Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Ограниченность трехмерных многообразий
Фано целого индекса, *Матем. заметки*, 1999, том 66, вы-
пуск 3, 445–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 18:20:46

УДК 517

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО ЦЕЛОГО ИНДЕКСА

И. А. Чельцов

В данной работе эффективно ограничивается куб антиканонического класса трехмерного многообразия Фано с каноническими особенностями и целым индексом Фано. Библиография: 16 названий.

Все рассматриваемые многообразия комплексные и проективные. Основные определения, обозначения и понятия содержатся в [1] и [2]. Автор очень благодарен В. А. Исковских, В. Клейнерту, Ю. Г. Прохорову и В. В. Шокурову за полезные беседы и внимание, а также Университету Джона Хопкинса (США) и Университету Хумбольда в Берлине (Германия) за гостеприимство.

1. Введение. Основная цель данной статьи состоит в доказательстве следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X есть трехмерное многообразие Фано с каноническими особенностями и $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$, где H это обильный дивизор Картье. Тогда $H^3 \leq 184/I$, где I есть индекс горенштейневости X .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1 $I = 1$ или 2 (см. [3]). Рассматривая глобальное каноническое накрытие X (см. [4]), далее везде можно считать, что $I = 1$, т.е. X горенштейнево. Легко видеть, что тогда $-K_X \sim H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка H^3 в теореме 1, по-видимому, далека от совершенства. В случае когда X гладко, $H^3 \leq 64$ (см. [2]), причем равенство достигается для $\mathbb{P}^3$. В случае когда X имеет терминальные горенштейневые особенности, X можно продеформировать в гладкое (см. [5]) и, таким образом, $H^3 \leq 64$. В случае когда X имеет терминальные особенности, из рассмотрения канонического накрытия X (см. замечание 1) следует, что $H^3 \leq 64/I$.

Существуют примеры трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейневыми особенностями и $H^3 = 72$, например конус над антиканонически вложенной поверхностью Дель Пеццо степени 9 (см. [2]).

В случае когда X имеет негоренштейневые терминальные фактор-особенности, из классификации следует, что $H^3 \leq 24$, причем равенство достигается для фактора $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ по инволюции, имеющей конечное число неподвижных точек (см. [4]).

В [6] и [7] Фано исследовал трехмерные многообразия с гиперплоскими сечениями — поверхностями типа $K3$ и Энриквеса (с каноническими особенностями) соответственно.

Допуская нормальность таких многообразий, можно показать, что это в точности многообразия из теоремы 1 с очень обильным дивизором H , причем $I = 1$ в случае когда H есть поверхность типа $K3$ и $I = 2$ в случае когда H есть поверхность Энриквеса (см. [3]). Интересно отметить, что Фано гипотетически утверждал, что $H^3 \leq 72$ в горенштейневом случае и $H^3 \leq 24$ в негоренштейневом.

2. $X \in \text{Bs}|H| \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 2. *Если в теореме 1 $I = 1$ и $\text{Bs}|H| \neq \emptyset$, то $H^3 \leq 46$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [8] следует, что при $H^3 > 2$ $\text{Bs}|H|$ есть гладкая рациональная кривая $Z \in X \setminus \text{Sing}(X)$, и если $\pi: \overline{X} \rightarrow X$ есть раздутие Z , то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & \overline{X} & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ X & \xrightarrow{\varphi|_H} & S \end{array},$$

где морфизм f есть расслоение на эллиптические кривые, $\pi^{-1}(Z) = \overline{Z}$ есть сечение f . Более того, $f|_{\overline{Z}}: \overline{Z} \rightarrow S$ есть либо изоморфизм, либо стягивание исключительного сечения линейчатой поверхности $\overline{Z} \cong \mathbb{F}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Пусть $\overline{E}$ и $\overline{F}$ – поверхности, заметаемые слоями морфизма f , проходящими слой и исключительное сечение линейчатой поверхности $\overline{Z}$ соответственно. Имеет место следующее равенство

$$K_{\overline{X}} = -\overline{F} - \frac{m+n}{2}\overline{E},$$

где $m = (H^3 + 2)/2$, причем если S особа, то $m = n$.

Если поверхность S неособа, то $\text{Bs}|\overline{E}| = \emptyset$. Если поверхность S особа и $\text{Bs}|\overline{E}| \neq \emptyset$, то $\dim(\text{Bs}|\overline{E}|) = 0$, поскольку $\text{Bs}|\overline{E}| \cap \overline{Z} = \text{Bs}|\overline{E}| \cap \pi^{-1}(H) = \emptyset$ и H – обилеи. Заметим, что $\text{Bs}|\overline{E}| \neq \emptyset$, только если $\overline{E}$ не $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор. В последнем случае пусть $g: \overline{X}' \rightarrow \overline{X}$ есть малый морфизм такой, что $g^{-1}(\overline{E})$ есть g -обильный $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор (см. [9]). Тогда $\text{Bs}|g^{-1}(\overline{E})| = \emptyset$. Действительно, если $\text{Bs}|g^{-1}(\overline{E})| \neq \emptyset$, то $\text{Bs}|g^{-1}(\overline{E})| = \overline{E}'_1 \cap \overline{E}'_2$ для достаточно общих дивизоров $\overline{E}'_1$ и $\overline{E}'_2$ из линейной системы $|g^{-1}(\overline{E})|$ и $\text{Bs}|g^{-1}(\overline{E})|$ лежит в слоях морфизма $f \circ g|_{\overline{E}'_1}: \overline{E}'_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Форма пересечения кривых в слоях морфизма $f \circ g|_{\overline{E}'_1}$ полуотрицательно определена и, следовательно, $g^{-1}(\overline{E})^3 \leq 0$, но $\overline{E}'_1 \cap \overline{E}'_2$ лежит в слоях морфизма g и по g -обильности дивизора $g^{-1}(\overline{E})$ $g^{-1}(\overline{E})^3 > 0$. Следовательно, $\text{Bs}|g^{-1}(\overline{E})| = \emptyset$. Далее, заменяя, где нужно, $\overline{X}$ на $\overline{X}'$, можно считать, что $\text{Bs}|\overline{E}| = \emptyset$.

Утверждение теоремы следует из неравенства $(m+n)/2 \leq 12$. Допустим, что последнее неверно. Рассмотрим лог-пару:

$$\left(K_{\overline{X}}, \gamma \left(\overline{Z} + \overline{F} + \frac{m+n}{4}\overline{E}_1 + \frac{m+n}{4}\overline{E}_2 \right) \right), \quad (*)$$

где $\gamma \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$ – два достаточно общих дивизора из линейной системы $|\overline{E}|$. Для $\gamma < 1$ хорошо известно, что множество лог-канонических особенностей (см. [10])

лог-пары $(*)$ связно. Действительно, рассмотрим лог-разрешение $\tau: Y \rightarrow \overline{X}$. Выполнено следующее соотношение:

$$K_Y + \tau^*(\pi^*((1 - \gamma)H)) \equiv \tau^*(K_{\overline{X}} + \pi^*(H)) - \sum_{i=1}^k a_i E_i + \sum_{j=1}^l b_j D_j,$$

где E_i и D_j – неприводимые дивизоры на Y , a_i и b_j – положительные рациональные числа и дивизоры D_j исключительны для морфизма τ . Нужно показать связность множества $V = -\left[-\sum_{i=1}^k a_i E_i\right]$. Заметим, что

$$\pi^*(H) = \overline{Z} + \overline{F} + \frac{m+n}{2}\overline{E}.$$

В окрестности $\overline{Z}$ можно считать τ изоморфизмом и V есть либо $\emptyset$, если

$$\gamma < \frac{4}{m+n},$$

либо $\{\overline{E}_1, \overline{E}_2\}$ в противном случае. По теореме об обращении в нуль Каваматы–Фивега (см. [1]):

$$H^1\left(\tau^*(K_{\overline{X}} + \pi^*(H)) + \left[-\sum_{i=1}^k a_i E_i\right] + \left[\sum_{j=1}^l b_j D_j\right]\right) = 0.$$

Последнее влечет сюръективность:

$$H^0\left(\tau^*(\overline{Z}) + \left[\sum_{j=1}^l b_j D_j\right]\right) \rightarrow H^0\left(\left(\tau^*(\overline{Z}) + \left[\sum_{j=1}^l b_j D_j\right]\right)\Big|_V\right) \rightarrow 0,$$

но в силу τ -исключительности дивизоров D_j и неподвижности дивизора $\overline{Z}$ имеем:

$$H^0\left(\tau^*(\overline{Z}) + \left[\sum_{j=1}^l b_j D_j\right]\right) = \mathbb{C}.$$

Теперь покажем, что в предположении $(m+n)/2 > 12$ для $\gamma = 1/(6+\varepsilon)$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) множество лог-канонических особенностей лог-пары $(*)$ несвязно. Во-первых, в нем содержатся дивизоры $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$. Во-вторых, в окрестности $\overline{Z}$ утверждение тривиально. Следовательно, достаточно показать, что множество лог-канонических особенностей лог-пары

$$\left(K_{\overline{X}}, \frac{1}{6+\varepsilon}\overline{F}\right) \quad (**)$$

не имеет элементов коразмерности два, не лежащих в слоях морфизма f . Легко видеть, что в коразмерности два особенности пары $(**)$, не лежащие в слоях морфизма f , это в точности особенности лог-пары

$$\left(K_{\overline{E}_1}, \frac{1}{6+\varepsilon}\overline{F} \cap \overline{E}_1\right). \quad (***)$$

Заметим, что $\overline{F} \cap \overline{E}_1$ есть некратный неприводимый слой эллиптического расслоения $f|_{\overline{E}_1}: \overline{E}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и поверхность $\overline{E}_1$ имеет канонические особенности, поскольку мы можем считать линейную систему $|\overline{E}|$ свободной. Как легко подсчитать непосредственно, лог-пара $(***)$ будет лог-терминальной, если $\gamma < 1, 5/6, 3/4, 2/3, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6$ и полный прообраз $\overline{F} \cap \overline{E}_1$ на минимальном разрешении поверхности $\overline{E}_1$ есть вырожденный слой эллиптической поверхности типа: стабильный слой, II , III , IV , $I_{b \geq 0}^*$, IV^* , III^* , II^* соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в теореме 1 $I = 1$ и X имеет терминальные особенности, то $H^3 \leq 6$. Действительно, можно в доказательстве теоремы 2 положить $\gamma = 5/(6 + \varepsilon)$ ($0 < \varepsilon \ll 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если в теореме 1 $I = 1$ и $H^3 \geq 48$, то возможны следующие варианты:

- 1) H очень обилен;
- 2) линейная система $|H|$ задает двулистное накрытие многообразия минимальной степени (X гиперэллиплично).

Это следует из теоремы 2 и свойств подвижных линейных систем на поверхностях типа $K3$ (см. [2] и [8]).

3. X – гиперэллиплично или тригонально.

ЛЕММА 1 (М. Рид). Пусть

$$V \cong \text{Proj} \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i) \right) \quad \text{и} \quad Y_j \cong \text{Proj} \left(\bigoplus_{i=j}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i) \right),$$

где $d_1 \geq \dots \geq d_m$, $d_1 > d_m$ и $m \geq j > 1$. Отождествим Y_j с подмногообразием в V , при вложении определяемом естественной проекцией $\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i) \rightarrow \bigoplus_{i=j}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$. Пусть $s \in H^0(\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(a) \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)))$, где $f: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ естественная проекция, а и b целые числа. Тогда s имеет на Y_j нуль порядка не меньше q в том и только том случае, если выполняется следующее неравенство:

$$ad_j + b + (d_1 - d_j)(q - 1) < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2].

ЛЕММА 2. Пусть в теореме 1 $I = 1$ и X гиперэллиплично (см. замечание 4). Тогда $H^3 \leq 16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (В гладком случае см. [2]). Легко видеть, что $\varphi|_{H|}(X)$ есть многообразие “минимальной степени”, и, учитывая необходимое неравенство, можно считать, что $\varphi|_{H|}(X) \cong \varphi|_{\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1(1)}}(V)$, где $V \cong \text{Proj} \left(\bigoplus_{i=1}^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i) \right)$ и $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 0$.

Если $d_1 = d_2 = d_3$, то $H^3 \leq 16$. Следовательно, можно считать, что $d_1 > d_3$. Если $\varphi|_{H|}(X)$ особо в коразмерности 2, то [11] влечет $H^3 \leq 8$. Следовательно, можно считать, что $d_2 \neq 0$. Заметим, что если $\varphi|_{H|}(X)$ особо, то $d_3 = 0$ и в обозначениях леммы 1 $\varphi|_{\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1(1)}}$ стягивает кривую Y_3 .

Пусть D есть собственный прообраз на V дивизора ветвления двулистного накрытия $\varphi|_H|$. В обозначениях леммы 1

$$D \sim \mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(4) - f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2(d_1 + d_2 + d_3 - 2))).$$

Рассматривая нормализацию расслоенного произведения $X \times_{\varphi|_H|(X)} V$, легко видеть, что D содержит Y_3 с кратностью не больше 2. Учитывая приведенность D , видим, что D содержит Y_2 с кратностью не больше 1. Из леммы 1 следуют неравенства:

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 - 2d_3 + 4 &\geq 0, \\ 4 - 2d_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Откуда $H^3 = 2(d_1 + d_2 + d_3) \leq 16$.

ЛЕММА 3. Пусть в теореме 1 $I = 1$ и X тригонально, т.е. H очень обилен и общий элемент семейства кривых $\{H^2\}$ есть неприводимая гладкая тригональная кривая. Тогда $H^3 \leq 54$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отождествим X с его антиканоническим образом. Как и в случае гладкого X (см. [2]), можно показать, что пересечение квадрик в $\mathbb{P}^{H^3/2+2}$, содержащих X , есть $W \cong \varphi|_{\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1(1)}|}(V)$, где $V \cong \text{Proj}(\bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i))$ и $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq 0$.

Если $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$, то $H^3 \leq 18$. Следовательно, можно считать, что $d_1 > d_4$. Пусть $Z = \text{Sing}(W) \cong \mathbb{P}^k$ ($k = 0, 1, 2$), тогда W есть конус с вершиной Z . Аналогично с гладким случаем $Z \cap X \subset \text{Sing}(X)$. Заметим, что если $\dim(Z) = 2$, то $\dim(Z \cap X) = 1$, $d_2 = d_3 = d_4 = 0$ и в обозначениях леммы 1 $\varphi|_{\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1(1)}|}$ стягивает Y_2 на Z и в общей точке Z является раздутием.

Пусть $\overline{X} = \varphi|_{\mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1(1)}|}^{-1}(X)$. Учитывая формулу суб-присоединения (см. [1]) и гладкость V , получаем что $\overline{X}$ имеет канонические особенности и в обозначениях леммы 1

$$\overline{X} \sim \mathcal{O}_{V/\mathbb{P}^1}(3) + f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2 - d_1 - d_2 - d_3 - d_4)).$$

Y_2 не принадлежит $\overline{X}$ в силу неприводимости $\overline{X}$. $\overline{X}$ содержит Y_3 с кратностью не больше 1, а Y_4 с кратностью не больше 2. Из леммы 1 следуют неравенства:

$$\begin{aligned} 2d_2 - d_1 - d_3 - d_4 + 2 &\geq 0, \\ d_3 - d_2 + 2 &\geq 0, \\ 2 - d_2 - d_3 + d_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Откуда $H^3 = 2 + 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) \leq 54$.

4. X замечается “прямыми”.

ЛЕММА 4. Пусть x есть замкнутая гладкая точка k -мерного многообразия X , H есть обильный дивизор Картье на X . Предположим, что общую точку $v \in X$ соединяет с x неприводимая кривая C_v такая, что $HC_v \leq d$. Тогда $H^k \leq d^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $h^0(\mathcal{O}_X(mH)) = m^k H^k / k! + O(m^{k-1})$ для $m \in \mathbb{N}_{\gg 0}$. Если $H^k > d^k$, то для $m \gg 0$ существует дивизор $D \in H^0(\mathcal{O}_X(mH))$, имеющий в точке x кратность не меньше $(md + 1)$. Следовательно, D содержит все кривые C_v , что невозможно.

ЛЕММА 5. Если в теореме 1 $I = 1$ и через общую точку $v \in X$ проходит неприводимая кривая C_v такая, что $HC_v = 1$, то $H^3 \leq 46$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{Bs}|H| \neq \emptyset$, то теорема 2 влечет $H^3 \leq 46$. Если $\text{Bs}|H| = \emptyset$, то пусть $\{C\}$ есть семейство неприводимых приведенных кривых таких, что $HC = 1$ и через общую точку X проходит кривая из $\{C\}$. Из замечания 4 следует, что $C \cong \mathbb{P}^1$.

Рассмотрим RC-расслоение (см. [12], [13]) $\varphi: X \dashrightarrow W$, ассоциированное с $\{C\}$.

Если $\dim(W) = 0$, то две общие точки X могут быть соединены цепочкой не более чем трех кривых из $\{C\}$, которые можно склеить и получить новое семейство $\{C'\}$ такое, что две общие точки X могут быть соединены одной кривой из семейства $\{C'\}$ (см. [13]). Применение леммы 4 к $\{C'\}$ дает неравенство $H^3 \leq 26$ (H^3 четно).

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \tilde{\varphi} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

где $\tilde{X}$ это гладкое многообразие, π бирационален и $\tilde{\varphi}$ – морфизм.

Если $\dim(W) = 1$, то пусть S есть общий слой морфизма $\tilde{\varphi}$, а C есть общая кривая из $\{C\}$. Семейство кривых $\{\pi^{-1}(C)\}$ определяет на S семейство кривых $\{C_S\} \in S$. Общая кривая C_S из $\{C_S\}$ неприводимая, гладкая, рациональная, $-K_S C_S \leq 1$ и $C_S^2 > 0$, что противоречит формуле присоединения.

Если $\dim(W) = 2$, то пусть C есть общая кривая из $\{C\}$; $\pi^{-1}(C)$ есть общий слой морфизма $\tilde{\varphi}$ и $-K_{\tilde{X}} \pi^{-1}(C) \leq 1$, что противоречит $-K_{\tilde{X}} \pi^{-1}(C) = 2$, поскольку общий слой $\tilde{\varphi}$ есть $\mathbb{P}^1$.

5. Двойная проекция из общей точки X .

ЛЕММА 6. Пусть в теореме 1 $I = 1$, $H^3 \geq 56$ и $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ есть раздутие достаточно общей точки $v \in X$ с исключительным дивизором E . Тогда дивизор $\pi^*(H) - 2E$ численно эффективен и объемен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $\pi^*(H) - 2E$ численно эффективен. Из замечания 4 и леммы 2 следует, что H очень обилен. Отождествим X с его антиканоническим образом. Если $(\pi^*(H) - 2E)C < 0$ для кривой $C \in \hat{X}$, то $v \in \pi(C) \in T_v(X) \cap X$, где $T_v(X)$ есть касательное пространство к X в точке v . Из леммы 3, теоремы Нетера–Энриквеса–Петри (см. [14]) и [2] следует, что X высекается квадраками. Последнее влечет, что C есть прямая на X проходящая через точку v , но по лемме 5 это невозможно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По замечанию 1 достаточно доказать теорему 1 при условии $I = 1$. Пусть $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ есть раздутие общей точки $v \in X$. Если $H^3 \geq 56$, то по лемме 6 дивизор $K_{\tilde{X}} \sim \pi^*(H) - 2E$ будет численно эффективен и объемен. По теореме о свободе от базисных точек (см. [1]) существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ линейная

система $|n(\pi^*(H) - 2E)|$ свободна. Следовательно, для $n \gg 0$ существует морфизм $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X'$ такой, что X' имеет канонические особенности,

$$\pi^*(H) - 2E = \varphi^*(H'), \quad -K_{X'} \sim H' \text{ и } H'^3 = H^3 - 8,$$

где H' это обильный дивизор Картье.

В условиях нашей теоремы можно повторить данную перестройку 17 раз. Таким образом, можно считать, что π есть раздутие 17 точек X в общем положении.

Общий дивизор $\tilde{D} \in |-K_{\tilde{X}}|$ приведен, неприводим, имеет лишь канонические особенности и есть поверхность типа $K3$ (см. [15]). Поскольку дивизор $-K_{\tilde{X}}$ π -обилен, то морфизм π определяет на $\tilde{D}$ стягивание 17 кривых, которые попарно не пересекаются, что невозможно по [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 383–360.
- [2] Исковских В. А. Антиканоические модели трехмерных алгебраических многообразий // Современные проблемы математики. 1979. Т. 12. С. 59–157.
- [3] Чельцов И. А. Трехмерные многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом // УМН. 1996. Т. 1. С. 177–178.
- [4] Sano T. On classifications of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1 // J. Math. Soc. Japan. 1995. V. 47. № 2. P. 369–380.
- [5] Namikawa Y. Smoothing Fano 3-folds. Preprint, 1995.
- [6] Fano G. Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche // Mem. Acc. It. 1937. V. 8. P. 813–818.
- [7] Fano G. Sulle varietà algebriche a tre dimensionile le cui sezioni iperpiane sono superfici di genere zero e bigenere uno // Mem. Soc. It. d. Scienze (detta dei XL). 1938. V. 24. P. 44–66.
- [8] Shin K.-H. 3-dimensional Fano varieties with canonical singularities // Tokyo J. Math. 1989. V. 12. P. 375–385.
- [9] Kawamata Y. Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces // Ann. of Math. 1988. V. 127. P. 93–163.
- [10] Kawamata Y. On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds. Preprint, 1996.
- [11] Saint-Donat B. Projective models of $K - 3$ surfaces // Amer. J. Math. 1974. V. 96. № 4. P. 602–639.
- [12] Kollár J., Miyaoka Y., Mori S. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds // J. Differential Geom. 1992. V. 36. № 3. P. 765–779.
- [13] Kollár J., Miyaoka Y., Mori S. Rationally connected varieties // J. Algebraic Geom. 1992. V. 1. P. 429–448.
- [14] Шокуров В. В. Теорема Нетера–Энриквеса о канонических кривых // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 3. С. 367–408.
- [15] Reid M. Projective morphism according to Kawamata. Preprint. University of Warwick, 1983.
- [16] Никулин В. В. О Куммеровых поверхностях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. С. 278–293.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

24.04.97

Исправленный вариант

06.10.98