Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Хабиров, Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 3, 439–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:13:22

УДК 517.958

ПРИВЕДЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ ПОДМОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

С. В. Хабилов

В работе рассматривается способ приведения инвариантной подмодели к каноническому виду.

Библиография: 4 названия.

Уравнения газовой динамики $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$,

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad Dp + A(p, \rho) \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

допускают 11-ти мерную алгебру Ли L_{11} преобразований с произвольной функцией $A(\rho, p)$. Для специальных функций $A(\rho, p)$ алгебра расширяется [1]. Для каждой одномерной или двумерной подалгебры можно рассматривать инвариантное решение, если выполнены необходимые условия существования инвариантного решения [2, с. 250]. Все такие подалгебры перечислены с точностью до внутренних автоморфизмов. Для L_{11} подалгебры сведены в таблицу 6 работы [1], для алгебры Ли L_{13} политропного газа и алгебры Ли L_{14} политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ таблицы подалгебр приведены в работах [3] и [4]. Анализ инвариантов подалгебр показывает, что три инварианта можно выбрать линейными по скоростям $\vec{u} = (u, v, w)$ и независимыми от давления p и плотности ρ , один инвариант зависит линейно от давления и независимых переменных, один инвариант зависит линейно и однородно от плотности и независимых переменных. Для того чтобы инварианты можно было выбрать именно такими, необходимо в подалгебрах, содержащих вращение, перейти в цилиндрические координаты, связанные с этим вращением. Остальные инварианты выражаются через независимые переменные t, x, y, z .

Инвариантные подмодели приводятся выбором инвариантов к двум каноническим видам систем дифференциальных уравнений. Эволюционный вид получается, когда время t есть инвариант подалгебры. Система походит на неоднородные уравнения нестационарной плоской или одномерной газодинамики с множителями при градиенте давления. Система смешанного вида походит на неоднородные уравнения стационарной газодинамики с множителями при градиенте давления и получается, когда имеются 3 (или 2 в случае двумерной подалгебры) инварианта из независимых переменных, из которых определяются пространственные переменные.

Рассматривается способ приведения инвариантной подмодели к каноническому виду.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01780.

1. Эволюционная система получается, когда инвариантное решение имеет вид

$$\vec{u} = B(\vec{v} - \vec{b}), \quad \rho = mR, \quad p = nP + k,$$

где элементы невырожденной матрицы $B, \vec{b}, m, n, k$ есть функции независимых переменных t, x, y, z ; $\vec{v}, R, P$ есть инвариантные скорости, плотность, давление, зависящие от инвариантов $t, I(x, y, z), J(x, y, z)$.

Подстановка этого вида решения в векторное уравнение системы (1) дает

$$\vec{v}_t + (B(\vec{v} + \vec{b}) \cdot \nabla I) \vec{v}_I + (B(\vec{v} + \vec{b}) \cdot \nabla J) \vec{v}_J + nm^{-1} R^{-1} (P_I B^{-1} \cdot \nabla I + P_J B^{-1} \nabla J) \vec{a},$$

где величины $B(\vec{v} + \vec{b}) \cdot \nabla I = (\vec{v} + \vec{b}) \cdot B^T \nabla I$, $B(\vec{v} + \vec{b}) \cdot \nabla J = (\vec{v} + \vec{b}) \cdot B^T \nabla J$, $nm^{-1} B^{-1} \nabla I$, $nm^{-1} B^{-1} \nabla J$, $\vec{a}$ выражаются через инварианты. Выражение для компонент вектора $\vec{a}$ не содержит производных от функций инвариантов.

Дивергенция вычисляется по формуле: $\operatorname{div} \vec{u} = B^T \nabla I \cdot \vec{v}_I + B^T \nabla J \cdot \vec{v}_J + \dots$, где многоточием будут обозначаться слагаемые, не содержащие производных. Вводятся новые инвариантные скорости $u = (\vec{v} + \vec{b}) \cdot B^T \nabla I$, $v = (\vec{v} + \vec{b}) \cdot B^T \nabla J$, w – линейная комбинация скоростей $\vec{v}$, линейно независимая с u, v . Тогда первые два уравнения (1) и дивергенция примут вид

$$\begin{aligned} D_1 u + R^{-1} nm^{-1} (P_I \nabla I \cdot \nabla I + P_J \nabla I \cdot \nabla J) &= b_1, \\ D_1 v + R^{-1} nm^{-1} (P_I \nabla I \cdot \nabla J + P_J \nabla J \cdot \nabla I) &= b_2, \quad \operatorname{div} \vec{u} = u_I + v_J + \dots, \end{aligned}$$

где $D_1 = \partial_t + \vec{u}_1 \cdot \nabla_1 = \partial_t + u \partial_I + v \partial_J$. Таким образом, инвариантная подмодель имеет представление

$$\begin{aligned} D_1 u + R^{-1} (c_{11} P_I + c_{12} P_J) &= b_1, \\ D_1 v + R^{-1} (c_{12} P_I + c_{22} P_J) &= b_2, \\ D_1 w + R^{-1} (c_{13} P_I + c_{23} P_J) &= b_3, \\ D_1 R + R(u_I + v_J) &= R b_4, \\ D_1 P + A(R, P)(u_I + v_J) &= b_5. \end{aligned} \tag{2}$$

Систему (2) можно упростить.

ТЕОРЕМА 1. *Заменой инвариантов I, J можно привести систему (2) к каноническому эволюционному виду с диагональной матрицей $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену инвариантов $\Phi = \varphi(I, J)$, $\Psi = \psi(I, J)$ с невырожденной матрицей Якоби M ; $u_1 = \varphi_I u + \varphi_J v$, $v_1 = \psi_I u + \psi_J v$ или в матричном виде $\vec{u}_1 = M \vec{u}$. При этом $D_1 = \partial_t + u_1 \partial_\Phi + v_1 \partial_\Psi = \partial_t + \vec{u}_1 \cdot \nabla_2 = D_2$, $I_I + v_J = u_1 \Phi + v_1 \Psi + \dots$, $\nabla_1 P = M^T \nabla_2 P$. Первые два уравнения системы (2) в новых переменных примут вид: $D_1 \vec{u}_1 + R^{-1} C_1 \nabla_2 P = \vec{c}$, $C_1 = M C M^T$. Остальные не изменяются.

Симметричная матрица C имеет действительные собственные значения

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (c_{11} + c_{22} \pm c_{12} (k^2 + 1)^{1/2}), \quad k = c_{12}^{-1} (c_{11} - c_{22})$$

и действительные ортонормированные собственные векторы

$$\vec{e}_+ = (\cos \alpha, -\sin \alpha), \quad \vec{e}_- = (\sin \alpha, \cos \alpha), \quad k_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(k - (k^2 + 1)^{1/2}).$$

В базисе из собственных векторов с матрицей перехода $N = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ матрица C_1 становится диагональной: $C_1 \operatorname{diag}(\lambda_+, \lambda_-) = N^T C N$. Отсюда следуют уравнения для нахождения функций φ, ψ : $\varphi_I = \cos \alpha$, $\varphi_J = -\sin \alpha$; $\psi_I = \sin \alpha$, $\psi_J = \cos \alpha$. Эти системы могут оказаться несовместными.

Для исправления ситуации растягиваются векторы $\lambda \vec{e}_+$, $\mu \vec{e}_-$, по которым определяется новая матрица перехода. Тогда диагональная матрица изменится: $C_1 = \operatorname{diag}(\lambda_+ \mu^2, \lambda_- \lambda^2)$, а уравнения для нахождения функций φ, ψ примут вид:

$$\varphi_I = \lambda \cos \alpha, \quad \varphi_J = -\lambda \sin \alpha; \quad \psi_I = \mu \sin \alpha, \quad \psi_J = \mu \cos \alpha. \quad (3)$$

Условия совместности систем (3) есть уравнения для определения λ, μ :

$$\begin{aligned} \lambda_J + k_1 \lambda_I &= \lambda(1 + k_1^2)^{-1}(k_1 k_{1J} - k_{1I}), \\ -k_1 \mu_J + \mu_I &= \mu(1 + k_1^2)^{-1}(k_{1J} + k_1 k_{1I}). \end{aligned} \quad (4)$$

Величины λ или μ могут равняться 1, если $k_1 k_{1J} = k_{1I}$ или $k_{1J} + k_1 k_{1I} = 0$.

В качестве примера рассмотрим одномерную подалгебру 1.21 для политропного газа $A = \gamma p$ из [3]. (В работе [3] приведена 13-мерная алгебра Ли L_{13} , допускаемая уравнениями политропного газа. В ней перечислены все ее подалгебры всех размерностей, которые сведены в таблицу с присвоением каждой алгебре номера. Я рассматриваю одномерную подалгебру с номером 1.21 из таблицы.) В цилиндрической системе координат $x, y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, $u = U$, $v = V \cos \theta - W \sin \theta$, $w = V \sin \theta + W \cos \theta$, оператор одномерной подалгебры такой:

$$X_7 + a(X_{11} - X_{13}) + bX_{14} = \partial_\theta + a(x\partial_x + r\partial_r + U\partial_u + V\partial_v + W\partial_w) + (3a+b)\rho\partial_\rho + (5a+b)p\partial_p.$$

Инварианты из независимых переменных таковы: $t, s = re^{-a\theta}$, $q = xe^{-a\theta}$. Инвариантное решение имеет вид: $U = u'e^{a\theta}$, $V = v'e^{a\theta}$, $W = w'e^{a\theta}$, $\rho = \rho'e^{(3a+b)\theta}$, $p = p'e^{(5a+b)\theta}$. Подстановка в систему (1) приводит к инвариантной подмодели

$$\begin{aligned} D &= \partial_t + (u' - aqs^{-1}w')\partial_q + (v' - aw')\partial_s, \\ Du' + \rho'^{-1}p'_q &= -as^{-1}u'w', \\ Dv' + \rho'^{-1}p'_s &= s^{-1}w'^2, \\ Dw' - a\rho'^{-1}(p'_s + qs^{-1}p'_q) &= -as^{-1}w'^2 - s^{-1}v'w' - (b+5a)s^{-1}\rho'^{-1}p', \\ D\rho' + \rho'(u'_q + v'_s - aqs^{-1}w'_q - aw'_s) &= -\rho's^{-1}(v' + w'(b+4a)), \\ Dp' + \gamma\rho'(u'_q + v'_s - aqs^{-1}w'_q - aw'_s) &= -p's^{-1}(\gamma v' + w'(b+a(\gamma+5))). \end{aligned} \quad (5)$$

Замена $u' - aqs^{-1}w' = u$, $v' - aw' = v$, $p' = P$, $\rho' = R$, $w' = w$ приводит к системе (2), где $c_{11} = 1 + a^2q^2s^{-2}$, $c_{12} = a^2qs^{-1}$, $c_{22} = 1 + a^2$,

$$\begin{aligned} b_1 &= 2aws^{-1}(-a + qs^{-1}v) + a^2qs^2w^2 + a(b + 5a)qs^{-2}PR^{-1}, \\ b_2 &= (1 + a^2)s^{-1}w^2 + a(b + 5a)s^{-1}PR^{-1}, \\ b_3 &= -2as^{-1}w^2 - s^{-1}vw - s^{-1}(b + 5a)PR^{-1}, \\ b_4 &= -s^{-1}(v + (b + 5a)w), \quad b_5 = -Ps^{-1}[\gamma v + (b + (2\gamma + 5)a)w]. \end{aligned}$$

Матрица C имеет собственные значения $\lambda_+ = 1$, $\lambda_- = 1 + a^2 + a^2q^2s^{-2}$ и собственные векторы

$$\vec{e}_+ = (-s(q^2 + s^2)^{-1/2}, q(q^2 + s^2)^{-1/2}), \quad \vec{e}_- = (q(q^2 + s^2)^{-1/2}, s(q^2 + s^2)^{-1/2}).$$

Замена $I = \varphi(q, s)$, $J = \psi(q, s)$ приводит матрицу C к диагональному виду, если $\psi_q = q(q^2 + s^2)^{-1/2}$, $\psi_s = s(q^2 + s^2)^{-1/2} \Rightarrow \psi = (q^2 + s^2)^{-1/2}$; $\varphi_q = -s(q^2 + s^2)^{-1/2}$, $\varphi_s = q(q^2 + s^2)^{-1/2} \Rightarrow$ система не совместна. Для исправления ситуации растягивается вектор $\vec{e}_+ \rightarrow \lambda \vec{e}_+$. Тогда $C_1 = \text{diag}(\lambda_+ \lambda^2, \lambda_-)$; система (3) имеет вид $\varphi_q = -\lambda s(q^2 + s^2)^{-1/2}$, $\varphi_s = \lambda q(q^2 + s^2)^{-1/2}$; уравнение (4) $q\lambda_q + s\lambda_s + \lambda = 0$ имеет решение $\lambda = s^{-1}f(qs^{-1})$. Выбираем $f(\tau) = -(1 + \tau^2)^{1/2}$; тогда $q = J \sin I$, $s = J \cos I$ (I, J — полярные координаты в плоскости s, q), $u = Ju_1 \cos I + v_1 \sin I$, $v = -Ju_1 \sin I + v_1 \cos I$, $D = \partial_t + u\partial_q + v\partial_s = \partial_t + u_1\partial_I + v_1\partial_J$.

Система (5) примет канонический вид:

$$\begin{aligned} Du_1 + R^{-1}J^{-2}P_I &= -2J^{-1}u_1v_1 - 2aJ^{-1}u_1w \cos^{-1}I - J^{-1}w^2 \operatorname{tg} I, \\ Dv_1 + R^{-1}(1 + a^2 \cos^{-2}I)P_J &= -J^{-1}w^2(1 + a^2 \cos^{-2}I) + Ju_1^2 \\ &\quad - 2au_1w \sin I \cos^{-2}I + a(b + 5a)J^{-1}R^{-1}P \cos^{-2}I, \\ Dw - aR^{-1}P_y \cos^{-1}I &= -2aJ^{-1}w^2 \cos^{-1}I - wJ^{-1}(-Ju_1 \operatorname{tg} I + v_1) \\ &\quad - (b + 5a)J^{-1}R^{-1}P \cos^{-1}I, \\ DR + R(u_{1I} + v_{1J}) &= -R(2J^{-1}v_1 - u_1 \operatorname{tg} I + wJ^{-1}(b + 5a) \cos^{-1}I), \\ DP + \gamma P(u_{1I} + v_{1J}) &= -P(2\gamma J^{-1}v_1 - \gamma u_1 \operatorname{tg} I \\ &\quad + wJ^{-1}(b + (5 + 2\gamma)a) \cos^{-1}I). \end{aligned}$$

2. Инвариантная система смешанного типа получается, когда у одномерной подалгебры есть три инварианта I_1, I_2, I_3 из независимых переменных системы (1) с ненулевым нулю якобианом $D(I_1, I_2, I_3)/D(x, y, x) \neq 0$. Вид инвариантного решения таков: $\vec{u} = B\vec{v} + \vec{b}$, $\rho = mR$, $p = nP + k$, где инварианты $\vec{v}, P, R$ зависят от I_1, I_2, I_3 ; элементы невырожденной матрицы $B, \vec{b}, m, n, k$ есть функции независимых переменных.

Подстановка в векторное уравнение системы (1) дает

$$\vec{v}_i DI_i + R^{-1}m^{-1}nP_iB^{-1}\nabla I_i = \vec{a},$$

где $\vec{v}_i = \partial_i \vec{v}$, $P_i = \partial_i P$, ∂_i — дифференцирование по I_i , а коэффициенты уравнения после сокращения на множитель μ могут быть выражены через инварианты.

Введем новые инвариантные скорости $\vec{w} = \mu^{-1}D\vec{I}$, оператор дифференцирования $D_1 = w_i\partial_i$ и $\nabla_1 = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} D_1 w_k &= \mu^{-1} D_1 (I_{kt} + \vec{u} \cdot \nabla I_k) + \dots = \mu^{-1} D_1 (B \vec{v} \cdot \nabla I_k) + \dots = \mu^{-1} D_1 \vec{v} \cdot B^T \nabla I_k + \dots \\ &= -\mu^{-1} w_i \partial_i \vec{v} \cdot B^T \nabla I_k + \dots = \mu^{-2} D I_i \partial_i \vec{v} \cdot B^T \nabla I_k + \dots \\ &= -\mu^{-2} R^{-1} n m^{-1} P_i B^{-1} \nabla I_i \cdot B^T \nabla I_k + \dots \\ &= -\mu^{-2} R^{-1} n m^{-1} P_i (\nabla I_i \cdot \nabla I_k) + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, векторное уравнение для новых инвариантных скоростей принимает вид

$$D_1 \vec{w} + R^{-1} C \nabla_1 P = \vec{b}, \quad (6)$$

где элементы симметричной матрицы C $c_{ij} = \mu^{-2} n m^{-1} (\nabla I_i \cdot \nabla I_j)$. Скорость $\vec{u}$ через новые инвариантные скорости выражается по формулам $\vec{u} = J^{-1}(\mu \vec{w} - \vec{I}_t)$, где матрица J имеет элементы $J_i^j = \partial I_i / \partial x_j$. Отсюда получается выражение для дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\mu \partial ((J^{-1})_i^k w_k)}{\partial x_i} + \dots = \mu (J^{-1})_i^k \partial_j w_k J_j^i + \dots = \mu \partial_j w_j + \dots = \mu \operatorname{div}_1 \vec{w} + \dots$$

Значит, два скалярных уравнения системы (1) примут вид

$$D_1 R + R \operatorname{div}_1 \vec{w} = R b_4, \quad D_1 P + A \operatorname{div}_1 \vec{w} = b_5. \quad (7)$$

Систему (6), (7) можно упростить, если иметь дело с подмоделью газовой динамики.

ТЕОРЕМА 2. *Заменой инвариантов $\vec{I}$ система (6), (7) приводится к каноническому смешанному виду с диагональной матрицей C_1 , если собственные ортонормированные векторы $\vec{e}_i$ первоначальной матрицы C удовлетворяют равенствам*

$$\vec{e}_i \cdot \operatorname{rot} \vec{e}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену инвариантов по формулам $I'_i = \varphi_i(I_1, I_2, I_3)$, $i = 1, 2, 3$, с невырожденной матрицей Якоби $M = (\partial \varphi_i / \partial I_1)$; $\nabla_1 = M^T \nabla'_1$, $\vec{w}' = M \vec{w}$. При этом выполняются соотношения $D_1 = \vec{w} \cdot \nabla_1 = \vec{w}' \cdot \nabla'_1 = D'_1$, $\operatorname{div}_1 \vec{w} = \operatorname{div}'_1 \vec{w}' + \dots$, где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие производных.

Уравнения (6), (7) после замены сохраняют свой вид в новых переменных, лишь матрица C заменяется на матрицу $C_1 = M C M^T$. Пусть λ_i есть действительные собственные числа матрицы C , $\vec{e}_i(e_{1i}, e_{2i}, e_{3i})$, $i = 1, 2, 3$, – ортонормированный базис из собственных векторов. В базисе из собственных векторов с матрицей перехода $E = (e_{ij})$ матрица C_1 примет диагональный вид $C_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = E^T C E$. Если положить $M = E^T$, то получатся уравнения для нахождения замены инвариантов, необходимой для приведения системы к каноническому виду: $\partial \varphi_i / \partial I_j = e_{ji}$; $i, j = 1, 2, 3$. Эти системы могут быть несовместны. Диагональный вид матрицы C_1 не изменится, если растянуть столбики матрицы E : $\vec{e}_i \rightarrow \mu_i \vec{e}_i$. Тогда $C_1 = \operatorname{diag}(\mu_1^2 \lambda_1, \mu_2^2 \lambda_2, \mu_3^2 \lambda_3)$, а система для определения замены примет вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial I_j} = \mu_i e_{ji}; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Условия совместности системы (9) состоят из 9 уравнений для функций μ_i , $i = 1, 2, 3$. Линейная комбинация этих уравнений для каждой из функций μ_i приводит к условиям (8) для матрицы C . Остальные уравнения образуют совместную в силу (8) систему уравнений для определения μ_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} e_{1i}\partial_2\mu_i &= e_{2i}\partial_1\mu_i - \mu_i(\partial_2e_{1i} - \partial_1e_{2i}), \\ e_{1i}\partial_3\mu_i &= e_{3i}\partial_1\mu_i - \mu_i(\partial_3e_{1i} - \partial_1e_{3i}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для одномерных подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики, инвариантные подмодели таковы, что условия (8) всегда выполнены. Таким образом, канонический смешанный вид инвариантных подмоделей задается системами вида (6), (7) с диагональной матрицей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Овсянников Л. В. Программа подмодели. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. № 4. С. 30–55.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [3] Головин С. В. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Новосибирск: Институт гидродинамики, 1996.
- [4] Черевко А. А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнениями состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$. Новосибирск: Институт гидродинамики, 1996.

Институт механики Уфимского научного центра РАН
E-mail: habirov@imran.rb.ru

Поступило
01.04.97