с. 202] получаем, что множество $\text{co}(K)$ содержит пересечение гиперплоскости P с некоторым шаром пространства $\mathbb{R}^m$ радиуса $r_0 > 0$ с центром в некоторой точке гиперплоскости b_0 , при этом угол между вектором b_0 и нормальным вектором гиперплоскости P отличен от прямого. В таком случае точка b_0 является внутренней для конуса C_b .

Если $\dim(K) = m$, то внутренность множества $\text{co}(K)$ непустая, поэтому в качестве P можно взять гиперплоскость, проходящую через внутреннюю точку b_0 с нормальным вектором равным b_0 .

Таким образом, в любом случае существует (m -мерный) куб $K(b_0) \subset C_b$ с центром в точке b_0 и длиной ребра $r > 0$ такой, что $b + K(b_0) \subset C_b$. Можно считать, что куб $b + K(b_0)$ принадлежит открытому множеству

$$L(2) = \{\gamma \in C_b : \gamma = b + t(b_0 + h), 0 < t < 2, \|h\| < r_0, h \in P\}.$$

Куб $b + qK(b_0)$ при любом $q > 0$ также принадлежит конусу C_b , поэтому при $q = l/r$ длина его ребра равна l . Здесь $l = l(\varepsilon) > 0$ — число из определения почти периодичности функции f по Бору. Обозначим этот куб K_a . Пусть T_ε некоторый ε -почти период функции f , принадлежащий кубу $K_a - a$. Тогда для некоторого вектора $a_1 \in K_a$ выполняется равенство $T_\varepsilon = a_1 - a$. Следовательно, $a + T_\varepsilon \in K_a$.

Так как по построению $K_a \subset L(2q)$, то некоторая интегральная кривая задачи $\dot{\gamma} \in G$, $\gamma(0) = b$, обязательно пройдет через точку $(t_a, a + T_\varepsilon)$ в момент времени $t_a \leq 2l/r = t_{\max}$. Постоянная $t_{\max}$ для данного $\varepsilon > 0$ определяется только компактом K и не зависит от выбора точек $a, b \in \mathbb{R}^m$. Лемма 1 доказана.

В следующей лемме

$$\varphi(\Delta) = \sup_{\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}} |\Phi(\tau_0) - M(\tau_0, \Delta)|, \quad (6)$$

где

$$M(\tau_0, \Delta) = \sup_{\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_\gamma}} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\tau_0, \gamma(t)) dt,$$

а точная верхняя грань берется по всем решениям $\gamma \in \Gamma_\gamma(\gamma_0)$.

ЛЕММА 2. Пусть компакт $G_\gamma \subset \mathbb{R}^{m_\gamma}$ является невырожденным, а функция $f \in \Pi(\mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma})$. Тогда предел Φ , определяемый (4), существует равномерно по $\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_\gamma}$, т.е. $\varphi(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow \infty$, при этом Φ не зависит от γ_0 . Более того, существует оптимальное решение $\gamma_{\text{ор}}$ задачи (2), вдоль которого реализуется предел Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Обоснование существования предела Φ на основании леммы 1 проводится аналогично доказательству [1, теорема 2] в одномерном случае. Действительно, в указанной ссылке существенно, что постоянную $t_{\max} = t_{\max}(\varepsilon, G_\gamma)$ (в [1, теорема 2] она обозначалась t_ε) из леммы 1 можно выбрать общей для любого параметра $\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}$. Последнее же следует из того, что пространство $\Pi(\mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma})$ является замыканием в равномерной метрике пространства тригонометрических полиномов относительно переменных $\tau \in \mathbb{R}^{m_\tau}$ и $\gamma \in \mathbb{R}^{m_\gamma}$. Из равномерности существования предела, как уже отмечалось, следует существование оптимального решения. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in \Pi(\mathbb{R}^m)$. Тогда для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ предел максимального среднего

$$M_f = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt,$$

где супремум берется по всем решениям задачи $\dot{\gamma} \in K$, $\gamma(0) = \gamma_0$, существует равномерно по $\gamma_0 \in \mathbb{R}^m$. Более того, существует оптимальное решение $\gamma_{\text{ор}}$ дифференциального включения, вдоль которого реализуется предел M_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Если компакт K – невырожденный, то утверждение следует из леммы 2. Покажем, что и общий случай сводится к основному. Действительно, если компакт K окажется вырожденным, то в простейшем случае $K = \{0\}$ утверждение очевидно. Поэтому считаем $K \neq \{0\}$. Тогда всегда существует собственное подпространство $L \subset \mathbb{R}^m$, содержащее множество K , размерность которого $\dim(L) = n \geq 1$, при этом по отношению к подпространству L само множество K уже является невырожденным. Введем декартовую систему координат, определяемую базисом $e_1, e_2, \dots, e_m$ пространства $\mathbb{R}^m$, где векторы $e_{n+1}, \dots, e_m$ ортогональны к подпространству L , а векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис в L .

В новых координатах функция f будет по-прежнему почти периодической.

Любое решение дифференциального включения, записанное в этих координатах, обладает свойствами: последние $m - n$ координат решения будут постоянными в силу дифференциального включения $\dot{\gamma} \in K$. Следовательно, их можно рассматривать как параметры в задаче вычисления предела максимального среднего. Поэтому по отношению к координатному пространству $\mathbb{R}^n$ опять можно воспользоваться леммой 2. Лемма 3 доказана.

На основании леммы 3 обозначим $\tau_* \in \Gamma_\tau(\tau_0)$ – решение дифференциального включения (2) для которого

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\tau} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \Phi(\tau(\mu t)) dt = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \Phi(\tau_*(\mu t)) dt = \Psi_f, \quad (7)$$

где супремум берется по всем решениям $\tau \in \Gamma_\tau(\tau_0)$. Положим также $\Delta_0 = \Delta_0(\mu) = 1/\sqrt{\mu}$, $t_j = j\Delta_0$, $j = 0, 1, \dots$,

$$S_n(\tau) = \sup_{\gamma} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau(\mu t_j), \gamma(t)) dt.$$

Здесь точная верхняя грань берется по всем решениям $\gamma \in \Gamma_\gamma(\gamma_0)$; $\tau \in \Gamma_\tau(\tau_0)$ – произвольное решение задачи (2), $n = 1, 2, \dots$.

Ниже постоянная $t_{\max} = t_{\max}(\varepsilon, G_\gamma)$ определяется леммой 1 для компакта G_γ и дифференциального включения $\dot{\gamma} \in G_\gamma$. Бесконечно малая функция $\varphi(1/\sqrt{\mu})$ при $\mu \rightarrow +0$ из леммы 2 вводится равенством (6). Наконец, $\delta_\mu = \|G_\tau\| \sqrt{\mu}$.

ЛЕММА 4. Пусть компакты $G_\gamma \subset \mathbb{R}^{m_\gamma}$ и $G_\tau \subset \mathbb{R}^{m_\tau}$ являются невырожденными, а функция $f \in \Pi(\mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_1 = n_1(\varepsilon, \mu) > 0$, что если $n \geq n_1$, то при любых $\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_\gamma}$, $\mu > 0$ и любом решении $\tau \in \Gamma_\tau(\tau_0)$ выполняется оценка сверху

$$S_n(\tau) \leq \Psi_f + \omega_\tau(\delta_\mu, f) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) + \varepsilon; \quad (8)$$

для решения $\tau_* \in \Gamma_\tau(\tau_0)$ из (11с) имеет место оценка снизу

$$S_n(\tau_*) \geq \Psi_f - 2f_0 t_{\max} \sqrt{\mu} - \omega_\tau(\delta_\mu, f) - \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) - 3\varepsilon. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Для обоснования оценки сверху воспользуемся неравенством

$$S_n(\tau) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} M(\tau_j, \Delta_0),$$

где $\tau_j = \tau(\mu t_j)$. Отсюда согласно (6) получим

$$S_n(\tau) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\Phi(\tau_j) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) \right) = \frac{1}{n\Delta_0} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\tau_j)\Delta_0 + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right). \quad (10)$$

На отрезке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ выполняется неравенство $|\tau(\mu t) - \tau_j| \leq \delta_\mu$, поэтому при любом натуральном n выполняется оценка

$$\left| \frac{1}{n\Delta_0} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\tau_j)\Delta_0 - \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} \Phi(\tau(\mu t)) dt \right| \leq \omega_\tau(\delta_\mu, f). \quad (11)$$

При достаточно большом $n \geq n_1(\varepsilon, \mu)$ и любых $\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_\gamma}$ справедливы оценки

$$\frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} \Phi(\tau(\mu t)) dt \leq \sup_\tau \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} \Phi(\tau(\mu t)) dt \leq \Psi_f + \varepsilon, \quad (12)$$

где супремум берется по всем решениям $\tau \in \Gamma_\tau(\tau_0)$.

Из (10)–(12) получим (8).

Для получения оценки снизу выражения $S_n(\tau_*)$ построим решение $\gamma_* \in \Gamma_\gamma(\gamma_0)$ дифференциального включения (3) последовательно на отрезках $t_j \leq t \leq t_{j+1}$. С этой целью для любого j введем функцию γ_j на отрезке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, которая является решением дифференциального включения (3) с некоторым начальным условием $\gamma_j(t_j) = \gamma_{j,0}$, при этом, согласно (6),

$$\left| \Phi(\tau_j) - \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau_j, \gamma_j(t)) dt \right| \leq \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) + \varepsilon, \quad (13)$$

где $\tau_j = \tau_*(\mu t_j)$. Пусть теперь постоянная $t_{\max} = t_{\max}(\varepsilon, G_\gamma)$ определяется леммой 1 для компакта G_γ и дифференциального включения $\dot{\gamma} \in G_\gamma$. По этой же лемме существует число c_0 , $0 \leq c_0 \leq t_{\max}$, и решение $\beta_0 = \beta_0(t)$ дифференциального включения $\dot{\gamma} \in G_\gamma$, определенное на отрезке $[t_0, t_0 + c_0]$, такие, что

$$\beta_0(t_0) = \gamma_0, \quad \beta_0(c_0) = \gamma_{0,0} + T_{\varepsilon,0}$$

для некоторого ε -почти периода $T_{\varepsilon,0}$ функции $f(\tau_0, \cdot)$.

Теперь можно определить решение γ_* на отрезке $[t_0, t_1]$: $\gamma_*(t) = \beta_0(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + c_0$, $\gamma_*(t) = \gamma_0(t - c_0) + T_{\varepsilon,0}$ при $t_0 + c_0 \leq t \leq t_1$.

Если решение γ_* уже построено в промежутке $t_0 \leq t \leq t_j$, $j \geq 1$, то оно продолжается на отрезок $[t_j, t_{j+1}]$ по следующей схеме.

По лемме 1 существуют постоянная c_j , $0 \leq c_j \leq t_{\max}$, и решение $\beta_j = \beta_j(t)$ дифференциального включения $\dot{\gamma} \in G_\gamma$, определенное на отрезке $[t_j, t_j + c_j]$, такие, что $\beta_j(t_j) = \gamma_*(t_j)$, $\beta_j(c_j) = \gamma_{j,0} + T_{\varepsilon,j}$ для некоторого ε -почти периода $T_{\varepsilon,j}$ функции $f(\tau_j, \cdot)$.

Решение γ_* на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ определяется следующим образом: $\gamma_*(t) = \beta_j(t)$ при $t_j \leq t \leq t_j + c_j$, $\gamma_*(t) = \gamma_j(t - c_j) + T_{\varepsilon, j}$ при $t_j + c_j \leq t \leq t_{j+1}$. Таким образом, решение $\gamma_* \in \Gamma_\gamma(\gamma_0)$ определено на всем промежутке $t \geq 0$.

Нетрудно видеть, что для построенного решения и решения γ_j дифференциального включения $\dot{\gamma} \in G_\gamma$, $\gamma(t_j) = \gamma_{j,0}$, имеет место оценка средних

$$\left| \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau_j, \gamma_j(t)) dt - \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau_j, \gamma_*(t)) dt \right| \leq \frac{2f_0 t_{\max}}{\Delta_0} + \varepsilon = 2f_0 t_{\max} \sqrt{\mu} + \varepsilon. \quad (14)$$

На основании тождества

$$\begin{aligned} S_n(\tau_*) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau_j, \gamma_*(t)) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\tau_j) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau_j, \gamma_*(t)) dt - \frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau_j, \gamma_j(t)) dt \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\Delta_0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\tau_j, \gamma_j(t)) dt - \Phi(\tau_j) \right) \end{aligned}$$

и оценок (13), (14) получим соотношение

$$S_n(\tau_*) \geq \frac{1}{n\Delta_0} \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\tau_j) \Delta_0 - 2f_0 t_{\max} \sqrt{\mu} - \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) - 2\varepsilon.$$

Далее, согласно (11) при $\tau = \tau_*$ имеем

$$S_n(\tau_*) \geq \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} \Phi(\tau_*(\mu t)) dt - 2f_0 t_{\max} \sqrt{\mu} - \omega_\tau(\delta_\mu, f) - \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) - 2\varepsilon. \quad (15)$$

При достаточно большом $n \geq n_1(\varepsilon, \mu)$ и любых $\tau_0 \in \mathbb{R}^{m_\tau}$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{m_\gamma}$ получим

$$\left| \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} \Phi(\tau_*(\mu t)) dt - \Psi_f \right| \leq \varepsilon.$$

Отсюда и из (15) следует требуемая оценка (9). Лемма 4 доказана.

Теперь переходим к непосредственному доказательству теоремы. По лемме 3 существует оптимальное решение $\tau_{\text{оп}}$, $\gamma_{\text{оп}}$ системы (2), (3), для которого

$$M_f(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_f^n(\mu),$$

где

$$M_f^n(\mu) = \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} f(\tau_{\text{оп}}(\mu t), \gamma_{\text{оп}}(t)) dt.$$

Далее, поскольку

$$M_f^n(\mu) \leq S_n(\tau_{\text{оп}}) + \omega_\tau(\delta_\mu, f),$$

по лемме 4 из (8) при $\tau = \tau_{\text{ор}}$ следует

$$M_f^n(\mu) \leq \Psi_f + 2\omega_\tau(\delta_\mu, f) + \varphi(1/\sqrt{\mu}) + \varepsilon. \quad (16)$$

С другой стороны, для любого фиксированного решения задачи (2), в частности для $\tau_* \in \Gamma_\tau(\tau_0)$, выполняется неравенство

$$M_f^n(\mu) \geq \sup_{\gamma} \frac{1}{n\Delta_0} \int_0^{n\Delta_0} f(\tau_*(\mu t), \gamma(t)) dt \geq S_n(\tau_*) - \omega_\tau(\delta_\mu, f).$$

В силу (9) имеем

$$M_f^n(\mu) \geq \Psi_f - 2f_0 t_{\max} \sqrt{\mu} - 2\omega_\tau(\delta_\mu, f) - \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) - 3\varepsilon. \quad (17)$$

После перехода к пределу в (16), (17) сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $\mu \rightarrow +0$, получим соотношение (5), так как функция $\varphi(1/\sqrt{\mu})$ при $\mu \rightarrow +0$ является бесконечно малой по лемме 2. Независимость Ψ_f от начальных данных следует из невырожденности компактов G_τ, G_γ на основании леммы 2. Теорема доказана.

5. Замечания. 1. В условиях теоремы множество $G_\tau \times G_\gamma$ может оказаться и вырожденным. Тогда предел максимального среднего M_f в общем случае зависит от начальных данных.

2. На примерах нетрудно показать, что вырожденность одного из компактов G_τ, G_γ может привести к зависимости предельного значения Ψ_f от начальных данных. В то же время, предельное соотношение (5) будет иметь место и в этом более общем случае.

3. Для периодической функции $f: \mathbb{R}^{m_\tau} \times \mathbb{R}^{m_\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$ при $m_\gamma = 1$ из [1] следует, что $\varphi(1/\sqrt{\mu}) = O(\sqrt{\mu})$ при $\mu \rightarrow 0$, поэтому, если по переменной $\gamma \in \mathbb{R}$ функция f будет липшицевой, то скорость сходимости к предельному значению в (5) будет не хуже, чем $\sqrt{\mu}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №5. С. 759–767.
- [2] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
- [3] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

Самарский государственный университет

Поступило
10.03.98